(3) 力的三要素

力对物体的作用效果取决于力的大小、方向和作用点。力对刚体的作用效果则取决于力的大小、方向和作用线的位置。因为力对刚体只产生运动效果，这种作用效果除与力的大小和方向有关外，还与力的作用线位置有关，与力作用在这一作用线上的哪一点无关。

力是矢量，矢量的模为力的大小，矢量的始端或末端为力的作用点，矢量所在的直线为力的作用线，矢量的指向为力的方向。力一般用字母 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$、$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 等表示。

在国际单位制中，力的单位为牛顿，简称牛(N)。

(4) 关于力基本性质的原理

原理 1 两个物体相互作用的力，大小相等、方向相反、作用线相同。这是牛顿第三定律——作用与反作用定律。在这里容易将其与作用在一个物体上的一对平衡力相混淆。因为二者都是大小相等、方向相反、作用线相同的力；但作用与反作用力分别作用在两个不同的(相互作用的)物体上，而一对平衡力则作用在同一个物体上。

原理 2 作用于刚体上相交的两个力，其合力通过两个分力作用线的交点，合力的大小和方向由以这两个力为边所构成的平行四边形的对角线确定。这个原理又称为力的平行四边形法则，它表明合力是分力的几何和或矢量和。

作用线可汇交于同一点的多个力所组成的汇交力系，可应用原理 2 求其合力：将力系中所有的力逐次应用平行四边形法则，最后合成一个合力 $\boldsymbol{F}$。其矢量表达式为

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

(5) 力在坐标轴上的投影及汇交力系合力的解析表达式

力在坐标轴上的投影 若力 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴 x 的正向夹角为 φ，则力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴上的投影 F_x 为

$$F_x = F\cos\varphi$$

力 $\boldsymbol{F}$ 的解析表达式为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

式中，F_x、F_y、F_z 表示力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y、z 三个坐标轴上的投影；$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为 x、y、z 三个坐标轴上的单位矢量。

汇交力系合力的解析表达式 除用几何法求汇交力系的合力外，在实际应用中更多的是采用力解析法，即投影方法。先求得各分力在 x、y、z 轴上投影的代数和，即合力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y、z 轴上的投影：

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

$$F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

则合力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

合力 $\boldsymbol{F}$ 的方向由 $\boldsymbol{F}$ 与 x、y、z 轴正向夹角 φ、θ、γ 的余弦确定：

$$\cos\varphi = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\theta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

上述结果表明汇交力系合成结果是一个力，也即这个力对物体的作用与原汇交力系等效。

2. 平衡的基本概念和关于平衡的基本原理

作用于物体的所有力的集合称为力系。一刚体在某个力系作用下相对于惯性参考系处于静止或等速直线运动状态，则称刚体处于平衡状态。使刚体处于平衡状态的力系称为平衡力系。

平衡必须相对于其周围某一参考物体而言才有意义。在静力学中，如不特别指明，所谓平衡是相对于地球而言的。

原理 3　作用于刚体上的两个力使刚体处于平衡状态的必要和充分条件是：这两个力大小相等，方向相反，其作用线在一条直线上。这一原理又称为二力平衡原理或二力平衡条件。

在建筑结构或各种机械中常常会遇到承受两个力的作用而处于平衡的各种形状的构件和零件，它们都必须满足二力平衡条件，这类构件或零件统称为二力构件。

三力平衡汇交定理　根据原理 2 和原理 3，可以得到三力平衡汇交定理，即三个不平行的力作用于刚体上，其平衡的必要和充分条件是，这三个力的作用线必汇交于一点。

3. 关于约束与约束力

物体间相互作用产生了力。要分析作用在一个物体上的力，必须明确与之发生作用的周围物体是以何种方式相互作用的。

物体间相互联系的方式总称为约束。当物体与周围物体有联系时，其运

动就会受到周围物体的限制，因此，约束又可以称为构成运动限制的物体。

约束力就是指约束作用于被约束物体上的作用力。

除约束力外物体所受的已知力均称为主动力，亦即引起物体运动的力，如重力、水压力、油压力、弹簧力和电磁力等。

通常情况下，约束力是由主动力引起的，所以约束力是一种未知的被动力。可见，作用在物体上的力可分为两大类：已知的主动力和未知的约束力。静力分析的首要任务便是由已知的主动力确定未知的约束力。

约束力与约束的物理性质以及接触方式有关。

根据约束的物理性质，约束可分为柔性和刚性两种。

(1) 柔性约束

柔性约束是指由绳、缆、皮带、链条等构成的约束，这类约束本身的物理性质决定它们只能承受拉伸。因此，它们对被约束的物体只能提供拉力。这样，约束力的方向(拉力)和作用线(沿着柔体)即可确定，未知的只是约束力的大小。

(2) 刚性约束

若约束本身为刚体，这种约束称为刚性约束。这时，约束力的方向和作用线与接触表面的光滑程度有关。接触表面光滑时，摩擦力的影响可以忽略不计，约束力将沿着接触面的法线方向。显然，当被约束物体与光滑表面接触位置为已知(如光滑面约束、活动铰支座约束等)时，约束力的方向和作用线是确定的；当被约束物体与光滑表面接触位置为未知(如光滑圆柱铰链、固定铰支座、轴承等约束)时，约束力一般用沿坐标轴方向的分力来表示。对于二力和三力构件，约束力的方向和作用线可通过二力平衡或三力平衡的条件来确定。

4. 物体受力分析

受力分析就是分析作用在物体上的所有力。分析物体受力时，除了应用上述有关约束力的概念外，还必须解决以下两个问题。

(1) 选择合适的研究对象

只有研究对象选择得合适，才能通过对研究对象所受力系平衡的分析，建立已知力与未知力之间的关系。

(2) 取隔离体

将研究对象从所研究的系统中隔离出来，以便突出所隔离出来的研究对象为受力体，而其周围物体为施力体。所隔离出来的研究对象称为隔离体。将主动力以及约束力(周围物体对隔离体的作用)以相应的力矢量表示，便得到隔离体的受力图。这样做，物体所受的力系一目了然，为进一步研究平衡问

题做好准备。

学习建议

1. 本章不仅是工程静力学的基础，而且是整个理论力学课程的基础，因而要给予特别的重视。

2. 要通过具体的练习，掌握受力分析的基本方法。取隔离体、画受力图时要特别注意以下几点。

(1) 根据约束的性质确定约束力；

(2) 注意分清施力体与受力体；

(3) 在物体接触处要正确应用作用与反作用定律；

(4) 要善于应用二力平衡与三力平衡原理。

3. 在以后的分析中，为了比较容易确定所要求的未知力，还要选择合适的研究对象，这一问题在第 2 章中还要详细讨论。

例题示范

例 1-1　杆 AB 在 C 点受重力 $\boldsymbol{W}$ 作用如图 1-1(a)所示，试画出其受力图。

解　(1) 分析约束类型

杆 AB 在 A、D 处为光滑面约束，在 E 处为柔性约束。

(2) 画杆 AB 的受力图

由于杆在 A、D 光滑面接触处约束力沿其公法线方向，因此，在 D 处约束力垂直于杆的表面；在 A 处约束力垂直于与杆接触的约束表面；在 E 处柔性约束的约束力应沿柔体的方向，为拉力，于是杆的受力图如图 1-1(b)所示。

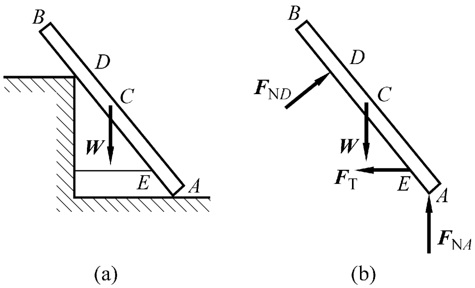

图 1-1　例 1-1 图

例 1-2 平面承重支架如图 1-2(a)所示，在 C 点上作用荷载 $\boldsymbol{F}$，若不计各杆件的重力，试分别画出杆 AC 和 BD 的受力图。

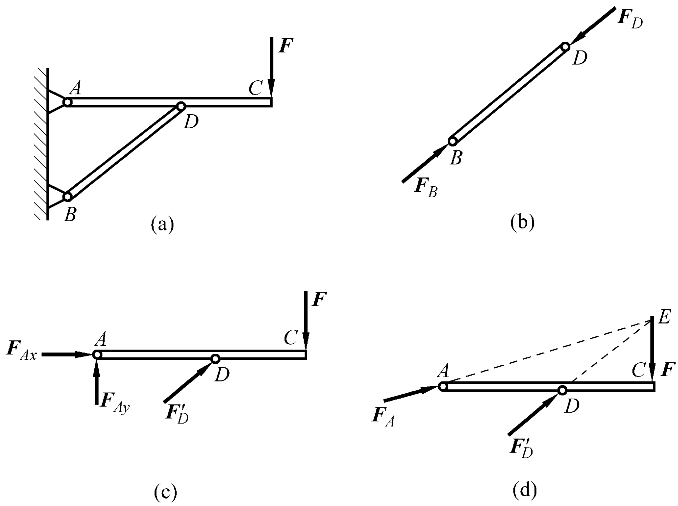

图 1-2 例 1-2 图

解 (1) 分析约束类型

该承重支架由 AC、BD 两杆组成，A、B 处为固定铰链支座，D 处为一圆柱铰链。严格按约束的类型，确定约束力。

(2) 分析杆 BD

在不计自重的情况下，BD 杆仅在 B、D 两处受力，BD 杆又处于平衡状态，因此，BD 杆为二力构件(即二力杆)，所以 B、D 两端的受力一定沿着 B、D 的连线方向。受力分析结果如图 1-2(b)所示，而且 B 点和 D 点的约束力 $\boldsymbol{F}_B$ 和 $\boldsymbol{F}_D$ 满足以下关系：$\boldsymbol{F}_D = -\boldsymbol{F}_B$。

(3) 分析杆 AC

杆 AC 上作用有主动力 $\boldsymbol{F}$。可用以下两种方法分析 A、D 处的约束力。

方法一 因为 AC 上点 D 的约束力与 BD 上点 D 的约束力是一对作用与反作用力，所以两力大小相等、方向相反且沿同一作用线。用 $\boldsymbol{F}'_D$ 表示 $\boldsymbol{F}_D$ 的反作用力。杆 AC 上的 A 处约束是固定铰支座，其约束力用一对正交分量来表示。受力分析结果如图 1-2(c)所示。

方法二 在不计重力的情况下，AC 杆仅在 A、D、C 三处受力，AC 杆又处于平衡状态，而 D、C 处的作用力方向已知，其作用线交于点 E。由三力平衡条件可知，A 处约束力的作用线必过 E 点。受力分析结果如图 1-2(d)所示。

(4) 讨论

- 比较分析杆 AC 受力情况时的两种解法可知，在第二种解法中，绘制受力图时考虑了二力平衡条件(二力杆)和三力平衡汇交定理，从而使受力图更为简洁、准确，也便于用几何法求解平衡问题。但是，若用解析法求解平衡问题，第二种受力分析的结果并不能带来方便。
- 在不计自重的情况下，凡满足仅在两处受力且处于平衡状态的构件，不论其形状如何都是二力构件，所以此题中的 BD 杆可以是曲杆或折杆。正确分析二力构件是解决物体系统平衡的关键。

例 1-3　棘轮机构受力如图 1-3(a)所示，试分别画出棘爪 AO_1 和棘轮的受力图。

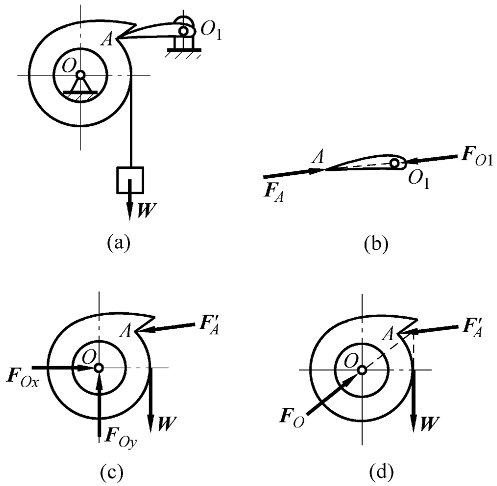

图 1-3　例 1-3 图

解　(1) 分析约束类型

棘轮在 A 处与棘爪为光滑接触约束，但接触面的法线方向无法确定；在 O 处为固定铰链支座。

(2) 分析棘爪 AO_1

由于棘轮在 A 处的约束力方向未知，故先通过对棘爪的分析来确定 A 处的约束力。在不计自重的情况下，棘爪 AO_1 仅在 A、O_1 两处受力，因此棘爪 AO_1 为二力构件，所以 A、O_1 两处的受力一定沿着 A、O_1 的连线方向。受力分析结果如图 1-3(b)所示。

(3) 分析棘轮

棘轮上作用有主动力 $\boldsymbol{W}$，A 处的约束力与棘爪 AO_1 上点 A 的约束力是一

对作用与反作用力，所以大小相等、方向相反且沿同一作用线，用 $\boldsymbol{F}'_A$ 表示 $\boldsymbol{F}_A$ 的反作用力；O 处约束是固定铰支座，其约束力可用一对正交分量来表示（图 1-3(c)），也可由三力平衡条件来确定（图 1-3(d)）。

例 1-4 系统受力如图 1-4(a)所示，试画出系统整体及每个标注字符处的受力图，并分析铰链 C 处的受力情况。题中未画重力的物体自重均不计。

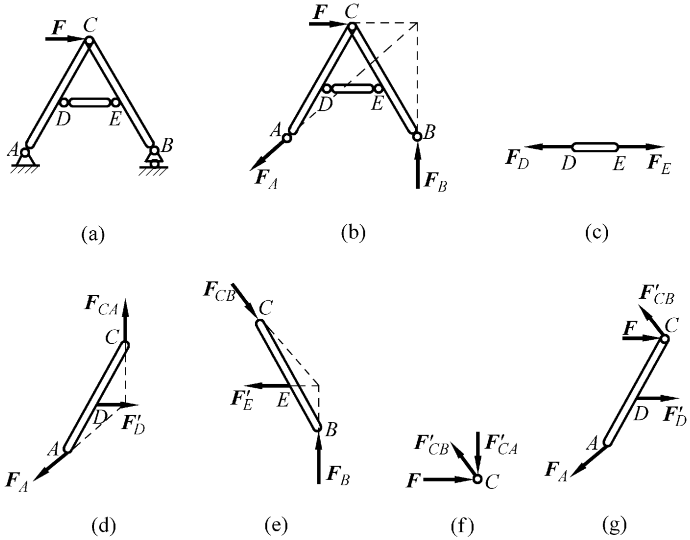

图 1-4 例 1-4 图

解 (1) 分析约束类型

结构由 AC、BC 和 DE 三杆组成，A 处为固定铰链支座，B 处为活动铰链支座，C、D、E 处为圆柱铰链。

(2) 分析系统整体

系统整体在 A、B、C 处受三个力作用，应满足三力平衡条件。B 处的约束力 $\boldsymbol{F}_B$ 垂直于支承面，C 处作用有水平的主动力 $\boldsymbol{F}$，则 A 处约束力的作用线应交于力 $\boldsymbol{F}_B$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的汇交点，其受力如图 1-4(b)所示。

(3) 分析杆 DE

在不计自重的情况下，杆 DE 仅在 D、E 两处受力，因此，杆 DE 为二力杆，D、E 两端的受力一定沿着 D、E 的连线。受力如图 1-4(c)所示。

(4) 分析杆 AC

在不计重力的情况下，杆 AC 仅在 A、D、C 三处受力，杆 AC 又处于平衡状态，而 A、D 处的作用力方向已知，由三力平衡汇交定理可知，C 处约束力的

作用线必与力 $\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}'_D$ 的作用线交于一点。受力分析结果如图 1-4(d)所示。

(5) 分析杆 BC

与杆 AC 的分析相类似，杆 BC 仅在 B、E、C 三处受力，则 C 处约束力的作用线必与力 $\boldsymbol{F}_B$、$\boldsymbol{F}'_E$ 的作用线交于一点。受力分析结果如图 1-4(e)所示。

(6) 讨论

- 杆 DE 与杆 AC 和杆 BC 在 D、E 处的约束力为一对作用与反作用力，$\boldsymbol{F}_D$ 与 $\boldsymbol{F}'_D$ 以及 $\boldsymbol{F}_E$ 与 $\boldsymbol{F}'_E$ 大小相等，方向相反，作用线相同。
- 杆 AC 和杆 BC 在 C 处的约束力 $\boldsymbol{F}_{CA}$、$\boldsymbol{F}_{CB}$ 不是作用与反作用力，因为在铰链 C 上还作用有主动力 $\boldsymbol{F}$，分析铰链 C，力 $\boldsymbol{F}'_{CA}$、$\boldsymbol{F}'_{CB}$ 分别为杆 AC 和杆 BC 对铰链 C 的作用，受力分析结果如图 1-4(f)所示。
- 在进行受力分析时，要明确研究对象，尤其是当铰链上作用有三个以上的力时。如：将杆 AC 和铰链 C 作为研究对象，则受力如图 1-4(g)所示，此时作用在 C 处的力 $\boldsymbol{F}'_{CB}$ 与杆 BC 上的力 $\boldsymbol{F}_{CB}$ 便是一对作用与反作用力。

理论要点

1. 力对点之矩与力对轴之矩

(1) 力对点之矩

力对刚体既能产生移动效果,也能产生转动效果。力对点之矩即为力使刚体绕该点转动效果的度量。力矩是矢量,作用在刚体上的力 $\boldsymbol{F}$ 对刚体上任意一点 O 之矩为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为力矩中心 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 作用点的位矢。

在平面力系问题中,力矩矢量垂直于力系所在平面,这时,力矩也可以用代数量表示。于是,作用在刚体上的力 $\boldsymbol{F}$ 对刚体上任意一点 O 之矩为

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fh$$

其中 $M_O(\boldsymbol{F})$表示力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩的大小;h 为力矩中心 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 作用线的垂直距离,称为力臂。力矩的正负由力使刚体绕力矩中心转动方向而定。通常规定使刚体绕力矩中心逆时针方向转动的力矩为正,反之为负。

(2) 力对轴之矩

空间力系中力对刚体的转动效果用力对轴之矩度量。

力对轴之矩等于力在垂直于轴的平面上的投影对该轴之矩,如力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴之矩为

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_{Oz}(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}d$$

力对轴之矩为代数量,其大小等于力在垂直于轴的平面上的投影 F_{xy} 与其作用线到轴之间垂直距离 d 的乘积。转向的正负按照右手定则确定:右手握拳,四指代表力对轴之矩转动方向,若拇指所指方向与坐标轴正方向一致,力矩为正,反之为负。

若力与轴平行或相交,则力对该轴之矩为零。

确定力对轴之矩的方法如下:可以先确定力在 3 个坐标轴上的投影,然后分别确定各个投影对各轴之矩,将各投影对同一轴的力矩取其代数和即得力对该轴之矩。

(3) 力对点之矩与力对轴之矩的关系

力对已知点之矩的矢量在通过这一点的任意轴上的投影等于这个力对于该轴之矩。即

$$\begin{cases}[\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_{Ox} = M_x(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_{Oy} = M_y(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_{Oz} = M_z(\boldsymbol{F})\end{cases}$$

(4) 合力矩定理

合力对某一点之矩，等于力系中所有力对同一点之矩的矢量和，此即合力矩定理。

需要指出的是，对于力对轴之矩，合力矩定理可表述为：合力对某一轴之矩，等于力系中所有力对同一轴之矩的代数和。

2. 力偶的概念及其性质

(1) 力偶的概念

大小相等、方向相反、作用线平行而不重合的两个力所组成的特殊力系称为力偶。记作$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$，且 $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}'$。

力偶对刚体只产生转动效果而不产生移动效果。

力偶不能合成为一个力，因此，力偶也不能与一个力等效，力偶只能与力偶等效。

当刚体受力偶作用时，力偶对刚体的转动效果用力偶矩度量。力偶中的两个力对任一点之矩的矢量和等于力偶矩，因此力偶矩是矢量，用 $\boldsymbol{M}$ 表示：

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}')$$

即力偶对任一点之矩恒等于力偶矩，与力矩中心 O 位置无关。

力偶矩矢量的模

$$|\boldsymbol{M}| = Fh$$

其中 h 称为力偶臂，它为两个力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$作用线之间的垂直距离。

与力矩相似，在平面力系问题中，力偶矩也可以表示为代数量，其正负号规定与力矩相同。

(2) 力偶的性质

① 只要保持力偶矩的大小和转向不变，力偶可以在其作用平面内任意移动，或者改变力与力偶臂的大小，其对刚体的作用效果不发生改变。或者说，处于同一平面内的两个力偶，只要其力偶矩相等，则它们对刚体的作用是等效的。

根据这一性质，同一平面内的力偶对刚体的作用效果取决于力偶矩的大小及转向，而与每一个力的大小、方向以及力偶作用的位置无关。

这样，在处理与力偶有关的问题时，就不必计较力偶在平面内的作用位置，也不必计较组成力偶的各个力的大小和方向，以及力偶臂的大小，只需考