

绪 论

若以 1785 年库仑定律的提出作为电磁场定量分析的开始,电磁场理论的发展和应用至今也只有 220 年的历史。然而,正是它开创了人类生活的电气时代,并直接导致当前信息时代的到来。人们享受着随时可与千里之外亲友交谈及从互联网上快速获取全球信息的充分便利。图 1 所示就是这些信息的传输方式。它包括:无线(移动)通信、卫星通信和光纤通信等。这些都是依靠电磁波(包括光波)来完成。

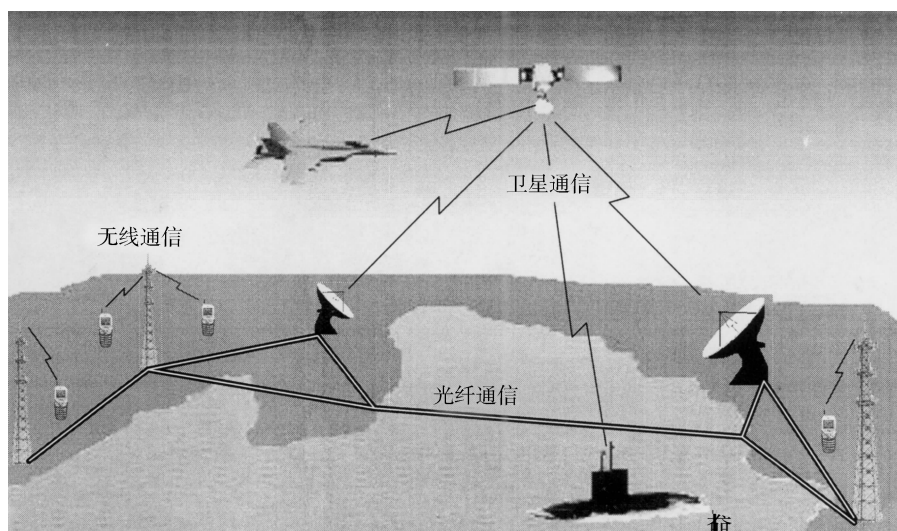


图 1 通信传输方式

不但通信,其他现代电子信息技术如广播、电视、雷达、导航、遥感、测控、射电天文和电子对抗等,都离不开电磁波的发射、控制、传输和接收。而从家用电器、工业自动化到天气预报,从电力、交通、食品、轻纺、探矿等工业与医疗卫生事业到农业和国防,无不涉及电磁场理论的应用。从学科上看,电磁学与很多学科紧密相关。如图 2 所示,它所服务的前、后邻正是通信、雷达等现代电子信息技术和微电子技术学科,而它的左、右邻则是电力和光学学科。电磁学一直是,将来仍然是交叉学科和新学科的孕育点。并且,它对培育创新精神、严谨的科学学风和科学的方法论等,都起着至关重要的作用。因此,我国和世界先进国家一样,各高等学校都把电磁场基列列为电子信息类本科生必修的专业基课程。

除可见光外,一般来说电磁场是看不见,但却是客观存在的。我们不但可用仪表测它,而且已能随时感受到它的存在。例如,我们拧开收音机就能听到电台的广播,打开微波炉就能把冷饭烧热,等等。在科学上,为了描述电磁场的强弱和特性,引入了电场强度和磁场强度等场量。它们是我们研究的主要参量,正如电路理论中的电压、电流一样。由于电

磁场是分布于空间的,这些场量都是空间分布量,即都是三维空间的点函数,而且是矢量,有三个坐标分量。为了反映矢量场的分布特性,又引入了“倒三角” ∇ 运算。对于时变场,它还是时间的函数。因此,有人称电磁场课“四难”(“难学、难考、难用”)。其实,这只是表明,正是这类课是最值得在大学学习的(容易的课程通过自学就能掌握了;另一方面,这是专业基础课,与专业课相比,其应用面和时效性都要大得多,因而也更需要学)。同时也表明,它是需用心学的。为此,“What is the most important in learning any subject is to take interest in it.”(阿尔伯特·爱因斯坦语:学习任何学科,最重要就是要对它发生兴趣)。自然,也要更需用心(爱心、专心、虚心)。

前言中提到本书的一些努力也首先是为了提高同学们的学习兴趣。在具体学习方法上,这里只想提两点:基本公式及其概念一定要记住,例如,麦克斯韦方程组及其意义,边界条件等;还要独立作题。至于复杂的公式,如亥耳公式等,并不必背下来,因为需要时是可以查书的。

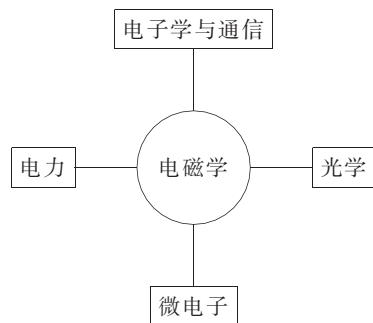


图 2 电磁学与其他学科的联系

愿本书为读者进入奇妙缤纷的电磁场世界打开希望之门!

第 1 章

矢 量 分 析

电场和磁场都是矢量场,因此矢量分析是研究电磁场特性的基本数学工具之一。本章将系统地学习有关矢量分析的基本知识,重点是讨论矢量场的散度、旋度和标量场的梯度及相关的重要定理,主要是散度定理、斯托克斯定理和亥姆霍兹定理。工欲善其事,必先利其器。掌握矢量分析工具将为学习本课程奠定必要的基础。

§ 1.1 矢量代数

1.1.1 矢量表示法与和差运算

各种物理量可分为标量与矢量两大类。只有大小特征的量称为标量,如温度、能量、电位等。既有大小又有方向特征的量称为矢量,如力、速度、电场强度等。本书中在字母符号上加短横线来表示矢量,如 $\vec{A}$ 、 $\vec{B}$, 以示与其模(标量) A 、 B 区别。模为 1 的矢量称为单位矢量,由字母上加“ $\hat{\cdot}$ ”来表示,如 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$, 它们分别表示直角坐标系中 x 、 y 、 z 方向单位矢量。

在直角坐标系中,矢量 $\vec{A}$ 可表示为

$$\vec{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \quad (1.1-1)$$

A_x 、 A_y 、 A_z 是矢量 $\vec{A}$ 在三个相互垂直的坐标轴上的分量模,如图 1.1-1 所示。该矢量的模为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.1-2)$$

$\vec{A}$ 的单位矢量为

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{x} \frac{A_x}{A} + \hat{y} \frac{A_y}{A} + \hat{z} \frac{A_z}{A} = \hat{x} \cos \alpha + \hat{y} \cos \beta + \hat{z} \cos \gamma \quad (1.1-3)$$

式中 α 、 β 、 γ 分别是 $\vec{A}$ 与 x 、 y 、 z 轴正向的夹角。由图 1.1-1 不难看出, $A_z = A \cos \gamma$, 并有 $A_x = A \cos \alpha$, $A_y = A \cos \beta$ 。 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 称为 $\vec{A}$ 的方向余弦, 它们决定了 $\vec{A}$ 的方向。由式(1.1-3)还可看出方向余弦的一个性质:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.1-4)$$

两个矢量的和差运算在几何上可由“平行四边形”法则作图得出; 在代数上, 两个矢量的和或差可由其对应分量相加或相减来算。设

$$\vec{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z \quad (1.1-5)$$

则

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \hat{x}(A_x \pm B_x) + \hat{y}(A_y \pm B_y) + \hat{z}(A_z \pm B_z) \quad (1.1-6)$$

1.1.2 标量积和矢量积

矢量的乘法有两种定义, 依相乘结果为标量或矢量而分别称为标量积(点乘)和矢量积(叉乘)。标量积 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 是一标量, 其大小等于两个矢量模值相乘, 再乘以它们间的夹角 α_{AB} (取小角, 即 $\alpha_{AB} \leq \pi$) 的余弦:

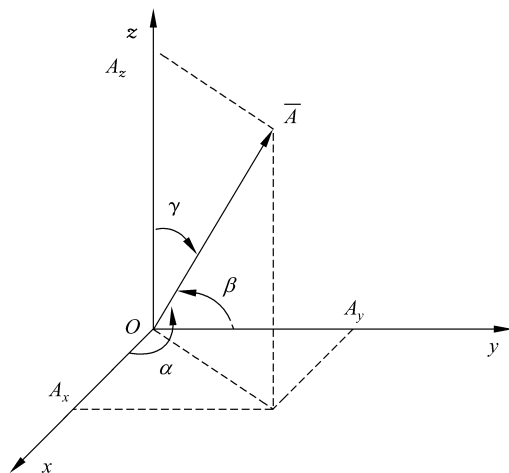


图 1.1-1 直角坐标系中矢量的分解

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cos \alpha_{AB} \quad (1.1-7)$$

它就是一个矢量模(A)与另一矢量在该矢量上投影($B \cos \alpha_{AB}$)乘积,如图 1.1-2 所示。力学中若 $\bar{B}$ 代表力, $\bar{A}$ 代表在 $\bar{B}$ 作用下物体(O点处)位移,则该力对位移 $\bar{A}$ 所做功就由 $\bar{A} \cdot \bar{B}$ 算出。

标量积不交换率:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A} \quad (1.1-8)$$

由于三个坐标轴相互垂直,因而有

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0 \quad (1.1-9)$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad (1.1-10)$$

将 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 用各自分量展开,逐项点乘后利用上述关系得

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \cdot (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (1.1-11)$$

并有

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \quad (1.1-12)$$

矢量积 $\bar{A} \times \bar{B}$ 是一个矢量,其大小等于两个矢量模值相乘,再乘以它们间夹角 $\alpha_{AB} (\leq \pi)$ 的正弦,其方向与 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 成右手螺旋关系,为 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 所在平面右手法向 $\hat{n}$:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \hat{n}AB \sin \alpha_{AB} \quad (1.1-13)$$

参看图 1.1-2,设 $\bar{A}$ 端点处有一与 $\bar{B}$ 平行力 $\bar{B}'$,若 $\bar{A}$ 代表以 O 点为支点杠杆长度,则使杠杆绕 O 点以 $\hat{n}$ 为轴旋转力矩就是 $\bar{M} = \bar{A} \times \bar{B}'$ 。显然,当 $\bar{B}'$ 与 $\bar{A}$ 相垂直时该力矩最大。

由定义式可知, $\bar{A} \times \bar{B}$ 不交换率:

$$\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A} \quad (1.1-14)$$

由于 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ 成右手螺旋关系,故有

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad (1.1-15)$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = 0 \quad (1.1-16)$$

将 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 用各自分量展开,逐项叉乘后利用上述关系可得

$$\begin{aligned} \bar{A} \times \bar{B} &= (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \times (\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z) \\ &= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x) \end{aligned} \quad (1.1-17)$$

$\bar{A} \times \bar{B}$ 各分量下标次序具有 $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ 顺序的规律性。例如, $\hat{x}$ 分量第一项下标是 y 、 z ,其第二项下标次序则对调: z 、 y ,以此类推。 $\bar{A} \times \bar{B}$ 可用各分量的行列式来表示:

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1-18)$$

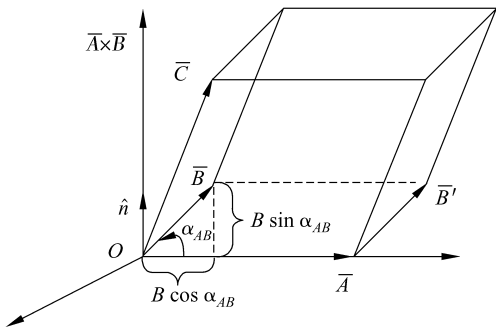


图 1.1-2 矢量乘积说明

1.1.3 三重积

矢量三连乘也有两种情形,其结果分别为标量和矢量。标量三重积为

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A}) = \bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) \quad (1.1-19)$$

参看图 1.1-2, $\bar{A} \times \bar{B}$ 的模就是 $\bar{A}$ 、 $\bar{B}$ 所形成的平行四边形的面积, 因此 $\bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})$ 就是该平行四边形与 $\bar{C}$ 所构成的平行六面体的体积。不难看出, $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$ 和 $\bar{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A})$ 也都等于该六面体体积, 因而相互相等。

矢量三重积有下述重要关系:

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B}) \quad (1.1-20)$$

由于 $(\bar{B} \times \bar{C})$ 垂直于 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ 所组成的平面, $\bar{A}$ 与它叉乘必位于该面内, 因而 $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$ 可用沿 $\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ 方向的两个分量表示。将左边和右边分别用分量式展开, 可证明此式成立(作为思考题)。公式右边为 BAC-CAB, 故称为 Back-cab(返程车)法则, 以便记忆。

例 1.1-1 已知三角形两边长度 a 、 b 及其夹角 α , 请用矢量运算确定其第三边长度 c 。

[解] 取三角形坐标如图 1.1-3 所示, 则 $\bar{a} = \hat{x}a$, $\bar{b} = \hat{x}b\cos\alpha + \hat{y}b\sin\alpha$, 得

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \hat{x}(a - b\cos\alpha) - \hat{y}b\sin\alpha$$

故 $c^2 = (a - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

此即三角形余弦定理。

例 1.1-2 设 $\bar{A} = \hat{x}3 + \hat{y}4 + \hat{z}$, $\bar{B} = \hat{x}a + \hat{y}b$, 为使 $\bar{B} \perp \bar{A}$, 且 $\bar{B}$ 的模 $B=1$, 求 a 、 b 。

[解] 因 $\bar{B} \perp \bar{A}$, 有 $\bar{A} \cdot \bar{B} = 0$, 得

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 3a + 4b = 0, \quad b = -\frac{3}{4}a$$

又因 $B=1$, 得

$$B^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \frac{9}{16}a^2 = \frac{25}{16}a^2 = 1, \quad a = \pm \frac{4}{5}$$

故有两组解: $a = \frac{4}{5}, b = -\frac{3}{5}; \quad a = -\frac{4}{5}, b = \frac{3}{5}$ 。

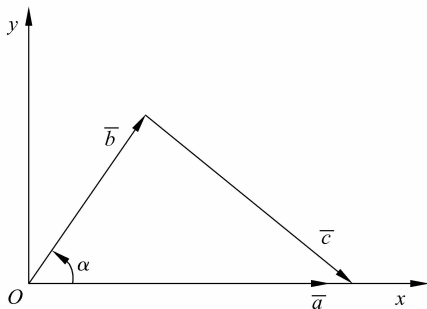


图 1.1-3 三角形余弦定理的证明

§ 1.2 矢量场的通量与散度, 散度定理

1.2.1 矢量场的通量

我们今后研究的电磁场矢量一般都是随空间位置 (x, y, z) 而变的矢量函数。如果在某空间区域上, 矢量 $\bar{A}$ 在每点都有一确定值, 我们就说该空域上存在一矢量场, $\bar{A}$ 称为场量。同理, 标量 ϕ 的空间分布就构成标量场, ϕ 也是一场量。若场量随时间变化, 称之为时变场, 而不随时间变化的场称为静态场。

下面开始研究对矢量场的分析, 这些属于矢量场的“场论”的基本内容。首先研究矢量场穿过一个曲面的通量。

参看图 1.2-1, 曲面 s 位于矢量场 $\bar{A}$ 中, 图中曲线是矢量场 $\bar{A}$ 的矢量线, 该线上任一点处曲线的切线方向就是矢量场 $\bar{A}$ 在该点的方向。取曲面的一个面元 $d\bar{s}$, 因面元很小, 其上各点矢量场 $\bar{A}$ 可视为是相同的, $\bar{A}$ 和 $d\bar{s}$ 的标量积 $\bar{A} \cdot d\bar{s}$ 便称为 $\bar{A}$ 穿过 $d\bar{s}$ 的通量。例如在水流的速度场 $\bar{v}$ (米/秒) 中, $\bar{v} \cdot d\bar{s}$ (米³/秒) 就是单位时间内通过 $d\bar{s}$ 的水流量。 $d\bar{s} = \hat{n} ds$ 为有向面元, ds 为面元大小, $\hat{n}$ 为面元的法线方向单位矢量。对封闭曲面, $\hat{n}$ 取为曲面的外法线方向; 对开曲面的面元, $\hat{n}$ 的指向规定如下: 沿包围该面元的曲线 l , 按选定方向绕行时, 其右手螺旋的拇指方向就是 $\hat{n}$ 的方向。这就是说, 沿 l 按所选方向绕行时, 所包围面积总在其左侧。

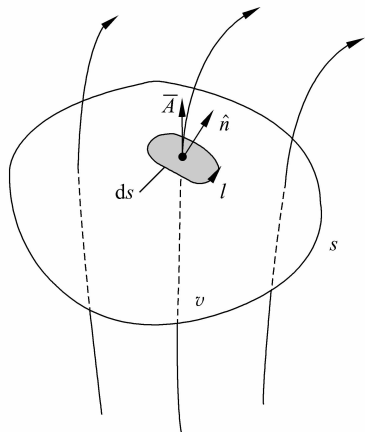


图 1.2-1 矢量场的通量

将曲面 s 各面元上 $\bar{A} \cdot d\bar{s}$ 相加, 也就是对矢量 $\bar{A}$ 在曲面 s 上作面积分, 它表示 $\bar{A}$ 穿过整个曲面 s 的通量:

$$\Psi = \int_s \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_s \bar{A} \cdot \hat{n} ds \quad (1.2-1)$$

如果 s 是一个封闭曲面, 则

$$\Psi = \oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

表示 $\bar{A}$ 穿过封闭曲面的通量。若 $\Psi > 0$, 表示有净通量流出, 这说明 s 内必定有矢量场的源; 若 $\Psi < 0$, 表示有净通量流入, 说明 s 内有洞 (负源)。在“大学物理”中我们已知, 通过封闭曲面 s 的电通量 Ψ_e 等于该封闭面所包围的自由电荷电量 Q :

$$\Psi_e = \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q \quad (1.2-2)$$

式中 $\bar{D}$ 为电通(量)密度。若 Q 为正电荷, Ψ_e 为正, 有电通量流出, 反之, Q 为负电荷, 则 Ψ_e 为负, 有电通量流入。

1.2.2 散度的定义与运算

通量反映了封闭面中源的总特性, 但它没有反映源的分布特性。使包围某点的封闭面向该点无限收缩, 则可表示该点处的源特性。为此, 定义如下极限为矢量 $\bar{A}$ 在某点的散度 (divergence), 记为 $\text{div} \bar{A}$:

$$\text{div} \bar{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s}}{\Delta v} \quad (1.2-3)$$

式中 Δv 为封闭面 s 所包围的体积。此式表明, 矢量 $\bar{A}$ 的散度是标量, 它是 $\bar{A}$ 通过某点处单位体积的通量, 即通量体密度 $\left(\frac{d\Psi}{dv}\right)$ 。

$\bar{A}$ 在某点的散度的意义是, 它反映了该点的通量源强度。若 $\text{div} \bar{A} > 0$, 表示该点有

通量流出,说明该点有通量源(正源);若 $\operatorname{div} \bar{A} < 0$, 该点有通量流入,则该点有洞(负源);若 $\operatorname{div} \bar{A} = 0$, 则该处无源。在无源区中, $\bar{A}$ 在各点的散度为零。这个区域中的矢量场称为无散场或无源场。图 1.2-2 示出一对正负点电荷系统(电偶极子)的电场强度 $\bar{E}$ 的矢量线(简称电场线或电力线)。可见, A 点 $\operatorname{div} \bar{E} > 0$, 该点有正源 $+q$; B 点 $\operatorname{div} \bar{E} < 0$, 该点有负源 $-q$; C 点 $\operatorname{div} \bar{E} = 0$, 该处无源, $\bar{E}$ 为无源场。

在学习了散度的定义和意义后,我们来研究散度的运算。由 §1.1 节知,矢量运算最后都归结于得其三个坐标分量(标量)。下面就来导出 $\operatorname{div} \bar{A}$ 的三个直角坐标分量。

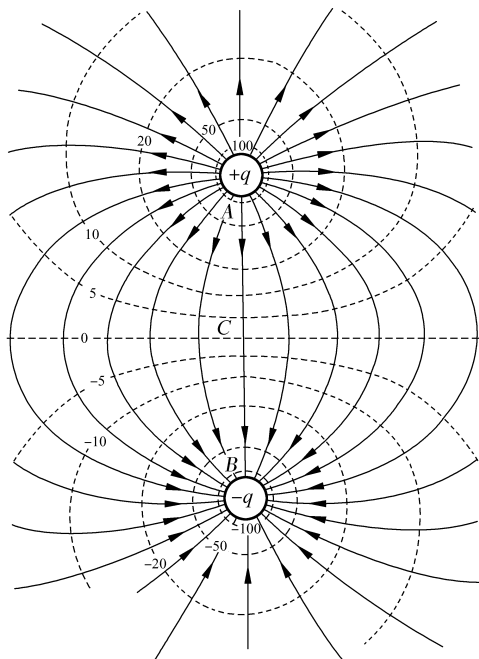


图 1.2-2 电偶极子的电力线(实线)与等位线(虚线)

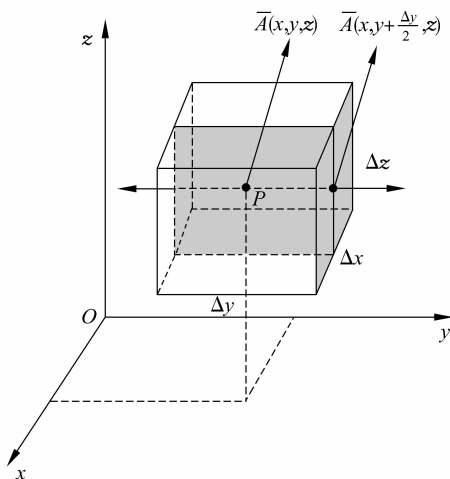


图 1.2-3 $\operatorname{div} \bar{A}$ 直角坐标表示式的推导

如图 1.2-3 所示,包围观察点 $P(x, y, z)$ 作一个很小的直角六面体,三个坐标方向边长分别为 Δx 、 Δy 、 Δz , P 点位于中心,即每边中线交点。根据式(1.2-3),需求矢量 $\bar{A}$ 穿过该六面体各个面的通量。先求穿过右面向外流的通量:

$$\Delta \Psi_r = \bar{A} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \cdot \hat{y} \Delta x \Delta z = A_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) \Delta x \Delta z$$

这里取右面中心点 $\left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right)$ 处 A_y 值作为 A_y 在整个面上平均,它可展开为 (x, y, z) 点处泰勒级数(Brook Taylor, 英)级数:

$$A_y \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right) = A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^2 + \dots$$

右边 A_y 均指观察点处值 $A_y(x, y, z)$, 为简见不再标出坐标。从而得

$$\Delta \Psi_r = \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} + \dots \right) \Delta x \Delta z$$

上式中含 $(\Delta y)^2$ 以上的高阶项都不再详细列。同理,穿过左面向外流 $\Delta y \Delta z$ 通量为

$$\Delta \Psi_l = \bar{A} \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z \right) \cdot (-\hat{y}) \Delta x \Delta z = - \left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{2} + \dots \right) \Delta x \Delta z$$

故穿过左右两面 $\Delta y \Delta z$ 通量为

$$\Delta \Psi_{rl} = \Delta \Psi_r + \Delta \Psi_l = \frac{\partial A_y}{\partial y} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \dots$$

可见它取决于矢量 $\bar{A}$ 的 y 向分量沿 y 向的变化率。

对前后两面和上下两面同样处理,得

$$\Delta \Psi_{fb} = \frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \dots$$

$$\Delta \Psi_{ud} = \frac{\partial A_z}{\partial z} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \dots$$

因此,矢量 $\bar{A}$ 穿过六面体 Δv 的总通量是

$$\oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \cdot \Delta x \Delta y \Delta z + \dots$$

该六面体体积 $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$, 当 $\Delta v \rightarrow 0$ 时上式右边高阶项都趋于零。故得

$$\operatorname{div} \bar{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s}}{\Delta v} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.2-4)$$

此式表明, $\bar{A}$ 的散度是 $\bar{A}$ 的三维方向上各分量沿各自方向变化率之和。可见这个量对应于标量场的导数,它是由一维推广为三维空间导数。

哈密顿(W. R. Hamilton, 英)引入倒三角算符(读作 del(德尔)或 nabla(那勃拉))表示下述矢量形式的微分算子:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.2-5)$$

它兼有矢量和微分运算双重功能,当作用于某矢量场时,先按矢量规则展开,再作微分运算。故有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{A} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2-6)$$

比较式(1.2-4)与式(1.2-6)知:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \nabla \cdot \bar{A} \quad (1.2-7)$$

在矢量分析中,习惯上就用 $\nabla \cdot \bar{A}$ 来代表散度 $\operatorname{div} \bar{A}$ 。在其他正交坐标系中也用 $\nabla \cdot \bar{A}$ 表示 $\bar{A}$ 的散度,这已成为一个符号。不同坐标系的分量表示式需另外推导,见 § 1.6 节。

值得说明的是,由于 ∇ 兼有微分功能,它与普通矢量有所不同:

$$\nabla \cdot \bar{A} \neq \bar{A} \cdot \nabla; \quad \nabla \times \bar{A} \neq -\bar{A} \times \nabla$$

散度运算具有下列规则:

$$\nabla \cdot (\bar{A} \pm \bar{B}) = \nabla \cdot \bar{A} \pm \nabla \cdot \bar{B} \quad (1.2-8)$$

$$\nabla \cdot (\phi \bar{A}) = \phi \nabla \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla \phi \quad (1.2-9)$$

式中

$$\nabla \phi = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \hat{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.2-10)$$

利用哈密顿算子,将矢量展开,便可证明式(1.2-9):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \bar{A}) &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} \phi A_x + \hat{y} \phi A_y + \hat{z} \phi A_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z) \\ &= \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \phi \nabla \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \nabla \phi \end{aligned}$$

1.2.3 散度定理

虽然矢量场在某点的散度代表的是该处其通量体密度,因此直观地可知,矢量场散度的体积分等于该矢量场通过包围该体积的闭面总通量,即

$$\int_v \nabla \cdot \bar{A} dv = \oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s} \quad (1.2-11)$$

上式称为散度定理,也称为高斯散度公式。利用散度定理可将矢量散度的体积分化为该矢量的闭面积分,或反之。从物理上说,散度定理建立了某空域中的场与包围该空域的边界场之间的关系。下面对此定理作一简要证明。

如图 1.2-4 所示,将闭面 s 所包围的体积 v 细分为 N 个微分体积元 $\Delta v_i, \Delta v_j \dots$ 。由散度定义知,对体积元 Δv_i

$$(\nabla \cdot \bar{A})_i \Delta v_i = \oint_{s_i} \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

s_i 是包围 Δv_i 的闭面。对整个体积 v 有

$$\int_v \nabla \cdot \bar{A} dv = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N (\nabla \cdot \bar{A})_i \cdot \Delta v_i \right] = \lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N \oint_{s_i} \bar{A} \cdot d\bar{s} \right]$$

上式右边闭面积分求和时,相邻单元 Δv_i 与 Δv_j 公共面上 $\bar{A}$ 相同,但面元方向相反: $\hat{n}_i = -\hat{n}_j$, 故二者面积分相消。这样,只有包围体积 v 的外表面积分没有抵消(见图 1.2-4)。因而

$$\lim_{\Delta v_i \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^N \oint_{s_i} \bar{A} \cdot d\bar{s} \right] = \oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s}$$

结合上两式便有式(1.2-11),得证。