第 1 章

约束关系模型

在20世纪70年代初，E. F. Codd的一系列论文开创了关系数据库理论。这些理论在关系数据库的应用中发挥了巨大的作用。20世纪后期，它的应用更是扩展到了很多其他领域。应用范围的扩大及数据库自身的发展都使这些早期的理论(一般称为经典关系数据库理论)需要进一步推广与改革。近年来，这些推广与改革取得了丰硕的成果，人们将这些新成果称为非经典关系数据库理论。在本章，我们将首先研究一种非经典的约束关系模型。

1.1 二元约束关系

众所周知，在经典关系理论中，函数依赖、多值依赖、连接依赖、元组产生依赖、等值产生依赖等起到了重要的作用，而实际上，它们都是加在数据库上的一些约束。另一方面，查询中数据应满足的条件实际也是加在查询结果上的约束。随着关系数据库使用的深入，人们发现还有一种非常广泛地出现在各种实际问题中的、既可以加在原始数据库上又可以加在查询结果上的“二元关系约束”。这种二元关系约束是在两个属性的值域间给定了一个(些)二元关系，每个元组在这两个属性上都只能取这个(些)二元关系中的值。例如，在一个毕

业生档案的数据库中，由于毕业生就业是双向选择，所以在属性“姓名”及属性“就业单位”的值域间就存在着两个二元关系约束，一个由学生填写的“志愿表”组成，另一个由各单位填写的“可接收学生表”组成。分别如以下两表所示：

姓名	单　位
张强	中心医院
张强	康复医院
张强	人民医院
李晓	人民医院
李晓	铁路医院
⋮	

单　位	姓名
中心医院	王丽
中心医院	赵晶
中心医院	张强
中心医院	孙胜
邮电医院	赵晶
⋮	

再如在一个 α 无回路数据库 $\Omega=\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ 中，$R_1=\{$SUPPLIER，COST，PART$\}$，$R_2=\{$PROJECT，COUNT，PART$\}$，$R_3=\{$PROJECT，DATE，SUPPLIER$\}$，$R_4=\{$PROJECT，SUPPLIER，PART$\}$。这里，在 SUPPLIER 与 PART 的数据域之间可能存在某个供应商只供应某些部件的二元约束关系（由产品手册组成）。在 PROJECT 与 PART 的数据域之间可能存在某个工程需要某些部件的二元约束关系（由工程设计清单组成）。在 SUPPLIER 与 PROJECT 的数据域之间可能存在某个供应商愿意向某些工程供应部件的二元约束关系，以及 PROJECT 与 SUPPLIER 的数据域之间可能存在某个工程希望从某些供应商那里购买部件的二元约束关系。再如有时还可能是一些抽象的二元约束关系，例如在库存管理的数据库中，在属性“生产日期”与属性“销售日期”的数据域之间就有“小于”这样一个约束关系。这个二元关系虽然不需要像前面给出的“姓名”与“单位”之间的二元关系那样全部写出来，但这个二元关系确实是存在的。在两个表示时间区段的属性的数据域之间还可能有图 1.1 所示的多种二元约束关系。

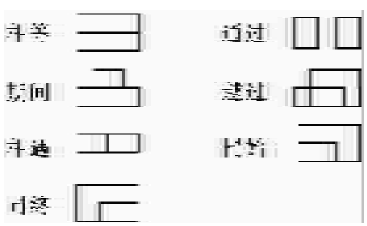

图 1.1　时间区段的二元关系

这些二元关系的约束是普遍存在的，但却是经典关系数据库理论中的各种“依赖”都未涉及的。因此为了更好、更优化地对存在着二元关系约束的数据库进行查询、输入、修改等操作，就必须对二元约束关系集合的包含问题、等价问题、极小化问题及其他各种有关问题也认真地进行研究。这里，包含问题是指如何判定一个

二元关系约束集合 s_1 是否包含另一个二元关系约束的集合 s_2，即如何判定是否适合 s_1 的元组也都适合 s_2；等价问题是指如何判定 s_1 与 s_2 等价，即判定是否适合 s_1 的元组也适合 s_2，而且适合 s_2 的元组也适合 s_1；极小化问题是指如何将给定的二元关系约束的集合 s 极小化，即如何找出包含非平凡二元约束关系最少的与 s 等价的二元关系约束的集合。只有解决了这些问题，特别是解决了极小化问题，才能优化我们的操作。而解决这些问题的基础又是解决怎样才能知道适合二元关系约束集合的全部元组的问题。下面先给出有关概念的形式化定义，然后研讨解决这一问题的数学工具，并解决这一问题，最后给出各种应用实例。

1.1.1 形式化定义

定义 1.1 设 $R=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 是一个关系模式，属性 A_i 的数据域是 $dom(A_i)(i=1,\cdots,n)$。$r_{ij}\subseteq dom(A_i)\times dom(A_j)$ 是属性 A_i 与属性 A_j 数据域间的二元约束关系，它所产生的约束称为二元关系约束，$1\leqslant i,j\leqslant n$。若 C 是 R 上的二元约束关系的集合，$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 是 R 上的元组，当且仅当对 C 中的每一个二元约束关系 r_{ij} 都有 $\langle a_i,a_j\rangle\in r_{ij}$ 时称 $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 适合 C。称 (R,C) 为二元约束关系模型，简称约束关系模型。属性域的并集 $U=dom(A_1)\cup\cdots\cup dom(A_n)$ 称为约束关系模型的基域。基域上所有适合 C 的元组的集合称为约束 C 的解集。若 C_1,C_2 是 R 上两个二元约束关系集合，C_1 的解集是 C_2 解集的子集，则称 C_2 包含 C_1。若 C_1 与 C_2 的解集相同，则称 C_1 与 C_2 等价。 □

我们注意到，在定义 1.1 中并没有要求每一对 i,j 在属性 A_i 与 A_j 的数据域间都有约束 r_{ij}。不过，为了形式上的统一，可以认为在没有约束的属性 A_i 与 A_j 的数据域间存在着二元约束关系 $r_{ij}=dom(A_i)\times dom(A_j)$，并称它是平凡的。

另外还注意到，定义 1.1 中也没有明确限制属性 A_i,A_j 数据域间二元约束关系的个数。然而如果在属性 A_i,A_j 的数据域间存在着多个二元约束关系，例如，$r_{ij}^{(1)},\cdots,r_{ij}^{(k)}$，那么 C 的解集中的任何一个解 $\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ 就都会满足：$\langle a_i,a_j\rangle\in r_{ij}^{(1)}$，$\langle a_i,a_j\rangle\in r_{ij}^{(2)},\cdots,\langle a_i,a_j\rangle\in r_{ij}^{(k)}$，于是可用 $r_{ij}=r_{ij}^{(1)}\cap\cdots\cap r_{ij}^{(k)}$ 来代替 $r_{ij}^{(1)},\cdots,r_{ij}^{(k)}$。显然，代替后的约束集合与原来的约束集合是等价的。

最后还可以认为，在属性 A_i 与 A_i 的数据域间存在着恒等二元关系的约束，即存在着：$r_{ii}=\{\langle a,a\rangle\mid a\in dom(A_i)\}$。这样，从现在起我们就规定在关系模式 $R=\{A_1,\cdots,A_n\}$ 上的二元约束关系的集合 C 中，对每一对 $i,j,1\leqslant i,j\leqslant n$，都有而且只有一个二元约束关系 r_{ij}。

下面是一个简单的约束关系模型的例子。

$R=\{A_1,A_2,A_3\}$，$dom(A_1)=dom(A_2)=dom(A_3)=\{a,b,c,d\}$，$C=\{r_{11},r_{12},r_{13},r_{21},r_{22},r_{23},r_{31},r_{32},r_{33}\}$，

其中：$r_{11}=r_{22}=r_{33}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$，

$r_{12} = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,

$r_{13} = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$,

$r_{21} = \{\langle a,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$,

$r_{23} = \{\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$,

$r_{31} = r_{13}$,

$r_{32} = r_{23}$。

这里,C 的解集是$\{\langle b,c,d\rangle\}$。显然,在这种简单的情况下,通过经典关系理论中的自然连接

$$r_{11} \bowtie r_{12} \bowtie r_{13} \bowtie r_{21} \bowtie r_{22} \bowtie r_{23} \bowtie r_{31} \bowtie r_{32} \bowtie r_{33}$$

即可求出 C 的解集,但当数据域中的元素是无限的,而二元约束关系中包括大于、小于、期间等抽象关系时单纯自然连接就不够了,就需要对经典关系理论进行推广与改革。

1.1.2 约束关系运算

二元约束关系作为关系显然也可以对它进行关系运算。本章所关心的运算有4个。

设 r,s 是两个二元约束关系,则

(1) $r \cap s = \{\langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in r$ 且$\langle a,b\rangle \in s\}$;

(2) $r \cup s = \{\langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in r$ 或$\langle a,b\rangle \in s\}$;

(3) $r : s = \{\langle a,b\rangle \mid (\exists c)(\langle a,c\rangle \in r$ 且$\langle c,b\rangle \in s)\}$;

(4) $\tilde{r} = \{\langle a,b\rangle \mid \langle b,a\rangle \in r\}$。

这里(:)是复合运算,(~)是逆运算。

在同一层小括号中,先算~,再算 :,然后算 $\cap$,最后算 $\cup$。同层小括号中的同种运算是先左后右,例如:

$$s : r : t = (s : r) : t$$

3个特殊的二元约束关系分别用以下符号代表:① 恒等关系:$\{\langle a,b\rangle \mid a = b\}$ 用 Id 表示,② 相异关系:$\{\langle a,b\rangle \mid a \neq b\}$ 用 Di 表示,③ 空关系用 $\varnothing$ 表示。另外定义二元约束关系 r_{ij} 的左域是$\{a \mid (\exists b)(\langle a,b\rangle \in r_{ij})\}$,右域是$\{b \mid (\exists a)(\langle a,b\rangle \in r_{ij})\}$。二元约束关系 r_{ij} 的场是其左域与右域的并集。

1.1.3 约束矩阵

定义 1.2 设(R,C)是一个约束关系模型,其中 $C = \{r_{ij} \mid 0 \leqslant i,j \leqslant n-1\}$,则由 $M_{ij} = r_{ij}$,$0 \leqslant i,j \leqslant n-1$,定义的 $n \times n$ 矩阵 M 为该模型所对应的约束矩阵,并称 C 的解集也为 M 的解集。 □

显然每个约束矩阵的主对角线元素全是恒等关系,反之,每个主对角线元素全

是恒等关系(即 $M_{ii} \subseteq \mathrm{Id}$)的以二元关系为元素的 $n \times n$ 矩阵 M,一定都对应一个约束关系模型 (R,C),其中 R 包含 n 个属性。

为了与很多文献中的记号相统一,这里统一记 R 为 $\{A_0,\cdots,A_{n-1}\}$,M 的元素为 M_{ij},$0 \leqslant i,j \leqslant n-1$。

如果 M 中有一个元素 M_{ij} 是 $\varnothing$,则称 M 无解。显然,这是 M 无解的充分条件,但不是必要条件,因为有时每个 M_{ij} 全不空,但也不存在 $\langle a_0,\cdots,a_{n-1}\rangle$ 能使所有 $0 \leqslant i,j \leqslant n$ 均有 $\langle a_i,a_j\rangle \in M_{ij}$。

1.1.4 约束矩阵的运算

设 M 与 N 是两个 $n \times n$ 约束矩阵,定义约束矩阵的 3 种运算如下:

(1) 逆运算:$\widetilde{M}$

$$(\widetilde{M})_{ij} = (M_{ij})^{\sim}$$

(2) 交运算:$N \cdot M$

$$(N \cdot M)_{ij} = N_{ij} \cap M_{ij}$$

(3) 积运算:$N : M$

$$\begin{aligned}(N : M)_{ij} &= N_{i0} : M_{0j} \cap \cdots \cap N_{i(n-1)} : M_{(n-1)j} \\ &= \bigcap_{k<n} N_{ik} : M_{kj}\end{aligned}$$

积运算也称复合运算。

应注意到约束矩阵的积运算不满足结合律,请看下例:

设 $$M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & (0 \quad 1) \\ \varnothing & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & (0 \quad 2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

于是$$(M : N)_{00} = \bigcap_{k<2} (M_{0k} : N_{k0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cap (0 \quad 0) = (0 \quad 0)$$

$$(M : N)_{01} = \bigcap_{k<2} (M_{0k} : N_{k1}) = (0 \quad 2) \cap (0 \quad 1) = \varnothing$$

$$(M : N)_{10} = \bigcap_{k<2} (M_{1k} : N_{k0}) = \varnothing \cap \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \varnothing$$

$$(M : N)_{11} = \bigcap_{k<2} (M_{1k} : N_{k1}) = \varnothing \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \varnothing$$

这样，$M:N=\begin{pmatrix}(0\quad 0) & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}$，且易知$(M:N):N=\begin{pmatrix}\varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}$。

然而另一方面有

$$(N:N)_{00}=\bigcap_{k<2}(N_{0k}:N_{k0})=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2\end{bmatrix}\cap(0\quad 0)=(0\quad 0)$$

$$(N:N)_{01}=\bigcap_{k<2}(N_{0k}:N_{k1})=(0\quad 2)\cap(0\quad 2)=(0\quad 2)$$

$$(N:N)_{10}=\bigcap_{k<2}(N_{1k}:N_{k0})=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0\end{pmatrix}\cap\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$(N:N)_{11}=\bigcap_{k<2}(N_{1k}:N_{k1})=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ 2 & 2\end{pmatrix}\cap\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2\end{bmatrix}=(2\quad 2)$$

这样，$N:N=\begin{bmatrix}(0\quad 0) & (0\quad 2) \\ \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0\end{pmatrix} & (2\quad 2)\end{bmatrix}$。于是，

$$(M:(N:N))_{00}=\bigcap_{k<2}(M_{0k}:(N:N)_{k0})=(0\quad 0)\cap(0\quad 0)=(0\quad 0)$$

$$(M:(N:N))_{01}=\bigcap_{k<2}(M_{0k}:(N:N)_{k1})=(0\quad 2)\cap\varnothing=\varnothing$$

$$(M:(N:N))_{10}=\bigcap_{k<2}(M_{1k}:(N:N)_{k0})=\varnothing\cap\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0\end{pmatrix}=\varnothing$$

$$(M:(N:N))_{11}=\bigcap_{k<2}(M_{1k}:(N:N)_{k1})=\varnothing\cap(2\quad 2)=\varnothing$$

由此可知积运算不满足结合律：

$$\begin{pmatrix}\varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}=((M:N):N)\neq(M:(N:N))=\begin{pmatrix}(0\ 0) & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}$$

顺便说一下，这里M是一个无解的约束矩阵，因为它有一个元素是$\varnothing$，而N是一个有解的约束矩阵，它有一个解$\langle 0,2\rangle$。

若$N\cdot M=N$(注意到$\cdot$是交运算，所以这意味着对所有$i,j<n$都有$N_{ij}\subseteq M_{ij}$)，则称N是M的归约，并记作$N\leqslant M$，或$M\geqslant N$。如果$N\leqslant M$且$N\neq M$，则记作$N<M$，或$M>N$。容易证明这里定义的$\leqslant$是约束矩阵集合中的一个偏序，而且易于看出按这种偏序，M与N这两个约束矩阵的下确界是$M\cdot N$。

用M^2表示$M:M$，由于$:$运算不满足结合律，所以无法定义一般的M^k。不过由后面的应用来看，只定义M^2已经足够了，我们将利用M^2来确定约束的路径相容、对称等一系列重要的性质。

1.1.5 路径相容与对称

一个 $n\times n$ 约束矩阵是路径相容的，当 $M\leqslant M^2$。由这个定义我们知道 M 是路径相容的就相当于 $M_{ij}\subseteq M_{i0}:M_{0j}\cap\cdots\cap M_{i(n-1)}:M_{(n-1)j}$，于是知道在 M 路径相容时，对所有 $i,j,k<n$，$M_{ij}\subseteq M_{ik}:M_{kj}$ 都成立。在此基础上，用归纳法极易证明 M 是路径相容的，当且仅当对所有下标的有限集合：$i_1,i_2,\cdots,i_m<n$ 及下标 $j,k<n$，都有

$$M_{jk}\subseteq M_{ji_1}:M_{i_1i_2}:M_{i_2i_3}:\cdots:M_{i_{m-1}i_m}:M_{i_mk}$$

这也就是“路径相容”这个名称的由来。

对于一个任意的约束矩阵 M，显然不一定能满足 $M\leqslant M^2$，但如果 $\langle a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\rangle$ 是 M 的一个解，那么 $\langle a_i,a_j\rangle\in M_{ik}:M_{kj}$ 将是必须满足的(这里 $i,j,k<n$)，于是 $\langle a_i,a_j\rangle\in M_{ij}\cap(M_{ik}:M_{kj})$ 也就必须成立，这样则可以用 $M_{ij}\cap(M_{ik}:M_{kj})$ 来代替 M_{ij}，以便进一步减少约束的范围。我们还可以重复以上的步骤，对 M 中的每个三角形 $\langle i,j,k\rangle$ 都做这个操作，并称其为三角形操作。称一个三角形是稳定的，当对它进行三角形操作，$M_{ij},M_{ik},M_{jk},M_{ji},M_{ki},M_{kj}$ 均不改变。显然一个路径相容的 M，它的每一个三角形都是稳定的。

一个约束矩阵 M 满足 $M=\widetilde{M}$，则称为是对称的。路径相容的约束矩阵不一定是对称的。例如：

$$M=\begin{pmatrix}\{\langle 0,0\rangle,\langle 2,2\rangle\} & \{\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,3\rangle\}\\ \{\langle 1,0\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,2\rangle\} & \{\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}\end{pmatrix}$$

有

$$M=M^2=\begin{pmatrix}\{\langle 0,0\rangle,\langle 2,2\rangle\} & \{\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,3\rangle\}\\ \{\langle 1,0\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,2\rangle\} & \{\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}\end{pmatrix}$$

而

$$\widetilde{M}=\begin{pmatrix}\{\langle 0,0\rangle,\langle 2,2\rangle\} & \{\langle 1,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}\\ \{\langle 1,0\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,0\rangle\} & \{\langle 1,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}\end{pmatrix}$$

(约束矩阵有两个解 $\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle$)。

若一个约束矩阵既路径相容又对称，则称它是闭的。

1.2 广义关系代数

为了本章后面的需要，我们在此叙述一个称为广义关系代数的代数系统。

1.2.1 布尔代数

在叙述广义关系代数之前，先回顾一下布尔代数。布尔代数是一个形如 $\langle B,+,\cdot,^-,0,1\rangle$ 的代数，它对每个 $x,y,z\in B$ 都有：

加结合律：$x+(y+z)=(x+y)+z$

加交换律：$x+y=y+x$

加合并律：$x \cdot y + x = x$

加分配律：$x \cdot y + z = (x + z) \cdot (y + z)$

加 1 特性：$x + \overline{x} = 1$

乘结合律：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

乘交换律：$x \cdot y = y \cdot x$

乘合并律：$(x + y) \cdot x = x$

乘分配律：$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

乘 0 特性：$x \cdot \overline{x} = 0$

每个布尔代数还适合以下等式：

$x + x = x$	$1 + x = 1$
$x \cdot x = x$	$1 \cdot x = x$
$\overline{\overline{x}} = x$	$0 + x = x$
$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$0 \cdot x = 0$
$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	

在布尔代数中，若 $x \cdot y = x$，则称 $x \leqslant y$，显然，这是 B 中的一个偏序。

1.2.2　广义关系代数的定义

设 $\mathfrak{A} = \langle A, +, \cdot, ^{-}, 0, 1, :, ^{\sim}, 1' \rangle$，其中 $\langle A, +, \cdot, ^{-}, 0, 1 \rangle$ 是布尔代数，而 $:$ 是二元运算，$^{\sim}$ 是一元运算，$1' \in A$，则称 $\mathfrak{A}$ 为(具有基 A 的)关系代数。为了不与经典关系数据库中的关系代数相混淆，本章中特称它为“广义关系代数”。这里的 $:$ 运算、$^{\sim}$ 运算及 $1'$，应满足以下等式：

(1) 结合律：$(x : y) : z = x : (y : z)$

(2) 分配律：$(x + y) : z = x : z + y : z$

(3) $1'$ 特性：$x : 1' = x = 1' : x$

(4) $^{\sim}$特性：$\tilde{\tilde{x}} = x$

(5) 分配律：$(x + y)^{\sim} = \tilde{x} + \tilde{y}$

(6) 分配律：$(x : y)^{\sim} = \tilde{y} : \tilde{x}$

(7) 混合律：$\tilde{x} : \overline{x : y} \cdot y = 0$

这些等式中的 $x = 1' : x$ 是可从其他等式中推出的，写在这里是为了形式更对称。

1.2.3　K 定理、表征、简单关系代数

首先在广义关系代数 $\mathfrak{A}$ 中，下列公式是等价的：$x : y \leqslant z$，$\tilde{x} : \tilde{z} \leqslant \tilde{y}$，$\tilde{z} : \tilde{y} \leqslant \tilde{x}$，这被称作是 K 定理。K 定理还有如下两种变形的形式：

(1) $x \cdot y : z = 0$，$y \cdot x : \tilde{z} = 0$，$z \cdot \tilde{y} : x = 0$ 等价。

(2) $x \cdot y : z = x \cdot (y \cdot x : \tilde{z}) : (z \cdot \tilde{y} : x)$ 与 $0 : x = x : 0 = 0$ 等价。

除了这两个与 K 定理等价的定理之外，广义关系代数还有以下一些定理：

(3) $\tilde{\bar{x}}=\bar{\tilde{x}}$。

(4) $\tilde{1}'=1'$，$\tilde{0}=0$，$\tilde{1}=1$。

(5) $(x\cdot y)^{\sim}=\tilde{x}\cdot\tilde{y}$。

(6) 若 $x\leqslant 1'$，则 $x:y\cdot z=y\cdot x:z$ 及 $y:x\cdot z=y\cdot z:x$。

(7) 若 $x,y\leqslant 1'$，则 $x:y=x\cdot y$。

(8) 若 $x\leqslant y$，则 $\tilde{x}\leqslant\tilde{y}$，$x:z\leqslant y:z$ 及 $z:x\leqslant z:y$。

由这里的(3)，我们今后可以只用 $\tilde{\bar{x}}$ 而不用 $\bar{\tilde{x}}$。

一个广义关系代数称为是纯的，当且仅当其基是二元关系集合，而且它的运算与这些二元关系上的普通关系运算一致。具体地说就是：

(1) A 是二元关系的集合；

(2) 0 是空关系；

(3) 1 是 A 中所有其他关系的超集的关系；

(4) $1'$ 是 A 中最大的恒等关系；

(5) $x+y$ 是 $x\cup y$；

(6) $x\cdot y$ 是 $x\cap y$；

(7) $\bar{x}$ 是 $1-x$；

(8) $\tilde{x}$ 是 x 的逆。

容易看出，纯关系代数中 $\mathfrak{A}$ 的布尔单元 1 是一个等价关系，这个等价关系的幂集合即是 $\mathfrak{A}$ 的基。如果这是 X 上的等价关系，那么 $\mathfrak{A}$ 就称为是 X 上的广义关系代数，或 X 上的纯关系代数。

每个等价关系 E 都是纯关系代数上的布尔单元 1。实际上，所有只包含 E 中元素的二元关系的集合都形成一个纯关系代数，我们特记作 $\mathfrak{S}b(E)$。若 E 是 X 上的等价关系，那么产生的代数就记作 $\mathfrak{R}_e(X)$，这样 $\mathfrak{R}_e(X)$ 就包括所有在其基域上可能的 X 上的二元关系，且 $\mathfrak{R}_e(X)=\mathfrak{S}b(X\times X)$，例如 $\mathfrak{R}_e(\varnothing)$，$\mathfrak{R}_e(\{a\})$，$\mathfrak{R}_e(\{a,b\})$，分别是具有 1 个、2 个及 16 个元素的广义关系代数。它们具体是：

$X=\varnothing$，只有一个元素 $\varnothing$；

$X=\{a\}$，原子为 $\varnothing$，$\langle a,a\rangle$，所以共有两个元素 $\varnothing$ 及 $\{\langle a,a\rangle\}$；

$X=\{a,b\}$，原子为 $\varnothing$，$\langle a,a\rangle$，$\langle a,b\rangle$，$\langle b,a\rangle$，$\langle b,b\rangle$，所以共有 16 个元素；

$$\varnothing,\{\langle a,a\rangle\},\{\langle a,b\rangle\},\{\langle b,a\rangle\},\{\langle b,b\rangle\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle a,b\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle b,a\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\},$$

$$\left\{\begin{matrix}\langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,b\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle b,a\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle a,b\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle b,a\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\},\left\{\begin{matrix}\langle a,a\rangle\\ \langle a,b\rangle\\ \langle b,a\rangle\\ \langle b,b\rangle\end{matrix}\right\}$$

广义关系代数 $\mathfrak{A}$ 的表征是一个从 $\mathfrak{A}$ 到纯关系代数 $\mathfrak{B}$ 的子代数上的同构，我们把 $\mathfrak{B}$ 的基也看作是表征的基。两个广义关系代数的表征 R,R' 是同构的（分别具有基 B 及 B'），当存在一个一一映射 $h: B \to B'$，使得 $R(x) = h ; R'(x) ; \tilde{h}$，等价地，对每一个 $x \in A$，$R'(x) = \tilde{h} ; R(x) ; h$。

注意到，如果 R 及 R' 分别是具有基 B 及 B' 的同构表征，那么 B 与 B' 的基数相同。

一个广义关系代数是可表征的，当它有一个表征；一个广义关系代数是不可表征的，当它没有表征。众所周知，每一个布尔代数都同构于一个集合的布尔代数。然而 Lyndon 于 1980 年发现存在着不可表征的广义关系代数。

纯关系代数的子代数是纯的，并且容易证明纯关系代数的直积同构于纯关系代数。由此，在子代数和直积的构造下，可表征关系代数的类是闭的。

广义关系代数 $\mathfrak{A}$ 是简单的，当它至少有两个元素，且正好有两个全等的关系。全等关系可从同态产生。如果 h 是一个从广义关系代数 $\mathfrak{A}$ 到广义关系代数 $\mathfrak{A}'$ 的同态，则 $\{\langle x,y\rangle \mid h(x)=h(y)\}$ 就是 $\mathfrak{A}$ 上的一个全等关系。因此简单关系代数应该没有非平凡同态。实际上，从一个简单关系代数 $\mathfrak{A}$ 到一个广义关系代数 $\mathfrak{A}'$ 的同态或者是 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}'$ 的子代数上的同构，或者是 $\mathfrak{A}'$ 只有一个元素。由此可知，一个广义关系代数是简单的，则有 $0 \neq 1$，而且对每一个它的非 0 元素 x 都有 $1 ; x ; 1 = 1$。$\mathfrak{R}_e(\varnothing)$ 只有一个元素，所以它不是简单的，如果 X 不空，则可利用简单性的表征来检查 $\mathfrak{R}_e(X)$ 是否是简单的。另一方面，如果 X,Y 是不相交的非空集合，则纯关系代数 $\mathfrak{Sb}((X\times X)\cup(Y\times Y))$ 不是简单的。因为存在着一个从 $\mathfrak{Sb}((X\times X)\cup(Y\times Y))$ 到 $\mathfrak{Sb}(X\times X)$ 上的非平凡同态 h，这里，对每一个 $x \subseteq (X\times X)\cup(Y\times Y)$，有 $h(x) = x \cap (X\times X)$（实际上 $\mathfrak{Sb}((X\times X)\cup(Y\times Y))$ 同构于 $\mathfrak{Sb}(X\times X)$ 与 $\mathfrak{Sb}(Y\times Y)$ 的直积，而 h 就是这个直积在 $\mathfrak{Sb}(X\times X)$ 上的投影映射）。

一个简单关系代数是可表征的，当且仅当对某个集合 X，有一个嵌入 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{R}_e(X)$ 中去的表征 R[121]。如果 R 是这样一个表征，则称 R 为集合 X 上 $\mathfrak{A}$ 的表征。

如果一个简单关系代数 $\mathfrak{A}$ 有集合 X 上的表征 R，则 $\mathfrak{A}$ 就一定有表征，而且这个表征不是任何集合上的表征。这是因为 $\mathfrak{R}$，例如 $\mathfrak{R}_e(X)$，能被嵌入到 $\mathfrak{Sb}((X'\times X')\cup(X''\times X''))$ 中去，这里 X' 及 X'' 是 X 的不相交的两个拷贝（以下 $x \in X, x' \in X', x'' \in X''$）。我们把 $\{\langle x_0,x_1\rangle\}$ 映射为 $\{\langle x'_0,x'_1\rangle,\langle x''_0,x''_1\rangle\}$，并将这个映射扩展到 X 上的所有二元关系，这样就可以得到这个嵌入。令 R 是所有这些嵌入的集合，那么 R 就是嵌入 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{Sb}((X'\times X')\cup(X''\times X''))$ 的表征。显然，这个表征不是任何集合上的，而且也不与 R 同构（平凡的情况除外）。由于上面的讨论在定理 1.1 的证明中起着关键的作用，所以我们再举一例加以说明。

广义关系代数 $\mathfrak{A}$ 有 4 个元素 $0,1',1,0'$。这里 $0' = \overline{1'}$，而且在集合 $\{a,b\}$ 上的表征 R 定义为：$R(0)=\varnothing$，$R(1')=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$，$R(0')=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$R(1)=$