



控制系统的设计应该满足对系统提出的性能要求。控制系统的性能(performance)是指系统在实际工作时的误差大小,具体设计时可以有不同的评价指标,例如误差的数值大小,或者是平方积分指标等等。所以控制系统设计时首先要知道作用在系统上的信号。这些信号并不是单一的,例如输入端的信号除了所要求跟踪的有用信号外,常伴随有各种干扰,或者说噪声。此外,在系统的其他地方也常作用有各种干扰,使系统的输出偏离输入。

系统设计时用的有用信号常代表系统的典型工作情况,要用它来评估所设计的系统的性能,所以这常是一种确定性信号。而系统中的干扰和噪声常是一种随机信号。这一章先说明有用信号,即不伴有噪声的理想输入,以及在该输入作用下系统的跟踪误差。至于噪声和干扰将在下一章中讨论。

3.1 输入信号的分析

线性理论把系统看作是线性的,一般不考虑输入信号的幅值大小。但是当设计实际系统时,就得弄明白输入信号的具体数值,这样才能正确选用元件和保证所要求的特性。所以在说明输入信号的时候应该说明其幅值大小、变化率以及二阶或高阶的导数。

系统设计时一般是选一典型的信号作为理想的输入来进行分析。这个典型信号是怎么确定的呢?

首先,根据该系统预定执行的任务来确定。例如有一防空雷达,其目的是要对抗来袭的敌机而不是防御雷达站本身。因此对这种雷达随动系统来说,应考虑目标的通过路线,理想的情况就是设目标以等速、等高、直线通过。设计时就根据这个理想的通过路线来分析方位角和高低角信号,并把它们作为该随动系统的理想输入信号。

其次,在确定典型输入时总是要对实际情况做一些简化,以便于分析和计算。

下面以随动系统经常会遇到的一些工作条件为例来说明如何对典型信号进行分析并提取必要的的数据。

3.1.1 舰用随动系统的输入信号

图 3-1(a)是海船摇摆的一段典型曲线。严格来说,这个运动是随机的。图 3-1(b)是其功率谱密度曲线。不过从频谱上可以看到,该信号是集中在一个比较窄的频段上的,因此舰船上各种设备的输入信号往往都用一个正弦型的信号来描述。

设摇摆角为 $\pm 20^\circ$,周期为 10 s,那么这个信号就可以写作

$$\theta(t) = \theta_{\max} \sin \omega t \quad (3-1)$$

式中 $\theta_{\max} = 20^\circ$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T = 0.628 \text{ s}^{-1}$ 。

从式(3-1)可得对应的角速度和角加速度为

$$\dot{\theta}(t) = \theta_{\max} \omega \cos \omega t = \dot{\theta}_{\max} \cos \omega t \quad (3-2)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\theta_{\max} \omega^2 \sin \omega t = -\ddot{\theta}_{\max} \sin \omega t \quad (3-3)$$

式中 $\dot{\theta}_{\max} = 12.6^\circ/\text{s}$, $\ddot{\theta}_{\max} = 7.9^\circ/\text{s}^2$ 。

式(3-1)~式(3-3)表征了这类输入信号的特性,见图 3-2。这些随时间而变化的特性是今后设计系统的依据。

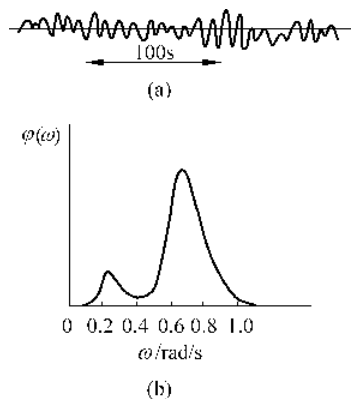


图 3-1 海船的摇摆特性

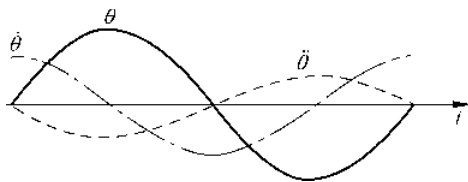


图 3-2 正弦型信号

3.1.2 跟踪直线飞行目标的伺服系统的输入

现在来考虑目标等速、等高、直线通过时跟踪站的方位角和高低角的信号,见图 3-3。

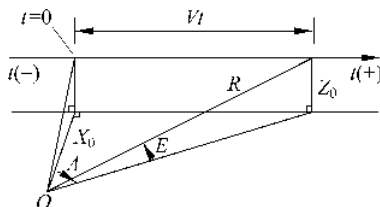


图 3-3 跟踪等高飞行目标的角度关系

设跟踪站位于点 O , 跟踪以等速 V 、等高 Z_0 作直线飞行的目标。渡越点的水平距离为 X_0 。根据几何关系

$$A = \arctan \frac{Vt}{X_0} = \arctan(at) \quad (3-4)$$

$$E = \arctan \frac{Z_0/X_0}{\sqrt{1 + (Vt/X_0)^2}} = \arctan \frac{b}{\sqrt{1 + (at)^2}} \quad (3-5)$$

式中 $a = V/X_0, b = Z_0/X_0$ 。

对式(3-4)求导,得

$$\frac{dA}{dt} = a \cos^2 A \quad (3-6)$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -a^2 \sin 2A \cos^2 A \quad (3-7)$$

图 3-4 为对应的方位角的角速度(a)和角加速度(b)的变化特性。图中角加速度的最大值为

$$\ddot{A}_{\max} = 0.65a^2 \quad (3-8)$$

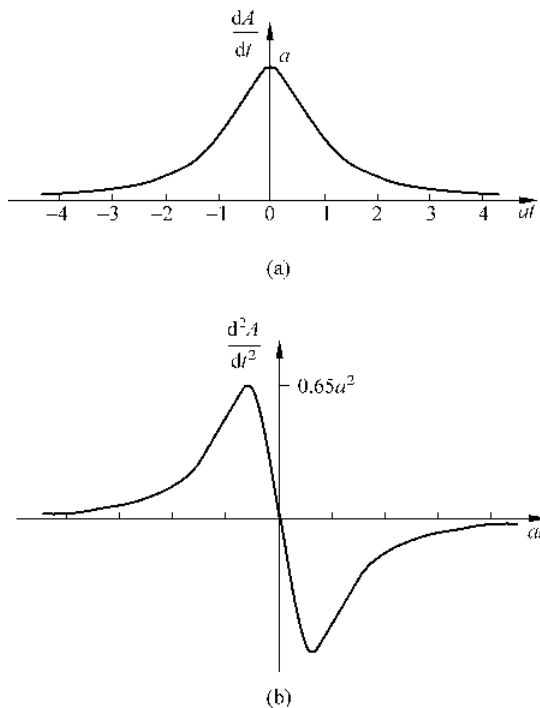


图 3-4 方位角变化特性

同方位角的运算一样,也可得高低角的角速度和角加速度:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{a^2 bt}{[1 + (at)^2]^{3/2}} \cos^2 E = -\frac{V}{R} \sin A \sin E \quad (3-9)$$

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = -\frac{V^2}{R^2} \tan E [1 - \sin^2 A (1 + \cos^2 E)] \quad (3-10)$$

式中 R 为斜距。

根据上述分析可知,即使是很明显的直线等高等速飞行,系统输入信号的速度和加速度都不是常值,跟踪误差也将是一个随时间而变化的量。

上面举例说明了如何根据系统的实际工作情况来分析其输入信号。这些信号可以是如上所述用解析式来表示,也可以直接用图解曲线来表示。若为图解曲线,则其导数就用图解法(差分)来求取。今后将根据信号和其各阶导数的变化曲线来计算系统的跟踪误差。应该指出的是,这些输入信号的速度、加速度等变化特性不仅仅用于计算跟踪误差等的动态设计,实际设计系统时还要根据这些特性曲线来选用元件或确定元件的线性范围。现以确定执行电机所需的力矩为例来说明。

设系统的输入信号如图 3-4 所示,这实际上也是跟踪时系统的输出变化特性。可由此算得与各个分量有关的力矩,如图 3-5 所示。图中还附加了两个可能的冲击力矩 T_S 。这些力矩的总和(T_T)就表示了该系统在实际工作时所要克服的负载力矩,可以据此来选用执行电机。

现在再来分析输入信号的频谱,这也是系统设计时要考虑的一个内容。仍以上面讨论过的方位角信号为例,已知其变化为

$$A(t) = \arctan(at)$$

设 $a=0.5 \text{ rad/s}$,图 3-6(a)所示即为此方位角的变化特性。显然 $A(t)$ 不是一绝对可积函数,不能直接进行傅里叶变换。对于这类信号,一般可以从其速度特性着手来进行分析。图 3-6(b)为其速度变化特性 dA/dt 。可以认为此曲线在 $\pm 16 \text{ s}$ 以外为零,因此可以

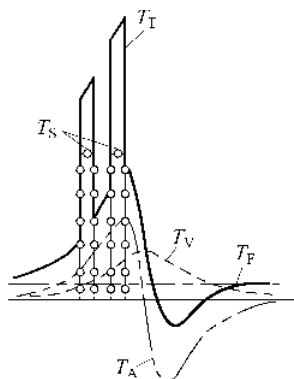


图 3-5 跟踪过程的力矩分量

T_A —加速度力矩; T_V —速度力矩; T_F —摩擦力矩;

T_S —冲击力矩; T_T —总负载力矩

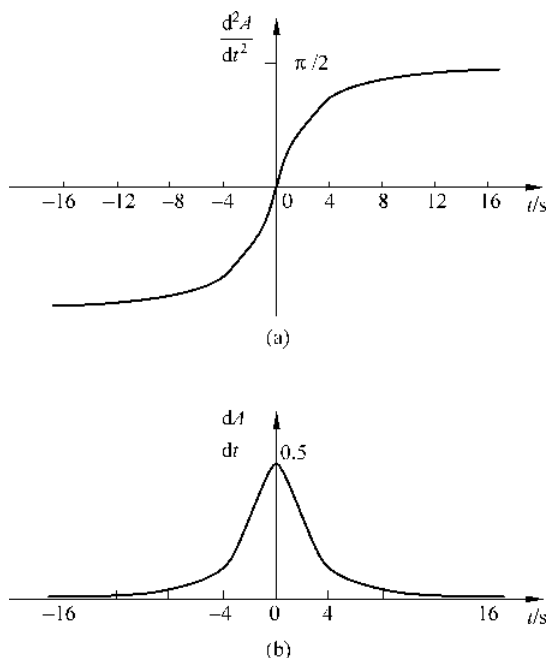


图 3-6 方位角变化实例

对这段曲线作离散傅里叶变换。取数据长度 $T=32$ s, 对应的 Ω 为

$$\Omega = 2\pi/T = 0.1963 \text{ rad/s} \quad (3-11)$$

取 $N=32$, 求得此 32 点 DFT 后再乘以 $\Delta t=1$ s[见式(2-76)]就得到此速率信号的频谱特性值 $\dot{A}(j\omega_k)$, 式中 $\omega_k = k\Omega$ 。表 3-1 列出了其前 9 点的值。图 3-7 为对应的频谱特性。

表 3-1 dA/dt 和 $A(t)$ 的频谱

k	$ \dot{A}(j\omega_k) = \Delta t F(k) $	$ A(j\omega_k) $
0	2.8886	∞
1	2.1540	10.9702
2	1.4185	3.6122
3	0.9761	1.6571
4	0.6460	0.8225
5	0.4472	0.4555
6	0.2926	0.2484
7	0.2064	0.1502
8	0.1312	0.0835

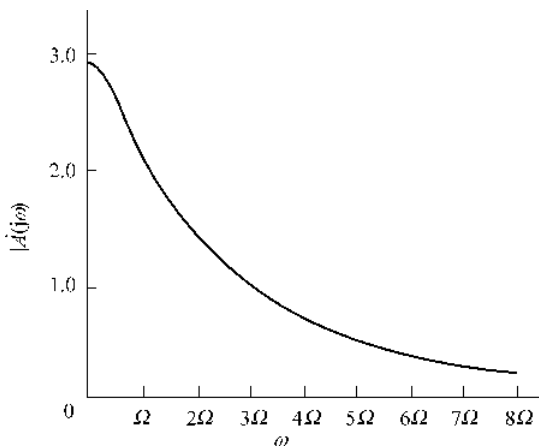


图 3-7 方位角速度的频谱特性

有了方位角速度的频谱特性 $\dot{A}(j\omega)$, 就可以求方位角 $A(t)$ 的频谱 $A(j\omega)$,

$$|A(j\omega)| = \frac{|\dot{A}(j\omega)|}{\omega} \quad (3-12)$$

应该说明的是 dA/dt 是 $A(t)$ 的导数, 故 dA/dt 中不包括 $A(t)$ 中常值分量的信息。因此根据式(3-12)算得的频谱 $A(j\omega)$ 将不包含直流分量, 即 $\omega=0$ 处的脉冲分量 $\delta(\omega)$ 。这个直流分量不影响这里对频宽的讨论。

表 3-1 中的第二列就是根据式(3-12)所算得的方位角的频谱, 图 3-8 为对应的频

谱特性。从图可见,该方位角信号的频谱分布在 $\omega = 8\Omega = 1.57 \text{ rad/s}$ 以内,或者说在 0.25 Hz 以内。这个数据将是进一步分析方位角随动系统的依据。

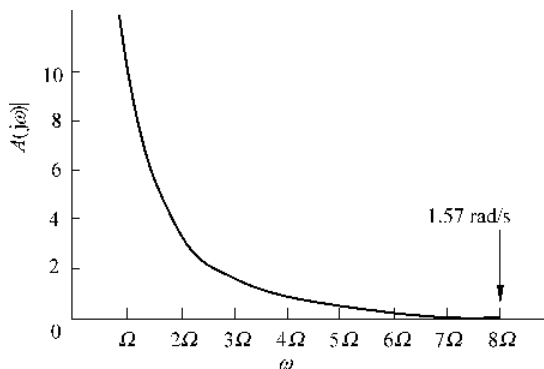


图 3-8 方位角信号的频谱特性

3.2 静态误差系数

现在来研究输入信号作用下系统的跟踪误差。本节先从最简单的信号着手,即阶跃信号、速度信号和加速度信号。

对于这些信号,不同系统的跟踪性能是不一样的。一般按照所能跟踪信号的形式将系统分成 0 型、I 型、II 型等等。

系统的类型与开环传递函数中积分环节的数目有关。设开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s^\gamma} \frac{B(s)}{A(s)} \quad (3-13)$$

式中 γ 的值代表系统的型号: $\gamma=0$ 者称为 0 型, $\gamma=1$ 者称为 I 型, 依次类推。

γ 值不同时, 式 (3-13) 中增益 K 的量纲和意义是不一样的。

设 $A(0)=1, B(0)=1$, 则当 $\gamma=0$ 时, K 表示了输出与输入的比例关系, 是无量纲的。这时的 K 称为比例系数, 并用 K_p 来表示。 $\gamma=1$ 时, K 的量纲为 s^{-1} , 这时的 K 称为速度系数, 用 K_v 来表示。 $\gamma=2$ 时, K 的量纲为 s^{-2} , 这时的 K 称为加速度系数, 用 K_a 来表示。

各型系统的稳态误差计算如下。

设所讨论的系统如图 3-9 所示, 对应的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \quad (3-14)$$

根据终值定理, 系统的稳态误差为

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} \quad (3-15)$$

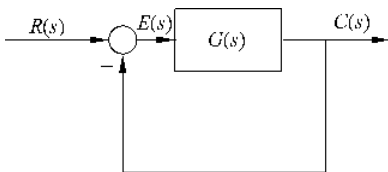


图 3-9 闭环系统

现结合下列三种输入信号来观察系统的稳态误差。

阶跃输入: $r(t)=1(t)$, $R(s)=1/s$

速度输入: $r(t)=t \cdot 1(t)$, $R(s)=1/s^2$

加速度输入: $r(t)=\frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$, $R(s)=1/s^3$

将式(3-13)代入式(3-15),对应不同的 $R(s)$ 计算系统的稳态误差,列于表 3-2。注意到计算中所用的输入函数都是单位函数,因而算得的这个稳态误差实际上应看作是系统的误差系数。常值的稳态误差一般叫静态误差。所以表 3-2 的误差系数就叫做静态误差系数。

表 3-2 静态误差系数

系统的类型	γ	低频部分的 $G(s)$	静态误差系数		
			位置	速度	加速度
0	0	K_p	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I	1	K_v/s	0	$1/K_v$	∞
II	2	K_a/s^2	0	0	$1/K_a$

静态误差系数表示了系统的误差与常值输入(位置、速率、加速度)的比值。也有人将这个系数定义为误差与常值输出的比值,这时表 3-2 中的位置误差系数改为 $1/K_p$,而速度误差系数和加速度误差系数在这两种定义下都是一样的。由此可见,所谓的静态误差系数实际上就是比例系数、速度系数和加速度系数等的倒数,是对这些系数的另外一种解释。有些文献直接将比例系数 K_p ,速度系数 K_v 等称为静态误差系数。本书中为了强调 K_p, K_v 等所表示的增益的物理含义,并为了与 3.3 节动态误差系数的概念^[2]相一致,故对静态误差系数采用文献[1]的定义,如表 3-2 所示。

有了静态误差系数就可以在一定的条件下来计算跟踪误差。但是本节的这个概念太窄了,还需要将它推广到更一般的情形。

3.3 动态误差系数

当输入信号 $r(t)$ 变化时,跟踪过程中的误差信号可以看作是由输入信号中的位置、速度、加速度等分量引起的,各项误差与相应的分量的比例系数就称为动态误差系数^[2]。也就是说,将误差信号 $e(t)$ 看作如下的形式:

$$e(t) = C_0 r + C_1 \dot{r} + \frac{C_2}{2!} \ddot{r} + \frac{C_3}{3!} \dddot{r} + \dots \quad (3-16)$$

式中 $C_0, C_1, C_2/2, \dots$ 就是相应的动态误差系数。

式(3-16)的拉氏变换式为

$$E(s) = C_0 R(s) + C_1 s R(s) + \frac{C_2}{2!} s^2 R(s) + \dots \quad (3-17)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n s^n}{n!} \quad (3-18)$$

式(3-18)至少在 $|s|$ 很小时是收敛的。也就是说,幂级数(式(3-18)所示)在 $s=0$ 的邻域内是收敛的。根据拉氏变换的概念, $s \rightarrow 0$ 对应于 $t \rightarrow \infty$,所以只有 t 大的时候式(3-16)才能成立,这时才可以将误差看作是由与输入信号及其各阶导数成比例的各分量所组成。

因为当 $s \rightarrow 0$ 时该级数是收敛的,所以式中的系数可按泰勒级数公式求取。

$$C_i = \left[\frac{d^i}{ds^i} \frac{E(s)}{R(s)} \right]_{s=0} \quad (3-19)$$

由于式(3-18)一般收敛得相当快,所以在计算误差时实际上只要看前面几项就可以了。具体地说,往往只要知道 C_0, C_1, C_2 就足够了。因此不一定要根据式(3-19)来计算 C_i ,将传递函数 $E(s)/R(s)$ 的分子分母直接相除取前面几项也就可以了。设

$$G(s) = \frac{K}{s^\gamma} \frac{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n} \quad (3-20)$$

则可得

$$\begin{aligned} \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + G(s)} \\ &= \frac{s^\gamma (1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n)}{s^\gamma (1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n) + K(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_m s^m)} \end{aligned} \quad (3-21)$$

表3-3列出了根据式(3-21)直接相除求得的前几项动态误差系数。将表3-3与表3-2对比可以看到,Ⅰ型系统的 C_1 就是它的静态速度误差系数,Ⅱ型系统的 $C_2/2!$ 就是它的静态加速度误差系数。

表 3-3 动态误差系数

C_i	Ⅰ 型	Ⅱ 型
C_0	0	0
C_1	$1/K$	0
$\frac{C_2}{2!}$	$\frac{a_1 - b_1}{K} - \frac{1}{K^2}$	$1/K$
$\frac{C_3}{3!}$	$\frac{1}{K^3} + \frac{2(b_1 - a_1)}{K^2} + \frac{b_1^2 - a_1 b_1 + a_2 - b_2}{K}$	$\frac{a_1 - b_1}{K}$

除了解析计算以外,误差系数也可以从Bode图上求得。图3-10就是一个Ⅰ型系统频率特性的低频部分特性图。因为 -20 dB/dec 的延长线与 0 dB 线的交点 ω_0 就是 K ,因此可得误差系数 C_1 为

$$C_1 = 1/K = 1/\omega_0 \quad (3-22)$$

误差系数 C_2 则可以从 -40 dB/dec 的延长线与 0 dB 线的交点 ω_2 来求得。事实上,式(3-20)中的系数 a_1 可认为就反映在 ω_1 上, $\omega_1 \approx 1/a_1$ 。因此根据表3-3有

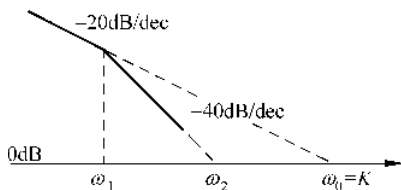


图 3-10 Ⅰ型系统的Bode图

$$\frac{C_2}{2} \approx \frac{a_1}{K} = \frac{1}{\omega_1 \omega_0} = \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^2 \quad (3-23)$$

若为Ⅱ型系统(图3-11),这时 $C_0=C_1=0$,而 C_2 也可以根据 -40 dB/dec 的延长线来求得。因为Ⅱ型系统低频部分 -40 dB/dec 的延长线在 0 dB 线上的交点 ω_2 与增益 K 的关系为 $\omega_2 = \sqrt{K}$,所以根据表3-3得

$$\frac{C_2}{2} = \frac{1}{K} = \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^2 \quad (3-24)$$

总之,从Bode图上根据 -20 dB/dec 的延长线可读出误差系数 C_1 ,根据 -40 dB/dec 的延长线可求得 C_2 。

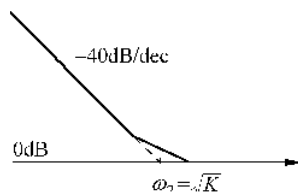


图 3-11 Ⅱ型系统的 Bode 图

3.4 跟踪误差的计算

本节先说明计算的一般方法,然后再用误差系数法进行比较,最后讨论跟踪误差的近似计算,以便于在设计中应用。

3.4.1 卷积法

已知系统的输入与输出之间满足卷积关系

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} h(t) * u(t) \quad (3-25)$$

因此可以利用此关系来计算任意输入下的输出。具体计算时一般均采用数值法,这时就要用卷积和来代替卷积积分。即

$$x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(k-n)u(n) \quad (3-26)$$

式中 $w(k)$ 是单位脉冲响应。注意到

$$w(k) = 0, \quad k < 0$$

另外,系统的脉冲响应在有限时间后实际上可视为零,即

$$w(k) = 0, \quad k \geq N$$

或者说, $w(k)$ 具有一定的宽度 N ,故式(3-26)可写成

$$x(k) = \sum_{n=k-N}^k w(k-n)u(n) \quad (3-27)$$

式(3-27)表明,用数值法计算只要计算有限项,很是方便。图3-12表示了这个运算关系:对应点的坐标相乘,再相加,总共 N 个点。

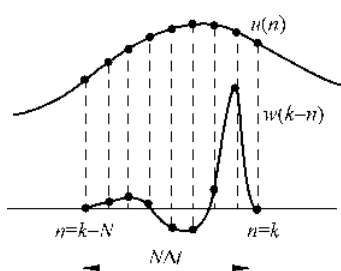


图 3-12 卷积和的运算关系

例 3-1 计算一小功率随动系统的跟踪误差。

设系统的特性已经作了初步设计,其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{Ts + 1}{aTs + 1} \quad (3-28)$$

式中

$$K = 500 \text{ s}^{-1}$$

$$T = 0.025 \text{ s}$$

$$aT = 0.15 \text{ s}$$

图 3-13 为其对应的频率特性。

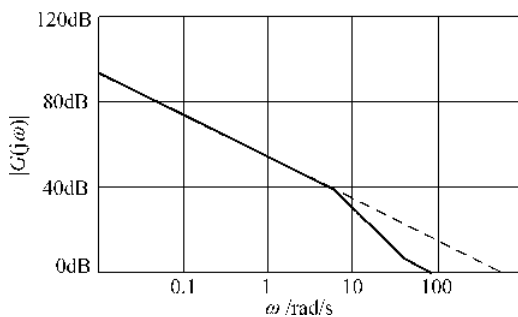


图 3-13 小功率随动系统的频率特性

设该系统跟踪一直线飞行的目标,其输入信号为

$$A(t) = \arctan \frac{Vt}{X_0} = \arctan(at) \quad (3-29)$$

其中 $V=250 \text{ m/s}$, $X_0=500 \text{ m}$, $a=V/X_0=0.5 \text{ s}^{-1}$ 。对应的 dA/dt 和 d^2A/dt^2 的变化曲线见图 3-4。

现取 dA/dt 作为输入信号,并取 $\Delta t=0.01 \text{ s}$,可算得 $1 \times \Delta t$ 脉冲作用下系统的输出响应 $e(t)$ (图 3-14),其离散值就是所求的单位脉冲响应 $w(k)$ 。从图可见,此单位脉冲响应到 0.15 s 时已趋近于零,故可取其宽度为 0.2 s ,即式(3-27)中的宽度 N 取为 20。

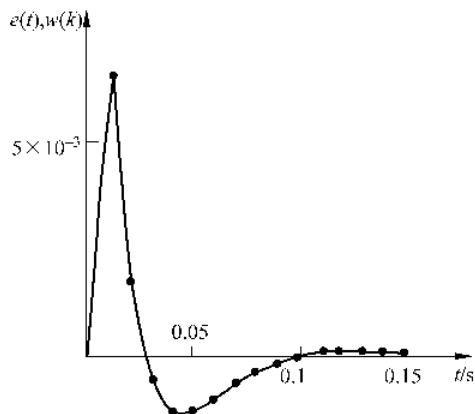


图 3-14 单位脉冲响应

根据这个 $w(k)$, 将 dA/dt 的各离散值作为输入, 依次代入式(3-27)中的 $u(n)$, 就可算得跟踪误差的变化特性, 见图 3-15。本例中误差的最大值为

$$e_{\max} = 1.0064 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

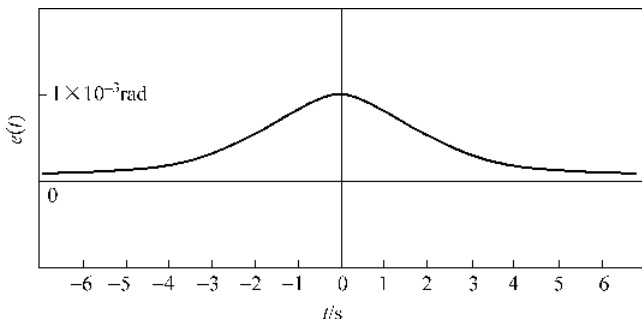


图 3-15 跟踪误差

3.4.2 动态误差系数法

从上面的例题可以看到, 由于系统的单位脉冲响应的宽度是有限的, 只要对 20 个数据进行运算就可以了。或者说输入信号的影响只限于前 0.2 s 就够了。这前 0.2 s 的信号就可用有限项来逼近, 又因为 0.2 s 后过渡过程也已经结束, 所以可以用稳态的概念来计算现在这一时刻的误差:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = C_0 r + C_1 \dot{r} + \frac{C_2}{2!} \ddot{r} + \cdots \approx C_0 r + C_1 \dot{r} + \frac{C_2}{2!} \ddot{r} \quad (3-30)$$

这就是说可以用动态误差系数来计算跟踪误差。这个方法虽有误差, 但使用方便, 而且更主要的是将跟踪误差与系统的参数直接联系在一起, 便于系统的设计。

例 3-2 用动态误差系数法计算例 3-1 中的跟踪误差。

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s} \frac{Ts + 1}{aTs + 1}$$

根据表 3-3 得系统的动态误差系数为

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 1/K = 1/500 = 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$\frac{C_2}{2} = \frac{a_1 - b_1}{K} - \frac{1}{K^2} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ s}^2$$

将各种误差系数代入式(3-30)就可以来计算该系统的跟踪误差了。

例如, 根据式(3-6)和式(3-7)知, $t = -0.1 \text{ s}$ 时输入信号的速度和加速度的值为

$$\dot{r} = 0.4988 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 0.0249 \text{ rad/s}^2$$

代入式(3-30)就可得该时刻的跟踪误差为