

# 引文及流体动力学方程

## 1.1 本书所涉及流体力学问题的概述与分类

固体与流体问题在许多方面是相似的。在这两种介质中，应力的出现都导致位移的产生。但是，它们之间存在的主要区别在于：流体静止时不能承受任何偏应力。此时，流体只能承受压力或者正应力。我们知道，在固体介质中，还可以存在其他的应力，且固体材料通常能够承受结构力。

除了压力以外，流体运动时，也会产生偏应力，且流体运动是流体动力学研究的主要内容，因此，我们将集中讨论位移连续变化的问题和流动主要特征为速度的问题。此时，流动产生的偏应力与剪切模量非常类似。

基于这一点，流体流动的控制方程与固体力学的控制方程基本相似，只是用速度矢量  $\mathbf{u}$  代替了前面我们用同样符号表示的位移。但是，除此之外还有一个不同，那就是即使流动是定常的（稳态），也会产生对流加速度。这一对流加速度项使得流体力学方程组非自伴随。因此，在大多数情况下，对于控制方程的处理方法与固体力学方程有一些不同，除非由于速度非常小，对流加速度可以忽略。读者应该记得对于自伴随形式，由伽辽金方法推导的近似方程给出了能量范数的最小误差，可以说是最佳的。但在流体力学中则不然，相似之处仅在缓慢流动（蠕流）时。

流动的流体总是需要保持质量守恒，除非流体是高度可压缩的，否则速度矢量的散度为零。我们已经在第 1 卷关于弹性力学问题中处理过类似问题，并且给出了不可压缩约束导致公式表达非常困难（第 1 卷第 12 章）。在流体力学中也有同样的难题，对所有流体力学的近似，即使有可压缩性时，不可压缩极限也应能模拟。这使得许多单元不能再使用。

本书将向读者介绍利用有限元方法如何解决流体力学各种问题。许多流体力学研究都采用有限差分方法，近来更多地采用从其中独立出的有限体积方法。新兴的有限元方法和已成熟的有限差分方法之间的竞争已显而易见，并且由于这一竞争，有限元方法在流体力学领域比在固体力学领域更难让人接受。原因很简单，

对于固体力学问题或者结构问题,只在特殊情况下才需要对连续介质进行处理。工程师们经常处理的是由条状单元组成的结构,而不涉及连续问题。因此,他们只是最近才对连续问题产生兴趣。在流体力学中,几乎所有流动问题都要求在二维或三维求解,并且通常需要进行近似。这就说明了为什么有限差分方法早于有限元方法,在 20 世纪 50 年代就得到了应用。但是,正如我们在第 1 卷中指出的一样,使用有限元方法有许多优点。这一方法不但允许对完全非结构区域和任意区域进行划分,同时还提供了一种解决自伴随问题的近似方法,这种近似方法优于,至少等同于有限差分方法所提供的近似方法。

介于两者之间的是有限体积法,它最初是从有限差分方法中独立出来的。在第 1 卷中我们已经介绍了其基本就是有限元方法的另一种形式,只是在其中使用到了子域配点。我们没有看到使用这种近似的优越性,但是有一点吸引研究人员的是,使用有限体积法能使每一个单元都满足守恒条件。有限元方法并没有这个特点,所有守恒条件只能在单元集中的区域得到满足。但是,如果要得到一般近似,没有这一特点并非是缺陷。

本书将要讨论的各类问题,每一类的数值求解方法都有其自身特点。首先,从不可压缩流动开始,体积的变化只与弹性以及瞬时的压力变化相关(第 4 章)。对于这种流动,必须应用完全的不可压缩约束。

接下来,对于蠕流,对流加速度效应通常是可以忽略的,所以利用弹性力学里已有的程序就可以求解。这的确是有有限元开发者首次在流体力学领域尝试将结构力学知识直接搬到流体力学中的成果。所谓的线性 Stokes 流动就是一个特例,这是一个完全不可压缩但却有弹性的问题。其中一个特殊的派生问题,就是金属成形问题中材料不能再使用恒定的粘性系数来描述,而应该用一个非牛顿的、依赖于应变率的粘性系数来表示。在这里,流体问题(流动公式)可以直接应用于金属或塑料的成形,我们将在第 4 章的后面讨论这个问题。尽管如此,即使在不可压缩流动中,速度逐渐增大,对流项将逐渐变得重要。通常来说稳态流情况是不存在的,至少说是很不稳定的,这就引导我们去研究诸如涡脱落等问题,这也将在该章中进行讨论。

关于湍流本身的话题是非常庞大的,已有大量的研究。我们将在第 5 章中对其进行简单的讨论:可以说在湍流问题中,可能需要用到各种模式,导致流动粘性与流动相关。在这一章中同时将要处理自由表面的不可压缩流问题及其他重力影响的流动。我们将作必要修正,使诸如船体、潜水艇等的附近表面扰动问题得以解决。

流体力学中很多实际问题是可压缩效应明显的气相流。可压缩性问题是相关的,遵守关于压力、温度和密度的气体定律。此时,有必要将能量方程添加到系统中来控制流动,用来预估温度。这样的能量方程当然也能用于不可压缩流动,但其与流体动力学只有微弱的联系,甚至完全没有联系。

在可压缩流动中,并不是所有方程之间的联系都那么紧密。流速可能超过声速,因此可能导致声波的出现。这是空气动力学研究的重要课题,我们将用整个第 6 章的内容来讨论这一特殊问题。

在实际流动中粘性总是存在的,但对于高速流动,粘性作用被限制在固体表面很窄的区域内(边界层)。在这种情况下,其余的流体可以认为是无粘的。这样我们就可以回到理想流体的假设。在这一假设下,没有粘性作用,且又可能有各种简化。

其中一种简化形式即势流,我们将在第 4 章中提到。在第 1 卷中我们已经处理了某些情况下的势流问题,这并不困难。但不幸的是,那些解答很难扩展到实际问题中来。

流体力学领域第三个主要兴趣所在点为发生在海湾或者其他深度尺度远小于水平尺度的浅水流。第 7 章将要处理这一问题,从本质上来说,压力在垂直方向的分布基本是静水压力。

对于浅水流问题,自由表面同样会出现,并且将决定流动的性质。

在自由表面处,有可能会有瞬时现象出现而产生波,比如发生在海洋和其他水体里。我们将用本书的一章(第 8 章)来处理这一流体力学特殊现象。这样的波现象同样是其他物理问题中的典型问题,在第 1 卷中已经包含了声波的内容,在这里我们将看到对于水波表面问题的处理方法也非常类似。对于其他的波比如将再次提到的电磁波,本卷第 8 章中建议的解法可能会有助于依次解决这些问题。

在其余的章节我们将要介绍普通的适用于大多数可压缩和不可压缩流动的流体动力学方程组,并介绍如何对上述的每一类问题进行特定的简化。但是,在实施第 3 章推荐的离散过程前,我们必须介绍对流项和扩散项同时出现的处理方法。我们将在第 2 章中介绍典型的对流-扩散方程。第 3 章将介绍通用的适合于求解大多数本书遇到的流体力学问题的算法。就像我们已经提到过的一样,现在有许多可以解决问题的算法,通常情况下不同的应用领域需要专门的算法。但是第 3 章将要介绍的通用算法能够得到至少可与更专业的方法媲美的结果。为使整个文章比较统一,我们将不再提及其他的算法,或者只是顺便提到它们而不再为此声明。

## 1.2 流体力学控制方程

### 1.2.1 流体中的应力

流体的本质特征是其不能在静止时承受剪应力,而只能承受静应力或压力。因此,任何分析必须集中于运动,其最本质的独立变量是速度  $\mathbf{u}$ ,或者我们采用下

标符号(类似  $x_i, i=1,2,3$  表示  $x, y, z$  轴)表示:

$$u_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

这就替代了固体力学中最主要的位移变量。

因此,应变率成为总应力  $\sigma_{ij}$  的主要成因,且其定义方法与无穷小应变类似:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i}{2} \quad (1.2)$$

这是著名的应变率的张量表示法,但为了以后变量形式的使用,通常在有限元分析中写作矢量形式更为方便。关于这一矩阵形式的详细内容已经在第 1 卷中给出,为了更加完整,我们在此处将再次提到。应变率写作矢量形式( $\dot{\epsilon}$ )。这一矢量由以下形式给出:

$$\dot{\epsilon}^T = [\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, 2\dot{\epsilon}_{12}] = [\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\gamma}_{12}] \quad (1.3)$$

三维的情况与二维类似:

$$\dot{\epsilon}^T = [\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, 2\dot{\epsilon}_{12}, 2\dot{\epsilon}_{23}, 2\dot{\epsilon}_{31}] \quad (1.4)$$

使用矢量形式时,可以将应变率写为如下形式:

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (1.5)$$

其中  $\mathbf{S}$  为应变,  $\mathbf{u}$  为式(1.1)中给定的速度。

线性(牛顿)各向同性流体的应力应变关系需要定义两个常数。

第一个是偏应力  $\tau_{ij}$  与偏应变率之间的关系:

$$\tau_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3} = 2\mu \left( \dot{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij} \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} \right) \quad (1.6)$$

在上面方程中,括号中的量为偏应力,  $\delta_{ij}$  为单位张量(Kronecker delta),重复下标表示总和,因此

$$\sigma_{ii} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} \equiv \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} \quad (1.7)$$

系数  $\mu$  为动力(剪切)粘性系数或者简单的粘性系数,与线弹性力学中的剪切模量  $G$  相似。

第二个是关于平均应力变化和体积应变率的。压力定义为

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -\kappa \dot{\epsilon}_{ii} + p_0 \quad (1.8)$$

其中  $\kappa$  为体积粘性系数,与线弹性力学中的体积弹性模量  $K$  相似;  $p_0$  为与应变率无关的初始静压(注意当被压缩时,总是定义  $p$  与  $p_0$  为正)。

我们马上就可以根据方程(1.6)和方程(1.8)写出流体的本构关系

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left( \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk}}{3} \right) + \delta_{ij} \kappa \dot{\epsilon}_{kk} - \delta_{ij} p_0 = \tau_{ij} - \delta_{ij} p \quad (1.9a)$$

或者

$$\sigma_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij}\left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right)\dot{\epsilon}_{kk} + \delta_{ij}p_0 \quad (1.9b)$$

传统上通常会引入拉梅(Lame)算子,令

$$\kappa - \frac{2}{3}\mu \equiv \lambda \quad (1.10)$$

但是这并不值得推荐,关系式(1.9a)才是基本的。没有证据证明体积粘性系数的存在,因而我们给出

$$\kappa\dot{\epsilon}_{ii} \equiv 0 \quad (1.11)$$

下面,我们给出了基本的本构关系(略去下标)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}}{3}\right) - \delta_{ij}p \equiv \tau_{ij} - \delta_{ij}p \quad (1.12a)$$

不考虑不可压缩性  $\dot{\epsilon}_{ii} \equiv 0$ 。上式中

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}}{3}\right) = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right] \quad (1.12b)$$

上面所有的关系都类似于弹性力学中的关系,稍后我们将再回到不可压缩流动。在第1卷的第12章中,已经提到过不可压缩问题的各种稳定性问题。

一些流动的非线性问题,是由依赖于应变率的系数  $\mu$  来描述的。我们称这些流动为非牛顿流体。

### 1.2.2 质量守恒

如果  $\rho$  是流体密度,那么质量流  $\rho u_i$  流进和流出一个无限小控制体积(图1.1)的差额等于密度变化率<sup>①</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.13a)$$

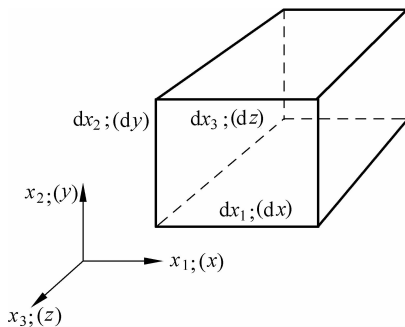


图 1.1 坐标方向与无限小控制体积

① 本书的英文符号基本以原著为准,只是将其中黑正体的英文改为黑斜体。

或者在传统的笛卡儿坐标系下写作

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (1.13b)$$

### 1.2.3 动量守恒或动态平衡

对于  $j$  方向的动量平衡,流出和流进控制体的  $(\rho u_j)u_i$ , 必须与应力  $\sigma_{ij}$  和体力  $\rho f_j$  相等,典型的分量方程为

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho u_j)u_i] - \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}) - \rho f_j = 0 \quad (1.14)$$

或者利用式(1.12a)可得

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}[(\rho u_j)u_i] - \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho f_j = 0 \quad (1.15a)$$

同样地,上式可以被写作笛卡儿坐标下的三个分量方程形式:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x = 0 \quad (1.15b)$$

等等。

### 1.2.4 能量守恒和状态方程

我们注意到,在 1.2.2 节和 1.2.3 节的方程中,独立变量为  $u_i$ (速度),  $p$ (压力)和  $\rho$ (密度)。当然,由方程(1.12b)定义的偏应力可由速度表达,因而不是独立的。

显然,未知数个数多于方程个数。但是,如果假设密度为常数(在不可压缩流动中)或者如果可以建立一个关于压力和密度的关系式(在绝热的微可压缩流动中),则方程完整可解。

更一般的,压力( $p$ ),密度( $\rho$ )和绝对温度( $T$ )的关系由状态方程形式表达:

$$\rho = \rho(p, T) \quad (1.16)$$

比如说,对于理想气体,即有

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (1.17)$$

其中  $R$  为普适气体常数。

在一般情况下,需要将能量守恒方程补充到控制方程中。即使这个方程与控制方程毫无关联也是有意义的,因为它提供了系统特征的一些附加信息。

在引入能量方程之前,必须定义一些变量。首先我们引入单位质量的内能  $e$ ,它依赖于流体的状态,也就是压力和温度,可写作

$$e = e(T, p) \quad (1.18)$$

其次引入单位质量的总能量  $E$  包含单位质量的动能为

$$E = e + \frac{u_i u_i}{2} \quad (1.19)$$

最后,我们可以定义焓

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad \text{或} \quad H = h + \frac{u_i u_i}{2} = E + \frac{p}{\rho} \quad (1.20)$$

这一变量更方便使用。

能量传递将伴随对流和传导而发生(辐射一般被限制在边界上)。这一热传导通量定义为

$$q_i = -k \frac{\partial}{\partial x_i} T \quad (1.21)$$

其中  $k$  为各向同性热传导率。

为了使关系式完善,需定义热源项。其可以由化学反应(如果有的话)定义为单位体积热源  $q_H$ ,且由于内应力存在,必须包含能量耗散,也就是说,利用方程(1.12),有

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (p u_j) \quad (1.22)$$

单位体积中能量的平衡可以写为方程

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i E) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (p u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) - \rho f_i u_i - q_H = 0 \quad (1.23a)$$

或者写为更简单的形式

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i H) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) - \rho f_i u_i - q_H = 0 \quad (1.23b)$$

式中,倒数第二项代表体积力所做功。

### 1.2.5 Navier-Stokes 和 Euler 方程

前面所述的控制方程可以写为统一的守恒形式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} + \nabla \mathbf{G} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (1.24a)$$

或者

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (1.24b)$$

方程(1.13), (1.15)或者(1.23)分别提供了不同的矢量形式。

因此,同时利用指标符号和笛卡儿符号,可以得到未知独立量的矢量形式,

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad \text{或笛卡儿符号,} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{1i} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{2i} \\ \rho u_3 u_i + p \delta_{3i} \\ \rho H u_i \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{F}_x = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{Bmatrix} \quad \text{等} \quad (1.25b)$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \\ -(\tau_{ij}u_j) - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{G}_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \\ -(\tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w) - k \frac{\partial T}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{等} \quad (1.25c)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_1 \\ -\rho f_2 \\ -\rho f_3 \\ -\rho f_i u_i - q_H \end{Bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_x \\ -\rho f_y \\ -\rho f_z \\ -\rho(f_x u + f_y v + f_z w) - q_H \end{Bmatrix} \quad \text{等} \quad (1.25d)$$

其中

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

完整的方程组(1.24)即为 Navier-Stokes 方程。特别的,当假设粘性为零且无热传导时,即为 Euler 方程( $\tau_{ij}=k=0$ )。

上述方程组是所有流体力学研究的基础,各种文献中所出现的方程的变形形式,无非是将不同的方程进行了某种组合。然而,上面所示的方程使用方便,且具有物理意义,给出了重要量的守恒关系。值得注意的是,只有写成守恒形式的方程才能给出正确的、有物理意义的、实际中出现的非连续激波。在附录 A 中,我们将给出一经常使用的特殊的非守恒方程组。通过例子我们将看到当有激波存在时可



能出现的不正确的解。读者需小心,不要将非守恒方程组的应用范围轻易地扩大到高速流动中。

在许多实际情况中,某些流动特征是占主导地位的。比如说,通常粘性是边界处给定速度时的唯一重要物理量,即

$$\Gamma_u, \text{当 } u_i = \bar{u}_i \text{ 时}$$

或者规定应力:

$$\Gamma_t, \text{当 } n_i \sigma_{ij} = \bar{t}_j \text{ 时}$$

式中,  $n_i$  为表面法线的方向余弦。

在这种情况下,问题可以被分成两部分来考虑:一部分是靠近边界处的**边界层**;另一部分是边界层外的无粘流动。

此外,更多情况下,稳态解并不适合流体出现**湍流**时的情况,即速度出现随机波动的情况。在这种情况下,仍然可以使用普通的 Navier-Stokes 方程,但可利用**雷诺粘性**替换分子粘性的平均流动形式。这一问题将在其他地方详细研究,在本卷中,我们只是非常简单地进行一些讨论。湍流的不稳定性是简单的 Navier-Stokes 方程中固有的,且原则上总可能得到湍流的瞬时模拟——只要提供的网格尺寸适合任意涡的产生。这样的计算,尽管是可能的,但却非常昂贵,因此雷诺平均的应用非常重要。

关于**无粘流动**(有时认为是理想流体流动)有两点值得重视。

首先,Euler 方程为单纯的对流形式:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) \quad (1.26)$$

因此,需要解此方程的特殊方法。这些方法主要应用于**可压缩流动**,我们将在第 6 章中讨论。其次,对于不可压缩(或者近似不可压缩)流动,有必要引入**势**的概念,将 Euler 方程转换为简单的自伴随形式。我们将在第 4 章中提到这一势能的近似。虽然有势形式同样可应用于可压缩流动,但我们在后面将不再讨论,因其不适用于高超音速流动的情况。

### 1.3 不可压缩(或近似不可压缩)流动

我们前面已经讨论过有了式(1.16)的状态方程后,Navier-Stokes 方程已经完备:

$$\rho = \rho(p, T)$$

在(近似)不可压缩关系中,我们通常假设:

(1) 问题是等温的。

(2) 随着  $p$  的变化  $\rho$  变化非常小,也就是说,密度可以认为是常数。

在后面我们将看到第一个假设可以放松限制,通过流体性质与温度相关来允许一些热耦合的存在。在这样的情况下,我们需要反复引入耦合。此时,密度驱动流动或依赖于温度的粘性将非常典型(第 5 章)。

如果引入上述假设,我们仍然可以考虑可压缩性,注意到作为弹性变形结果的密度变化关系到压力的变化。因此可得

$$d\rho = \frac{\rho}{K} dp \quad (1.27a)$$

其中  $K$  为体积弹性模量。因此又可以写为

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp \quad (1.27b)$$

或者

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.27c)$$

其中  $c = \sqrt{K/\rho}$  为声速。

方程(1.24)和方程(1.25)可以略去能量传递项重新写为

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.28a)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j u_i) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ji} - f_j = 0 \quad (1.28b)$$

利用  $j=1,2,3$ , 这一方程为代表了四个方程的方程组,变量为  $u_j$  和  $p$ 。

笛卡儿坐标下可以将方程(1.28a)写作

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.29a)$$

完全不可压缩时,去掉第一项( $c=\infty$ ),且

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right) - f_x = 0 \quad (1.29b)$$

对于  $y$  和  $z$  方向有类似的形式。两种形式都有

$$\frac{1}{\rho} \tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

其中  $\nu = \mu/\rho$  为运动粘性系数。

读者可能会注意到,上述方程除了对流加速度项之外,都与我们已经在第 1 卷第 12 章中讨论过的控制不可压缩弹性问题(或者微可压缩)的方程类似。