第 1 部分

基 本 算 法

第 1 章　数 学 准 备

“计算机算法”顾名思义讨论的是一类与计算机有关的数学问题，它需要许多数学基础的支持，现在仅就递推关系与母函数作一些介绍。

首先介绍一些常用的符号和术语，例如 R 表示实数集合；R^+ 表示正的实数集合。

又如 $N=\{0,1,2,\cdots\}$ 即包含 0 在内的正整数；$N^+=\{1,2,\cdots\}$ 即正整数。

还经常用到的符号如 $\triangleq$ 表示“定义”，$\exists$ 表示存在，如 $\exists n_0\in N$；$\forall$ 为所有的，如 $\forall n\geqslant n_0$，即对所有 $\geqslant n_0$ 的数 n。

令 f 和 g 是由映射 N 到 R 的两个函数。请读者注意下面三个定义的区别。

定义　令 $f: N\to R^+$，

$$O(f)\triangleq\{g: N\to R^+ \mid \exists c\in R^+, \exists n_0\in N, \forall n\geqslant n_0, \text{使 } g(n)\leqslant cf(n)\}$$

也就是 $O(f)$ 是函数 $g: N\to R^+$ 的集合，它以 $cf(n)$ 为上界。亦即若存在 $c\in R$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)}=c$，则 $g\in O(f)$。基于上述概念，若 $f(n)=n^3$，$g(n)=n^2$，则 $g\in O(f)$，但 $f\notin O(g)$。

定义　令 $f: N\to R^+$，

$$\Omega(f)\triangleq\{g: N\to R \mid \exists n_0\in N, \exists c\in R^+, \forall n\geqslant n_0, \text{使 } cf(n)\leqslant g(n)\},$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)}=\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)}=c>0$，则 $g\in\Omega(f)$。

定义　令 $f: N\to R$，

$$\Theta(f)=O(f)\cap\Omega(f),$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)}=c, c\in R^+$，则 $g\in\Theta(f)$。

其中 $c\in R^+$ 表示 $c\neq 0, c\neq\infty$，$g\in\Theta(f)$ 意味着 g 和 f 同阶。

O,Ω,Θ 有以下的性质（假定 $f,g,h: N\to R$）：

（1）若 $f\in O(g)$，$g\in O(h)$，则 $f\in O(h)$；

（2）$f\in O(g)\Leftrightarrow g\in\Omega(f)$；

（3）若 $f\in\Theta(g)$，则 $g\in\Theta(f)$；

（4）$O(f+g)=O(\max\{f,g\})$。

1.1　母　函　数

递推关系是计数的一个强有力工具，特别在作算法分析时是必需的。递推关系的求解主要是利用母函数。当然母函数尚有其他用处，但这里主要介绍在解递推关系上的应用。例如

$$(1+a_1x)(1+a_2x)\cdots(1+a_nx)$$
$$=1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^2+\cdots+a_1a_2\cdots a_na^n \quad (1.1)$$

x^2 项的系数 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n$ 中所有的项包含了从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中

取两个组合的全体；同理，x^3 项系数 $a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n$ 包含了从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 3 个组合的全体，以此类推。

若令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 在(1.1)式中 x^2 项系数 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n$ 中每一个组合有 1 个贡献，其他各项以此类推，故有

$$(1+x)^n=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n \tag{1.2}$$

另一方面，

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$$

所以 $[C(m,0)+C(m,1)x+\cdots+C(m,m)x^m][C(n,0)+C(n,1)x+\cdots+C(n,n)x^m]$

$$=[C(m+n,0)+C(m+n,1)x+\cdots+C(m+n,m+n)x^{m+n}]$$

比较等号两端 x 项对应系数，可得一等式

$$C(m+n,r)=C(m,0)C(n,r)+C(m,1)C(n,r-1)+\cdots+C(m,r)C(n,0)$$

这里不过给出另一种比较简单的证明。

同样，对于$(1+x)^n\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^m$，(设 $n\geqslant m$)，用类似方法可得等式

$$C(m+n,m)=C(n,0)C(m,0)+C(n,1)C(m,1)+\cdots+C(n,m)C(m,m)$$

方法如下。

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m=x^{-m}(1+x)^{m+n} \tag{1.3}$$

所以 $[C(n,0)+C(n,1)x+\cdots+C(n,n)x^n][C(m,0)+C(m,1)x^{-1}+\cdots+C(m,m)x^{-m}]$

$$=x^{-m}[C(m+n,0)+C(m+n,1)x+C(m+n,2)x^2+C(m+n,m+n)x^{m+n}]$$

比较等号两端的常数项，即得公式(1.3)。

又如等式

$$(1+x)^m=C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n$$

令 $x=1$，可得

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2n \tag{1.4}$$

(1.2)式等号的两端对 x 求导可得

$$n(1+x)^{n-1}=C(n,1)+2C(n,2)x+3C(n,3)x^2+\cdots+nC(n,n)x^{n-1} \tag{1.5}$$

等式(1.5)两端令 $x=1$，得

$$C(n,1)+2C(n,2)+3C(n,3)+\cdots+nC(n,n)=n2^{n-1} \tag{1.6}$$

类似的办法可以得到

$$C(n,1)x+2C(n,2)x^2+3C(n,3)x^3+\cdots+nC(n,n)x^n$$
$$=nx(1+x)^{n-1}$$

所以

$$C(n,1)+2^2C(n,2)+3^2C(n,3)+\cdots+n^2C(n,n)$$
$$=n(n+1)2^{n-2} \tag{1.7}$$

还可以类似地推出一些等式，但通过上面一些例子已可见函数$(1+x)^n$ 在研究序列 $C(n,0),C(n,1),\cdots,C(n,n)$的关系时所起的作用，对于其他序列也有同样结果，现引进母函数概念如下。

定义： 对于序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，构造一函数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

称函数 $G(x)$ 是序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是母函数。

例如，$(1+x)^n$ 是序列

$$C(n,0), C(n,1), \cdots, C(n,n)$$

的母函数。

如若已知序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，则对应的母函数 $G(x)$ 便可根据定义给出。反之，如若已求得序列的母函数 $G(x)$，则该序列也随之确定。

序列 $a_0, a_1, \cdots$ 可记为 $\{a_n\}$。

1.2 递推关系

利用递推关系进行计数的方法在算法分析中经常看到，举例说明如下。

例 1.1 Hanoi 塔问题：这是组合数学中的著名问题。n 个圆盘依其半径大小，从下而上套在柱 A 上，如图 1.1 所示。每次只允许取一个转移到柱 B 或柱 C 上，而且不允许大盘放在小盘上方。若要求把柱 A 上的 n 个盘转移到柱 C 上，请设计一种方法，并估计要移动几个盘次。现在只有 A，B，C 三根柱子可供使用。

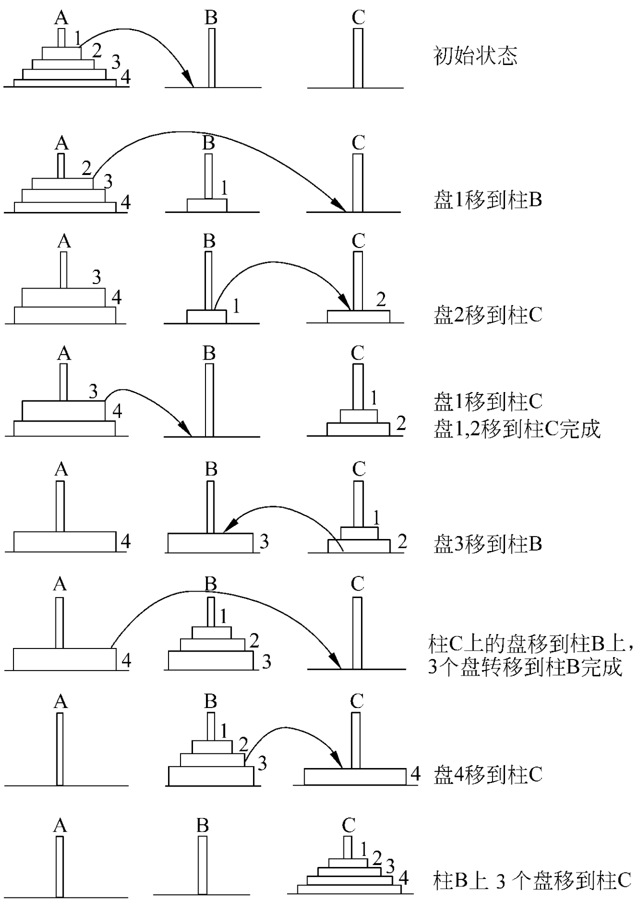

图 1.1

Hanoi 塔是个典型的问题，第一步要设计算法，进而估计它的复杂性，即估计工作量。

这一问题有典型的意义，第一步先解决算法问题，即如何完成 n 个盘的搬动，进一步还要对算法作出复杂性分析，即对要作多少盘次的搬动进行估计。

算法设计：

$n=2$ 时，第一步先把最上面一个圆盘套在柱 B 上；第二步把第二个圆盘转移到柱 C 上；最后再把柱 B 上的一个圆盘转移到柱 C 上，到此转移完毕。

假定 $n-1$ 个盘子的转移算法已经确定。

对于一般 n 个圆盘问题，先把上面的 $n-1$ 个圆盘转移到柱 B 上，再把最后一个圆盘转移到柱 C 上，然后把柱 B 上的 $n-1$ 个圆盘转移到柱 C 上，转移完毕。

上述的算法是递归的连用。$n=2$ 时已给出了算法；$n=3$ 时，第一步便利用算法把上面两个圆盘移到柱 B 上，第二步再把第三个圆盘转移到柱 C 上；最后把柱 B 上的两个圆盘转移到柱 C 上，$n=4,5,\cdots$，以此类推。图 1.1 形象地给出 $n=4$ 的转移过程。

算法分析：令 h_n 表示 n 个圆盘所需要的转移盘次。根据算法先把前面 $n-1$ 个圆盘转移到柱 B 上；然后把第 n 个圆盘转到柱 C 上；最后再一次将柱 B 上的 $n-1$ 个圆盘转到柱 C 上。

$n=2$ 时，算法是对的，因此，$n=3$ 时算法是对的。以此类推。于是有

$$h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad h_1 = 1 \tag{1.8}$$

令

$$H(x) = h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3 + \cdots$$

根据 $h_n = 2h_{n-1} + 1$ 有

$$\begin{array}{rl}
x^2: & h_2 = 2h_1 + 1 \\
x^3: & h_3 = 2h_2 + 1 \\
+) & \vdots \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{H(x) - x = 2xH(x) + (x^2 + x^3 + \cdots)}
\end{array}$$

即对上面等式分别乘以 $x^2, x^3, \cdots$，作形式化的运算，相加等于

$$(1-2x)H(x) = x + \frac{x^2}{1-x}$$

整理得

$$(1-2x)H(x) = \frac{x^2}{1-x} + x = \frac{x}{1-x}$$

$$H(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

如何从母函数求得序列 $h(1), h(2), \cdots$？下面提供一种化为部分分数的方法：

令
$$H(x) = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A(1-2x) + B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$
$$= \frac{(A+B) - (2A+B)x}{(1-x)(1-2x)}$$

所以
$$(A+B) - (2A+B)x = x$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B - 1 = 0 \end{cases} \qquad A = -1,\ B = 1$$

即

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\
&= (1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots) - (1+x+x^2+\cdots) \\
&= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \cdots \\
&= \sum_{k-1}^{n} (2^k-1)x^k
\end{aligned}
$$

因
$$H(x) = \sum_{k-1}^{n} h(k)x^k$$

所以
$$h(k) = 2^k - 1$$

例 1.2 求 n 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数。

先从分析 n 位十进制数出现偶数 5 的数的结构入手。$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 是 $n-1$ 位十进制数,若已含有偶数个 5,则 p_n 取 5 以外的 0,1,2,3,4,6,7,8,9,九个数中的一个,若 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 中只有奇数个 5,则取 $p_n=5$,使 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 成为出现偶数个 5 的十进制数。

解法 1:

令 $a_n = n$ 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数。

$b_n = n$ 位十进制数中出现奇数个 5 的数的个数。

故有

$$
\begin{cases}
a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1} \\
b_n = 9b_{n-1} + a_{n-1}
\end{cases}
\qquad a_1 = 8, \quad b_1 = 1 \tag{1.9}
$$

(1.9)式中的 $a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}$ 表达了含有偶数个 5 的 n 位十进制数的两个组成部分。$9a_{n-1}$ 是由含有偶数个 5 的 $n-1$ 位十进制数 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$(令 p_n 取 5 以外的 9 个数 0,1,2,3,4,6,7,8,9 中的一个数)构成的。b_{n-1} 项表示当 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 是含有奇数个 5 的 $n-1$ 位十进制数(令 $p_n=5$),得到 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是含偶数个 5 的 n 位十进制数。

$bn = 9b_{n-1} + a_{n-1}$ 也有类似的解释。

(1.9)式是关于序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的联立关系。

设序列$\{a_n\}$的母函数为 $A(x)$,序列$\{b_n\}$的母函数为 $B(x)$,即

$$A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots$$
$$B(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2 + \cdots$$

$$
\begin{array}{r}
A(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots \\
-9xA(x) = -9a_1x - 9a_2x^2 - \cdots \\
+)\ -xB(x) = -b_1x - b_2x^2 - \cdots \\
\hline
(1-9x)A(x) - xB(x) = 8
\end{array}
$$

或

$$
\begin{array}{r}
x: a_2 = 9a_1 + b_1 \\
x^2: a_3 = 9a_2 + b_2 \\
x^3: a_4 = 9a_3 + b_3 \\
+)\ \vdots \qquad\qquad \\
\hline
A(x) - 8 = 9xA(x) + xB(x)
\end{array}
$$

所以
$$(1-9x)A(x)-xB(x)=8$$
又

$$\begin{array}{r} B(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots \\ -9xB(x) = -9b_1 x - 9b_2 x^2 - \cdots \\ +)\ -xA(x) = -a_1 x - a_2 x^2 - \cdots \\ \hline (1-9x)B(x) - xA(x) = 1 \end{array}$$

故得到关于母函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的联立方程组：

$$\begin{cases} (1-9x)A(x)-xB(x)=8 \\ -xA(x)+(1-9x)B(x)=1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1-9x & -x \\ -x & 1-9x \end{vmatrix}=(1-9x)^2-x^2=1-18x+80x^2$$
$$=(1-8x)(1-10x)$$
$$A(x)=\frac{1}{1-18x+80x^2}\begin{vmatrix} 8 & -x \\ 1 & 1-9x \end{vmatrix}=\frac{-71x+8}{(1-8x)(1-10x)}$$
$$B(x)=\frac{1}{(1-8x)(1-10x)}\begin{vmatrix} 1-9x & 8 \\ -x & 1 \end{vmatrix}=\frac{1-x}{(1-8x)(1-10x)}$$
$$A(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(7\cdot 8^k+9\cdot 10^k)x^k$$

所以
$$a_k=\frac{7}{2}8^{k-1}+\frac{9}{2}10^{k-1}$$

解法 2：

$n-1$ 位的十进制数共 $9\times 10^{n-2}$ 个，例如 2 位的十进制数为 90 个，3 位的十进制数为 900 个。从中去掉含有偶数个 5 的数，余下的便是 $n-1$ 位中含有奇数个 5 的数，故有

$$a_n = 9a_{n-1} + b_{n-1}$$
$$b_n = 9\times 10^{n-2} - a_{n-1}$$ 2〗所以
$$a_n = 8a_{n-1} + 9\times 10^{n-2}, a_1 = 8$$

令
$$\begin{array}{r} A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots \\ +)\quad -8xA(x) = -8a_1 x - 8a_2 x^2 - \cdots \\ \hline (1-8x)A(x) = 8 + (a_2 - 8a_1)x(a_3 - 8a_2)x^2 + \cdots \end{array}$$

所以
$$(1-8x)A(x)=8+9x+9\cdot 10x^2+\cdots$$
$$=8+\frac{9x}{1-10x}=\frac{8-71x}{1-10x}$$

所以
$$A(x)=\frac{8-71x}{(1-8x)(1-10x)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{11-10x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(7\cdot 8^k+9\cdot 10^k)x^k$$

所以 $$a^k=\frac{7}{2}\cdot 8^{k-1}+\frac{9}{2}\cdot 10^{k-1}$$

例 1.3 从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 r 个进行允许重复的组合。假定允许重复的组合数用 $\bar{C}(n,r)$表示,其结果可能有以下两种情况。

(a) 不出现某特定元素(设为 a_1),这样的组合数为 $\bar{C}(n-1,r)$,相当于排除 a_1 后从 $a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中取 r 个作允许重复的组合。

(b) 至少出现一个 a_1,其组合数为 $C(c,r-1)$,相当于从 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 中取 $r-1$ 个作允许重复的组合,然后再加上一个 a_1,得到从 n 个元素中取 r 个作允许重复的组合。

依据加法法则可得

$$\bar{C}(n,r)=\bar{C}(n,r-1)+\bar{C}(n-1,r) \tag{1.10}$$

因 $\bar{C}(n,1)=n,\bar{C}(n-1,r)=n-1$,故令 $\bar{C}(n,0)=1$。

递推关系式(1.10)带有两个参数 n 和 r。

$$\begin{array}{rl} G_n(x)= & \bar{C}(n,0)+\bar{C}(n,1)x+\bar{C}(n,2)x^2+\cdots \\ -xG_n(x)= & -\bar{C}(n,0)x-\bar{C}(n,1)x^2-\cdots \\ +)\ -G_{n-1}(x)= & -\bar{C}(n-1,0)-\bar{C}(n-1,1)x-\bar{C}(n-1,2)x^2\cdots \\ \hline & (1-x)G_n(x)-G_{n-1}(x)=0 \end{array} \tag{1.11}$$

(1.11)式是关于 $G_n(x)$的递推关系,但系数$(1-x)$不是常数,不过

$$\begin{aligned} G_1(x)&=\bar{C}(1,0)+\bar{C}(1,1)x+\bar{C}(1,2)x^2+\cdots \\ &=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

所以 $$\begin{aligned} G_n(x)&=\frac{1}{1-x}G_{n-1}(x)=\frac{1}{(1-x)^2}G_{n-2}(x) \\ &=\cdots=\frac{1}{(1-x)^{n-1}}G_1(x)=\frac{1}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

由二项式定理

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\cdots$$

可得

$$\begin{aligned} \bar{C}(n,r)&=\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)r!} \\ &=C(n+r-1,r) \end{aligned}$$

1.3 Fibonacci 数列

1.3.1 Fibonacci 数列是典型的递推关系

Fibonacci 数列是递推关系的又一典型问题,数列的本身有着许多应用。

问题:有雌雄一对兔子,假定过两个月便可繁殖雌雄各一的一对小兔。问过 n 个月后共有多少对兔子?

设满 n 个月时兔子对数为 F_n,其中当月新生兔数目设为 N_n 对。第 $n-1$ 个月留下的

兔子数目设为 O_n 对。

$$F_n=N_n+O_n$$

但 $$O_n=F_{n-1},N_n=O_{n-1}=F_{n-2}$$

即第 $n-2$ 个月的所有兔子到第 n 个月都有繁殖能力了。

所以 $$F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\qquad F_1=F_2=1 \tag{1.12}$$

由递推(1.12)式可依次得到

$$F_3=F_1+F_2=2,F_4=F_2+F_3=3$$
$$F_5=F_3+F_4=3+2=5,\cdots$$

1.3.2 问题的解

设 $G(x)=F_1x+F_2x^2+\cdots$

$$\begin{array}{rl} & x^3: F_3=F_2+F_1 \\ & x^4: F_4=F_3+F_2 \\ +) & \qquad\vdots \\ \hline \multicolumn{2}{c}{G(x)-x^2-x=x(G(x)-x)+x^2G(x)} \end{array}$$

所以 $$(1-x-x^2)G(x)=x$$

$$G(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$$
$$=\frac{x}{\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}$$
$$=\frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

所以 $$\begin{cases}A+B=0\\ \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B)=1\end{cases}\qquad \begin{cases}A+B=0\\ A-B=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}},\qquad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

所以 $$G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha-\beta)x+(\alpha^2-\beta^2)x^2+\cdots]$$

所以 $$F_n=(\alpha^n-\beta^n)/\sqrt{5}$$

其中

$$\alpha=\frac{-2}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{-2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{1.13}$$

$$\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618$$