第3章 最优控制中的变分法

变分法是求解泛函极值问题的经典方法，也是研究一些基本类型最优控制问题的有效方法。变分法对最优控制理论的发展起了非常重要的作用，后续章节将要介绍的极大值原理可以认为是变分法的发展结果。本章首先简要介绍变分问题和变分法基本原理，然后利用这些原理处理一些基本类型的最优控制问题。

3.1 变分法基本原理

例 3.1（最速滑行曲线问题） 考虑一质量为 m 的质点 M，其在重力的作用下在垂直面内从位置 A 沿某光滑曲线无摩擦滑行到位置 B。如图 3.1 所示，设 A 点和 B 点坐标分别为 $(0,0)$ 和 (x_1, y_1)。欲求一光滑曲线 $y(x)$，使得质点 M 以零初始速度从位置 A 沿曲线 $y(x)$ 滑行到位置 B 所需的时间最短。

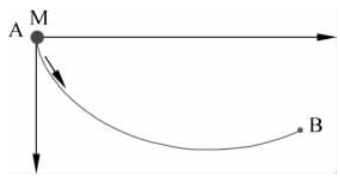

图 3.1 最速滑行问题

所求曲线 $y(x)$ 必须通过点 A$(0,0)$ 和点 B(x_1, y_1)，故有

$$y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1$$

假设质点 M 在曲线 $y(x)$ 上点 (x,y) 处的速度为 v。由物理学可知

$$mgy=\frac{1}{2}mv^2$$

即

$$v=\sqrt{2gy}$$

其中 g 为重力加速度，假设为一常数。质点 M 滑过点 (x,y) 处充分小弧长 $\mathrm{d}s$ 所需的时间为

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{v}=\frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}}{v}=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}}$$

质点 M 从位置 A 沿曲线 $y(x)$ 滑行到位置 B 所需的时间为

$$T(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

对于给定的起始点 A(0,0)和终止点 B(x_1,y_1),滑行时间 $T(y)$是曲线(或函数)$y(x)$的函数。因此,最速滑行问题是一个函数之函数的极值问题。

最速滑行问题是变分法讨论的最古老的问题之一,为了讨论这类问题,我们先给出一些必要的数学概念。

定义 3.1(函数范数)　假设函数向量 $y(x)$的定义域为 $\mathbf{X}$,当存在一常数 C 使得

$$\|y(x)\|\leqslant C,\quad \forall x\in\mathbf{X}$$

其中 $\|y(x)\|$ 表示向量 $y(x)$的欧氏范数,则称函数向量 $y(x)$在 $\mathbf{X}$ 上有界,并定义其函数(无穷)范数为

$$\|y\|=\sup_{x\in\mathbf{X}}\|y(x)\|$$

当 $y(x)$的维数等于 1,即 $y(x)$是一标量时,欧氏范数 $\|y(x)\|$ 等于 $y(x)$在 x 处的绝对值,而函数范数 $\|y\|$ 是其绝对值在 $\mathbf{X}$ 上的上确界。

定义 3.2(函数向量线性空间)　函数向量 $y(x)$构成的集合 $\mathbf{Y}$ 称为**函数向量空间**,如果对于任意的常数 α、$\beta\in\mathbf{R}^1$ 和 $\mathbf{Y}$ 中的任意函数向量 $y_1(x)$、$y_2(x)$,均有

$$\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)\in\mathbf{Y}$$

则称 $\mathbf{Y}$ 为**函数向量线性空间**。如果对于任意给定函数向量 $y(x)\in\mathbf{Y}$,均存在一正实数 $\varepsilon(y)$,成立

$$\{z(x)\mid\|z-y\|\leqslant\varepsilon(y)\}\subset\mathbf{Y}$$

则称 $\mathbf{Y}$ 为**开函数向量空间**。

定义 3.3(函数邻域)　对于函数向量空间 $\mathbf{Y}$ 的函数向量 $y(x)$,定义

$$\mathbf{D}_\varepsilon(y)=\{z(x)\mid\|z-y\|\leqslant\varepsilon,z\neq y,z(x)\in\mathbf{Y}\}$$

称 $\mathbf{D}_\varepsilon(y)$为在 $\mathbf{Y}$ 上函数向量 $y(x)$的(ε-函数)邻域。

定义 3.4(泛函)　若对于给定的函数向量空间 $\mathbf{Y}$ 中的每一个函数向量 $y(x)$,都对应一个确定的数 $J[y(x)]\in\mathbf{R}^1$,则称 $J[y(x)]$是函数向量 $y(x)$的泛函。函数空间 $\mathbf{Y}$ 称为泛函 $J[y(x)]$的定义域(在讨论极值问题时,也称为**容许函数空间**)。

要注意泛函与复合函数的差异。泛函 $J[y(x)]$的值并不直接与 x 的取值相关,而取决于函数向量 $y(x)$。为了明确此差异,有时将函数向量 $y(x)$的泛函写成 $J[y(\cdot)]$或 $J[y]$。

定义 3.5(线性泛函)　假设 $\mathbf{Y}$ 是一函数向量线性空间,$J[y(x)]$是 $\mathbf{Y}$ 上的泛函,如果对于任意的常数 α、$\beta\in\mathbf{R}^1$ 和 $\mathbf{Y}$ 中的任意函数向量 $y_1(x)$、$y_2(x)$,均有

$$J[\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)]=\alpha J[y_1(x)]+\beta J[y_2(x)]$$

则称 $J[y(x)]$是 $\mathbf{Y}$ 上的**线性泛函**。

定义 3.6(泛函极值)　设 $J[y(x)]$是函数向量空间 $\mathbf{Y}$ 上的泛函,如果存在 $\mathbf{Y}$ 中的函数向量 $y^*(x)$,成立

$$J[y^*(x)]\leqslant J[y(x)],\quad \forall y(x)\in\mathbf{Y}$$

则称 $J[y^*(x)]$是泛函 $J[y(x)]$在 $\mathbf{Y}$ 上的(全局)**极小值**,称 $y^*(x)$为(全局)**极小值**

函数。如果存在一正常数 ε,成立

$$J[y^*(x)] \leqslant J[y(x)], \quad \forall\, y(x) \in \mathbf{Y} \cap \mathbf{D}_\varepsilon(y^*)$$

则称 $J[y^*(x)]$是泛函 $J[y(x)]$在 $\mathbf{Y}$ 上的**局部极小值**,称 $y^*(x)$为**局部极小值函数**。

可类似定义泛函的极大值,只需将极小值的定义中的小于或等于号改为大于或等于号。有时也将泛函的极值函数简称为极值曲线或极值解。

定义 3.7(泛函的变分) 考虑泛函 $J[y(x)]$,其定义域为开函数向量空间 $\mathbf{Y}$,如果对应函数向量 $y(x) \in \mathbf{Y}$ 和函数范数充分小的增量 $\delta y(x) \in \mathbf{Y}$,泛函 $J[y(x)]$的增量可以表示为

$$J[y(x)+\delta y(x)]-J[y(x)]=A[y(x),\delta y(x)]+B[y(x),\delta y(x)]$$

其中,$A[y(x),\delta y(x)]$是关于 $\delta y(x)$的线性泛函;$B[y(x),\delta y(x)]$是关于 $\|\delta y\|$ 的高阶无穷小量,则称 $A[y(x),\delta y(x)]$为**泛函** $J[y(x)]$(在 $y(x)$处由增量 $\delta y(x)$产生)**的(一阶)变分**,记为 $\delta J[y(x),\delta y(x)]$,简记为$\delta J\,|_{y=y(x)}$,甚至简记为 δJ;函数向量增量 $\delta y(x)$也称为**函数向量 $\boldsymbol{y(x)}$ 的变分**或**宗量的变分**。

泛函的变分在求解泛函极值问题时所起的作用,如同函数的微分在求解函数极值问题时所起的作用。故也将泛函极值问题称为**变分问题**。

引理 3.1 如果泛函 $J[y(x)]$的定义域为开函数向量空间 $\mathbf{Y}$,其在函数向量 $y(x) \in \mathbf{Y}$ 处由函数范数充分小的增量 $\delta y(x) \in \mathbf{Y}$ 产生的变分存在,则

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y(x)+\alpha \delta y(x)]\Big|_{\alpha=0} \tag{3.1.1}$$

证明 令

$$\Delta J=J[y(x)+\alpha\delta y(x)]-J[y(x)]$$

因为 $J[y(x)]$的变分存在,所以有

$$\begin{aligned}\Delta J &= A[y(x),\alpha\delta y(x)]+B[y(x),\alpha\delta y(x)]\\ &= \alpha A[y(x),\delta y(x)]+B[y(x),\alpha\delta y(x)]\end{aligned}$$

其中,$A[y(x),\delta y(x)]=\delta J$;$B[y(x),\alpha\delta y(x)]$是关于 $\|\alpha\delta y\|$ 的高阶无穷小量。由上式可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y(x)+\alpha\delta y(x)]\Big|_{\alpha=0} &= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta J}{\Delta\alpha}\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha A[y(x)+\delta y(x)]+B[y(x)+\alpha\delta y(x)]}{\alpha}\\ &= \delta J+\lim_{\alpha\to 0}\frac{B[y(x)+\alpha\delta y(x)]}{\|\alpha\delta y\|}\cdot\frac{\|\alpha\delta y\|}{\alpha}\\ &= \delta J\end{aligned}$$

■

假设 $y(x)$和 $\delta y(x)$均是开函数向量线性空间 $\mathbf{Y}$ 中的给定函数向量,并假设 $\delta y(x)$的函数范数充分小,泛函 $J[y(x)]$在 $y(x)$处由 $\delta y(x)$产生的变分为 $\delta J[y(x),\delta y(x)]$,则 $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$是关于 α 的一次可微函数,当 α 充分小时,其可表示为

$$J[y(x)+\alpha\delta y(x)]=J[y(x)]+\alpha\delta J[y(x),\delta y(x)]+\varepsilon(\alpha) \tag{3.1.2}$$

变分 δJ 也是关于 $y(x)$ 的泛函，若其变分也存在，即 $J[y(x)]$ 存在二阶变分，则 $J[y(x)+\alpha\delta y(x)]$ 是关于 α 的二次可微函数，对于充分小的 α，其可表示为

$$J[y(x)+\alpha\delta y(x)]=J[y(x)]+\alpha\delta J[y(x),\delta y(x)] + \frac{1}{2}\alpha^2\delta^2 J[y(x),\delta y(x)]+\varepsilon(\alpha^2) \tag{3.1.3}$$

其中，$\delta^2 J[y(x),\delta y(x)]$ 是 $J[y(x)]$ 在 $y(x)$ 处由 $\delta y(x)$ 产生的二阶变分；$\varepsilon(\rho)$ 是关于 ρ 的高阶无穷小。

定理 3.1　假设泛函 $J[y(x)]$ 的定义域为开函数向量空间 $\mathbf{Y}$，在 $y^*(x)\in\mathbf{Y}$ 处由函数范数充分小的任意增量 $\delta y(x)\in\mathbf{Y}$ 产生的变分存在。如果 $J[y(x)]$ 在 $y^*(x)$ 处达到极值（极大值或极小值），则有

$$\delta J[y^*(x),\delta y(x)]=0$$

证明　因为函数向量空间 $\mathbf{Y}$ 是开的，对于给定的函数 $y^*(x)\in\mathbf{Y}$ 和任意给定的函数范数充分小的增量 $\delta y(x)$，当 α 充分小时，$y^*(x)+\alpha\delta y(x)\in\mathbf{Y}$，$J[y^*(x)+\alpha\delta y(x)]$ 是 α 的函数，并且当 $\alpha=0$ 时，达到极值。因为 $J[y(x)]$ 在 $y^*(x)$ 处由 $\delta y(x)$ 产生的变分存在，所以，$J[y^*(x)+\alpha\delta y(x)]$ 作为 α 的函数在 $\alpha=0$ 处的导数存在且为零，即

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y^*(x)+\alpha\delta y(x)]\bigg|_{\alpha=0}=0$$

由引理 3.1 可知，定理 3.1 的结论成立。■

事实上，利用式（3.1.2）和式（3.1.3）可以进行类似于函数极值的论证，得到泛函极值的一阶变分必要条件和二阶变分必要、充分条件，我们将主要利用一阶变分必要条件。当所讨论的最优控制问题的解存在，而满足一阶必要条件的解唯一时，我们可以认为此解便是最优解。

类似于函数极值问题，我们可以引入 Lagrange 乘子处理有约束情形下的泛函极值问题，得到与第 2 章中的结论类似的结果。

引理 3.2（变分法基本引理）　假设 n 维函数向量 $f(x)$ 的每一个分量 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 均在区间 $[x_a,x_b]$ 上连续。若对于在区间 $[x_a,x_b]$ 上各分量均连续的任意函数向量 $\phi(x)$，其满足 $\phi(x_a)=\phi(x_b)=0$，都成立

$$\int_{x_a}^{x_b} f^{\mathrm{T}}(x)\phi(x)\mathrm{d}x=0$$

则

$$f(x)\equiv 0,\quad \forall x\in[x_a,x_b]$$

证明　反设 $f(x)$ 的某个分量 $f_k(x)$ 在区间 $[x_a,x_b]$ 上不恒等于零，则在区间 $[x_a,x_b]$ 内存在一点 η，$f_k(x)$ 在该点处非零。由于 $f_k(x)$ 在区间 $[x_a,x_b]$ 上连续，故存在区间 $[x_a,x_b]$ 内的一个邻域 (η_a,η_b)，其中 $\eta_b>\eta_a$，$f_k(x)$ 在该邻域 (η_a,η_b) 内非零且不变号，即

$$\mathrm{sign}[f_k(\eta)]f_k(x)>0,\quad \forall x\in(\eta_a,\eta_b)\subset[x_a,x_b]$$

考虑如下构造的函数向量 $\phi(x)$

$$\phi_k(x)=\begin{cases}0, & x\in[x_a,\eta_a]\\ \mathrm{sign}[f_k(\eta)](x-\eta_a)^2(x-\eta_b)^2, & x\in(\eta_a,\eta_b)\\ 0, & x\in[\eta_b,x_b]\end{cases}$$

$$\phi_i(x)=0,\quad i=1,2,\cdots,n,i\neq k;\quad x\in[x_a,x_b]$$

此函数向量 $\phi(x)$显然满足 $\phi(x_a)=\phi(x_b)=0$,且在区间$[x_a,x_b]$上连续,因此满足引理中的条件。对于上述函数向量 $\phi(x)$,成立

$$f^{\mathrm{T}}(x)\phi(x)>0,\quad \forall x\in(\eta_a,\eta_b)$$

因此有

$$\int_{x_a}^{x_b}f^{\mathrm{T}}(x)\phi(x)\mathrm{d}x=\int_{\eta_a}^{\eta_b}f^{\mathrm{T}}(x)\phi(x)\mathrm{d}x>0$$

这与引理中的假设相矛盾。故引理结论成立。 ■

注:从上述证明中可以看出,变分法基本引理中关于函数向量 $f(x)$和 $\phi(x)$的各分量的连续性假设可以放宽为分段连续。

例 3.2 考虑如下变分问题:求二次可微函数向量 $x(t)$,使得泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}F[t,x(t),\dot{x}(t)]\mathrm{d}t$$

达到极值,并且满足边值条件

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_\mathrm{f})=x_\mathrm{f}$$

其中,$F[t,x(t),\dot{x}(t)]\in\mathbf{R}^1$ 对 $t,x(t),\dot{x}(t)$存在二阶偏导数,t_0、t_f 为给定常数,且 $t_\mathrm{f}>t_0$,x_0、x_f 为给定常数向量。此问题被称为**边值条件固定的 Lagrange 问题**。

假设上述 Lagrange 问题的极值解为 $x^*(t)$。令

$$x(t)=x^*(t)+\alpha\delta x(t)$$

其中,α 为一充分小标量;$\delta x(t)$为满足如下边值条件的任意二次可微函数向量

$$\delta x(t_0)=\delta x(t_\mathrm{f})=0$$

则

$$\begin{aligned}J&=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}F[t,x(t),\dot{x}(t)]\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}F[t,x^*(t)+\alpha\delta x(t),\dot{x}^*(t)+\alpha\delta\dot{x}(t)]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

根据引理 3.1 有

$$\begin{aligned}\delta J\mid_{x^*(t)}&=\left.\frac{\partial J}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\\&=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}\left\{F_{x^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]\delta x(t)+F_{\dot{x}^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]\delta\dot{x}(t)\right\}\mathrm{d}t\\&=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}F_{x^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]\delta x(t)\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}F_{\dot{x}^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]\mathrm{d}(\delta x(t))\\&=\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}F_{x^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]\delta x(t)\mathrm{d}t-\int_{t_0}^{t_\mathrm{f}}\frac{\mathrm{d}F_{\dot{x}^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]}{\mathrm{d}t}\delta x(t)\mathrm{d}t\\&\quad+F_{\dot{x}^\mathrm{T}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]\delta x(t)\Big|_{t_0}^{t_\mathrm{f}}\end{aligned}$$

由定理 3.1 和边值条件可得

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{F_{x^{\mathrm{T}}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_{\dot{x}^{\mathrm{T}}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)])\right\}\delta x(t)\mathrm{d}t=0$$

由 $\delta x(t)$ 的任意性和变分法基本引理得

$$F_x[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_{\dot{x}}[t,x^*(t),\dot{x}^*(t)])=0 \tag{3.1.4}$$

此方程被称为 **Euler-Lagrange 方程**。

满足 Euler-Lagrange 方程是函数向量 $x^*(t)$ 成为边值条件固定的 Lagrange 问题的极值解的必要条件。Euler-Lagrange 方程是二阶微分方程组，其积分常数由边值条件确定。

例 3.3（**最速滑行曲线问题求解**）　最速滑行曲线的变分问题可描述为边值条件固定的 Lagrange 问题，求函数 $y(x)$，在满足边值条件

$$y(0)=0,\quad y(x_1)=y_1$$

的同时，使得泛函

$$T(y(x))=\int_0^{x_1}F[y(x),\dot{y}(x)]\mathrm{d}x$$

达到极小，其中

$$F[y(x),\dot{y}(x)]=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}$$

相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}}=0$$

显然 $y(x)$ 等于常数不是极值解，即极值解的导数不恒等于零，因此，极值解满足如下方程

$$\dot{y}F_y-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}}\right)\dot{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F-F_{\dot{y}}\dot{y})=0$$

即

$$\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}-\frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c$$

其中 c 为一常数。整理上式得

$$y(1+\dot{y}^2)=k^2$$

其中

$$k^2=\frac{1}{2gc^2}$$

求解上述方程并利用边值条件 $y(0)=0$ 可知，极值解的参数方程为

$$x=\frac{k^2}{2}(\theta-\sin\theta),\quad y=\frac{k^2}{2}(1-\cos\theta)$$

这是一个旋轮线方程，其中的常数 k 由边值条件 $y(x_1)=y_1$ 确定。

上述极值解是 Euler-Lagrange 方程的唯一解，而该问题必存在最小值解，可知所求得的极值曲线必是欲求的最速滑行曲线。

3.2 无终端约束的最优控制

无终端约束的最优控制问题可以描述为：对于受控系统

$$\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t],\quad x(t_0)=x_0 \tag{3.2.1}$$

在给定的容许控制集 $\mathbf{U}$ 中求一控制 $u(t)\in\mathbf{U}$，$t\in[t_0,t_f]$，使得性能指标

$$J[u]=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t \tag{3.2.2}$$

为最小或最大。这里 x_0 是一给定的常数向量，t_0 和 t_f 分别为给定的起始时刻和终端时刻。

注：上述最优控制问题中，没有对终端状态 $x(t_f)$ 施加任何约束，即认为 $\mathbf{M}=\mathbf{R}^n$。

假设 3.1 容许控制集 $\mathbf{U}$ 为一开集。

假设 3.2 $\Phi[x(t_f),t_f]$ 关于 $x(t_f)$ 和 t_f 存在连续偏导数，$f[x(t),u(t),t]$ 和 $L[x(t),u(t),t]$ 关于 $x(t)$，$u(t)$ 和 t 存在连续偏导数。

在上述假设下，对于给定的初始状态 $x(t_0)$ 和（分段连续）控制 $u(t)$，$t\in[t_0,t_f]$，状态 $x(t)$，$t\in[t_0,t_f]$ 是唯一确定的。因此性能指标表达式虽然显含状态 $x(t)$ 和控制 $u(t)$，但性能指标仅是控制 $u(t)$ 的泛函，故记作 $J[u]$。

受控系统的状态方程可以视为等式约束，即

$$f[x(t),u(t),t]-\dot{x}(t)=0$$

引入一（分段）连续可微函数向量 $\lambda(t)$，称为 **Lagrange 乘子**，定义 **Hamilton 函数**

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t]=L[x(t),u(t),t]+\lambda^{\mathrm{T}}(t)f[x(t),u(t),t] \tag{3.2.3}$$

并定义泛函

$$\hat{J}=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]-\lambda^{\mathrm{T}}(t)\dot{x}(t)\}\mathrm{d}t$$

对上式中的 $\lambda^{\mathrm{T}}(t)\dot{x}(t)$ 项作分部积分，得

$$\begin{aligned}\hat{J}=&\Phi[x(t_f),t_f]-\lambda^{\mathrm{T}}(t_f)x(t_f)+\lambda^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)\\&+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)x(t)\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对于某个给定的控制变量 $u(t)$，考虑其变分 $\delta u(t)$ 对各相关量的影响，由于状态方程的关联，$\delta u(t)$ 会产生状态变量 $x(t)$ 的变分 $\delta x(t)$，从而导致泛函 $\hat{J}$ 的变分 $\delta\hat{J}$。因没有对终端状态 $x(t_f)$ 的约束，变分 $\delta u(t)$ 会产生 $x(t_f)$ 的变分 $\delta x(t_f)$。因为，Lagrange 乘子 $\lambda(t)$ 为待定函数向量，与控制 $u(t)$ 以及状态 $x(t)$ 无直接关联，所以，控制 $u(t)$ 的变分 $\delta u(t)$ 不会导致 $\lambda(t)$ 的变分。因此，对应变分 $\delta u(t)$，有

$$\begin{aligned}\delta\hat{J}=&\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x^{\mathrm{T}}(t_f)}\delta x(t_f)-\lambda^{\mathrm{T}}(t_f)\delta x(t_f)\\&+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial H[x(t),u(t),\lambda(t),t]}{\partial x^{\mathrm{T}}(t)}\delta x(t)+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\delta x(t)\right\}\mathrm{d}t\\&+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial H[x(t),u(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

如果选取 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$满足如下微分方程和终端条件

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H[x(t),u(t),\lambda(t),t]}{\partial x(t)}$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\Phi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}$$

则

$$\delta\hat{J}=\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial H[x(t),u(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

当容许控制集 **U** 为开集时，在 $\|\delta u\|$ 充分小的前提下，变分 $\delta u(t)$可以是任意连续函数。由定理 3.1 和引理 3.2 可知，若 $u^*(t)$是最优控制，即 $u^*(t)$使得性能指标 $J[u]$达到最大或最小，$x^*(t)$是相应的最优轨线，则

$$\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^*(t)}=0,\quad \forall t\in[t_0,t_f]$$

总结上述分析，可以得到如下结论。

定理 3.2　对于式(3.2.1)所描述的受控对象，假设初始状态 $x(t_0)$、起始时刻 t_0 和终端时刻 t_f 均给定，而容许控制集 **U** 为一开集。对应式(3.2.2)的性能指标，若 $u^*(t)$和 $x^*(t)$分别为最优控制和最优轨线，则存在适当选取的 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$，如下方程和等式成立：

(1) 规范方程　对于 $t\in[t_0,t_f]$

$$\dot{x}^*(t)=\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial\lambda(t)}=f[x^*(t),u^*(t),t]$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^*(t)}\tag{3.2.4}$$

其中 Hamilton 函数 H 如式(3.2.3)所定义；

(2) 边值条件

$$x(t_0)=x_0$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\Phi[x^*(t_f),t_f]}{\partial x^*(t_f)}\tag{3.2.5}$$

(3) 极值条件　对于 $t\in[t_0,t_f]$

$$\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^*(t)}=0$$

注：关于 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$的动态方程式(3.2.4)被称为**协态方程**。相应于状态 $x(t)$，$\lambda(t)$被称为**协态**。上述极值条件中是对 $u^*(t)$求偏导数，不必考虑 $x^*(t)$和 $\lambda(t)$通过规范方程与 $u^*(t)$的关联。有时也将极值条件称为**驻点条件**，因为其要求 Hamilton 函数 H 关于 $u^*(t)$的梯度等于零。有时还将极值条件称为**耦合方程**，因为它是关于 $u^*(t)$，$x^*(t)$和 $\lambda(t)$的代数方程，在通常情况下，给出了 $u^*(t)$与 $x^*(t)$和 $\lambda(t)$的“耦合”关系。

例 3.4(最优消费问题——有收入情形)　假设某人现有资金(或有息资产)x_0 元，其在 t 时刻的资金和(单位时间内)消费分别为 $x(t)$元和 $u(t)$元。假设目前收入

为 r 元，收入增长率为常数 ρ，银行利率和贴现率分别为常数 α 和 β。则该人的资金 $x(t)$ 满足如下动态方程

$$\dot{x}(t)=\alpha x(t)+r\mathrm{e}^{\rho t}-u(t)$$

假设该人到退休还有期限 t_{f}，其总效用为

$$J[u]=q\sqrt{x(t_{\mathrm{f}})}\,\mathrm{e}^{-\beta t_{\mathrm{f}}}+\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\mathrm{e}^{-\beta t}\sqrt{u(t)}\,\mathrm{d}t$$

其中，$\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\mathrm{e}^{-\beta t}\sqrt{u(t)}\,\mathrm{d}t$ 为退休前的消费效用；$\sqrt{x(t_{\mathrm{f}})}\,\mathrm{e}^{-\beta t_{\mathrm{f}}}$ 为养老效用；q 为养老效用的权重系数。欲设计最优消费策略 $u(t)$，使得总效用 $J[u]$ 达到最大。

定义 Hamilton 函数

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t]=\mathrm{e}^{-\beta t}\sqrt{u(t)}+\lambda(t)[\alpha x(t)+r\mathrm{e}^{\rho t}-u(t)]$$

则协态方程及其边值条件为

$$\dot{\lambda}(t)=-\alpha\lambda(t)$$

$$\lambda(t_{\mathrm{f}})=\frac{q\mathrm{e}^{-\beta t_{\mathrm{f}}}}{2\sqrt{x(t_{\mathrm{f}})}}$$

解得

$$\lambda(t)=\frac{q\mathrm{e}^{-\beta t_{\mathrm{f}}}}{2\sqrt{x(t_{\mathrm{f}})}}\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_{\mathrm{f}})}$$

由极值条件，有

$$\frac{\mathrm{e}^{-\beta t}}{2\sqrt{u(t)}}-\lambda(t)=0$$

求解得到最优消费策略

$$u(t)=\frac{\mathrm{e}^{-2\beta t}}{4\lambda^2(t)}=\frac{1}{q^2}x(t_{\mathrm{f}})\mathrm{e}^{-2(\beta-\alpha)(t-t_{\mathrm{f}})}$$

将上式结果代入资金动态方程，并假设 $\alpha\neq 2\beta$（对于 $\alpha=2\beta$ 的情形，可类似处理），可解得

$$x(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}x_0+\frac{r}{\rho-\alpha}(\mathrm{e}^{\rho t}-\mathrm{e}^{\alpha t})-\frac{x(t_{\mathrm{f}})\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)t_{\mathrm{f}}}}{q^2(\alpha-2\beta)}[\mathrm{e}^{-2(\beta-\alpha)t}-\mathrm{e}^{\alpha t}]$$

在上式中令 $t=t_{\mathrm{f}}$，解得

$$x(t_{\mathrm{f}})=\frac{\mathrm{e}^{\alpha t_{\mathrm{f}}}x_0+\dfrac{r}{\rho-\alpha}(\mathrm{e}^{\rho t_{\mathrm{f}}}-\mathrm{e}^{\alpha t_{\mathrm{f}}})}{1+\dfrac{1}{q^2(\alpha-2\beta)}[1-\mathrm{e}^{(2\beta-\alpha)t_{\mathrm{f}}}]}$$

假设 $\alpha=0.03$、$\beta=0.02$、$r=5000$、$\rho=0.05$、$x_0=10^5$、$t_{\mathrm{f}}=30$、$q=10$，则相应的最优消费策略为

$$u(t)=3055\mathrm{e}^{0.02t}$$

30 年后的养老储蓄为

$$x(30)=556711$$

注：上述所求得的最优消费策略不是资金（状态）的反馈形式，与资金实时值

$x(t)$无直接关联，是一种开环形式的控制策略。

3.3　终端固定约束的最优控制

本节考虑初始时刻 t_0、初始状态 $x(t_0)$、终端时刻 t_f 和终端状态 $x(t_f)$均为给定的情形，对于给定的终端时刻 t_f 和终端状态 $x(t_f)$，函数 $\Phi[x(t_f),t_f]$是一个常数，所以，对应于控制变量 $u(t)$的变分 $\delta u(t)$，$\Phi[x(t_f),t_f]$的变分为零。如果选择 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$使其满足协态方程式(3.2.4)，则由 $\delta u(t)$所产生泛函$\hat{J}$的变分$\delta\hat{J}$仍为

$$\delta\hat{J}=\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial H[x(t),u(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

注意，此时终端状态 $x(t_f)$为给定的常数向量，其变分 $\delta x(t_f)=0$。变分 $\delta u(t)$受到此条件的约束，不能是任意的。因此，一般不能由变分 $\delta\hat{J}=0$ 导出极值条件。但是，如果受控系统是状态完全可控的，则可以证明，在上述情形下，极值条件仍然成立。

定理 3.3　假设式(3.2.1)所描述的受控对象是状态完全可控的，初始状态 $x(t_0)$、初始时刻 t_0、终端状态 $x(t_f)$和终端时刻 t_f 均给定，且 $x(t_0)=x_0$，$x(t_f)=x_f$，而容许控制集 $\mathbf{U}$ 为一开集。对应式(3.2.2)的性能指标，若 $u^*(t)$和 $x^*(t)$分别为最优控制和最优轨线，则存在适当选取的 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$，如下方程和等式成立：

(1) 规范方程

$$\dot{x}^*(t)=\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial\lambda(t)}=f[x^*(t),u^*(t),t]$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^*(t)}$$

其中 Hamilton 函数 H 如式(3.2.3)所定义；

(2) 边值条件

$$x(t_0)=x_0,\quad x(t_f)=x_f$$

(3) 极值条件

$$\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^*(t)}=0$$

例 3.5(电机制动最优控制问题)　考虑直流电机的速度控制问题，在忽略电枢电感和黏性阻尼时，电机的动态特性可由如下微分方程描述

$$T_m\dot{\omega}(t)+\omega(t)=\frac{1}{K_e}u(t)$$

其中，$\omega(t)$为电机转速；$u(t)$为电枢电压；T_m 为机电时间常数；K_e 为反电动势系数。假设电机初始转速为 $\omega(0)=1$，欲设计电枢电压 $u(t)$，使得电机在 t_f 时刻停止，即$\omega(t_f)=0$，且使得控制能量最小，即使得

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t$$

达到最小。

将电机动态方程改写为状态方程的形式

$$\dot{\omega}(t)=-\frac{1}{T_{\mathrm{m}}}\omega(t)+\frac{1}{K_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{m}}}u(t)$$

定义 Hamilton 函数为

$$H[\omega(t),u(t),\lambda(t)]=\frac{1}{2}u^2(t)+\lambda(t)\left[-\frac{1}{T_{\mathrm{m}}}\omega(t)+\frac{1}{K_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{m}}}u(t)\right]$$

则协态方程为

$$\dot{\lambda}(t)=\frac{1}{T_{\mathrm{m}}}\lambda(t)$$

解得协态为

$$\lambda(t)=\mathrm{e}^{t/T_{\mathrm{m}}}\lambda(0)$$

由极值条件有

$$\frac{\partial H}{\partial u}=u(t)+\lambda(t)\frac{1}{K_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{m}}}=0$$

解得

$$u(t)=-\mathrm{e}^{t/T_{\mathrm{m}}}\frac{\lambda(0)}{K_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{m}}}$$

将上式代入电机状态方程，求解可得

$$\begin{aligned}\omega(t)&=\mathrm{e}^{-t/T_{\mathrm{m}}}\omega(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-\tau)/T_{\mathrm{m}}}\frac{1}{K_{\mathrm{e}}T_{\mathrm{m}}}u(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\mathrm{e}^{-t/T_{\mathrm{m}}}\omega(0)+\frac{\lambda(0)}{2K_{\mathrm{e}}^2T_{\mathrm{m}}}(\mathrm{e}^{-t/T_{\mathrm{m}}}-\mathrm{e}^{t/T_{\mathrm{m}}})\end{aligned}$$

由 $\omega(0)=1$ 和 $\omega(t_{\mathrm{f}})=0$，可解得

$$\lambda(0)=\frac{2K_{\mathrm{e}}^2T_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-t_{\mathrm{f}}/T_{\mathrm{m}}}}{\mathrm{e}^{t_{\mathrm{f}}/T_{\mathrm{m}}}-\mathrm{e}^{-t_{\mathrm{f}}/T_{\mathrm{m}}}}$$

故最优控制为

$$u(t)=-\mathrm{e}^{t/T_{\mathrm{m}}}\frac{2K_{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-t_{\mathrm{f}}/T_{\mathrm{m}}}}{\mathrm{e}^{t_{\mathrm{f}}/T_{\mathrm{m}}}-\mathrm{e}^{-t_{\mathrm{f}}/T_{\mathrm{m}}}},\quad t\in[0,t_{\mathrm{f}}]$$

这里我们再次注意到，所求得的最优控制是一开环控制律。

3.4 终端等式约束的最优控制

较之终端状态 $x(t_{\mathrm{f}})$ 给定的情形更为一般的情况是要求终端状态 $x(t_{\mathrm{f}})$ 满足一组代数方程，即满足如下终端等式约束

$$g[x(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]=0,\quad g\in\mathbf{R}^l$$

其中函数向量 g 对于 $x(t_{\mathrm{f}})$ 存在一阶偏导数，$l\leqslant n$。事实上，上述终端等式约束定义了目标集 $\mathbf{M}$。

为了处理具有终端等式约束时的最优控制问题，引入一个待定常数向量 $\mu\in\mathbf{R}^l$，

并定义泛函

$$\hat{J}=\Phi[x(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]+g^{\mathrm{T}}[x(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]\mu+\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]-\lambda^{\mathrm{T}}(t)\dot{x}(t)\}\mathrm{d}t$$

其中 H 为式(3.2.3)所定义的 Hamilton 函数。

类似于 3.2 节中的讨论，假设上述等式约束下的最优控制问题的解为 $u^*(t)$，相应的最优轨线为 $x^*(t)$，考虑由 $u^*(t)$ 的变分 $\delta u(t)$ 所产生的泛函 $\hat{J}$ 的变分 $\delta\hat{J}$，则有

$$\begin{aligned}\delta\hat{J}=&\frac{\partial\Phi[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})}\delta x(t_{\mathrm{f}})-\lambda^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})\delta x(t_{\mathrm{f}})+\mu^{\mathrm{T}}\frac{\partial g[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})}\delta x(t_{\mathrm{f}})\\&+\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}\left\{\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t)}\delta x(t)+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\delta x(t)\right\}\mathrm{d}t\\&+\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}\left\{\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{*\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

若选取 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$ 使得协态方程式(3.2.4)成立，而 $\lambda(t)$ 的终端值选为

$$\lambda(t_{\mathrm{f}})=\frac{\partial\Phi[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]}{\partial x^*(t_{\mathrm{f}})}+\frac{\partial g^{\mathrm{T}}[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]}{\partial x^*(t_{\mathrm{f}})}\mu$$

则

$$\delta\hat{J}=\int_{t_0}^{t_{\mathrm{f}}}\left\{\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{*\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

当受控对象为状态完全可控时，同样可证极值条件成立。

定理 3.4　假设式(3.2.1)所描述的受控对象是状态完全可控的，初始状态 $x(t_0)=x_0$，初始时刻 t_0 和终端时刻 t_{f} 均给定，容许控制集 $\mathbf{U}$ 为一开集。在如下终端等式约束条件下

$$g[x(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]=0,\quad g\in\mathbf{R}^l$$

对应式(3.2.2)的性能指标，若 $u^*(t)$ 和 $x^*(t)$ 分别为最优控制和最优轨线，则存在适当选取的 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$ 和 μ，如下方程和等式成立：

(1) 规范方程

$$\dot{x}^*(t)=\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial\lambda(t)}=f[x^*(t),u^*(t),t]$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^*(t)}$$

其中 Hamilton 函数 H 如式(3.2.3)所定义；

(2) 边值条件

$$x(t_0)=x_0$$

$$\lambda(t_{\mathrm{f}})=\frac{\partial\Phi[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]}{\partial x^*(t_{\mathrm{f}})}+\frac{\partial g^{\mathrm{T}}[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]}{\partial x^*(t_{\mathrm{f}})}\mu$$

$$g[x^*(t_{\mathrm{f}}),t_{\mathrm{f}}]=0$$

(3) 极值条件

$$\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^*(t)}=0$$

例 3.6(空间飞行器变轨问题) 假设在 t 时刻,空间飞行器的飞行高度(与地球质心距离)为 $r(t)$,径向速度为 $u(t)$,切向速度为 $v(t)$(图 3.2)。为简化起见,将空间飞行器视为一个质点,质量为一常数 m。火箭发动机在时间$[0,t_f]$内点火工作(t_f 为给定常数),其在 t 时刻的径向推力为 $mf(t)$,切向推力为 $mh(t)$。变轨过程的简化运动方程为

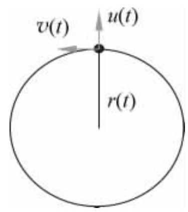

图 3.2 空间飞行器变轨问题

$$\dot{r}(t)=u(t)$$
$$\dot{u}(t)=\frac{v^2(t)}{r(t)}-\frac{\mu}{r^2(t)}+f(t)$$
$$\dot{v}(t)=-\frac{u(t)v(t)}{r(t)}+h(t)$$

其中 μ 为引力中心的重力常数。为了求得近似的解析解,将变轨过程的运动方程进一步简化为

$$\dot{r}(t)=u(t)$$
$$\dot{u}(t)=f(t)$$
$$\dot{v}(t)=h(t)$$

初始条件为

$$r(0)=r_0,\quad u(0)=u_0=0,\quad v(0)=v_0=\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$

终端约束条件为

$$u(t_f)=0,\quad v(t_f)=\sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}$$

欲求控制律 $f(t)$、$h(t)$,使空间飞行器达到尽可能高的运行轨道并耗能最少,即使得

$$J=-qr(t_f)+\int_0^{t_f}[f^2(t)+h^2(t)]\mathrm{d}t$$

达最小,其中 q 是一给定正数。

引入 Lagrange 常数乘子 ρ_u、ρ_v 和函数乘子 $\lambda_r(t)$、$\lambda_u(t)$、$\lambda_v(t)$,性能指标改写为

$$\hat{J}=-qr(t_f)+\rho_u u(t_f)+\rho_v\left[v(t_f)-\sqrt{\frac{\mu}{r(t_f)}}\right]+\int_0^{t_f}[f^2(t)+h^2(t)]\mathrm{d}t$$

Hamilton 函数定义为

$$H=f^2(t)+h^2(t)+\lambda_r(t)u(t)+\lambda_u(t)f(t)+\lambda_v(t)h(t)$$

则相应的协态方程为

$$\dot{\lambda}_r(t)=0$$
$$\dot{\lambda}_u(t)=-\lambda_r(t)$$
$$\dot{\lambda}_v(t)=0$$

协态的终端条件为

$$\lambda_r(t_f)=-q+\frac{\rho_v\sqrt{\mu}}{2r(t_f)\sqrt{r(t_f)}},\quad \lambda_u(t_f)=\rho_u,\quad \lambda_v(t_f)=\rho_v$$

求解协态方程并利用其终端条件,得

$$\lambda_r(t) = \lambda_r = -q + \frac{\rho_v\sqrt{\mu}}{2r(t_f)\sqrt{r(t_f)}}$$

$$\lambda_u(t) = -\lambda_r(t - t_f) + \rho_u$$

$$\lambda_v(t) = \rho_v$$

由极值条件有

$$2f(t)+\lambda_u(t)=0,\quad 2h(t)+\lambda_v(t)=0$$

解得

$$f(t) = \frac{1}{2}(\lambda_r t - \lambda_r t_f - \rho_u)$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}\rho_v$$

由空间飞行器的运动方程解得

$$r(t) = r_0 - \frac{1}{4}(\lambda_r t_f + \rho_u)t^2 + \frac{\lambda_r}{12}t^3$$

$$u(t) = -\frac{1}{2}(\lambda_r t_f + \rho_u)t + \frac{\lambda_r}{4}t^2$$

$$v(t) = v_0 - \frac{1}{2}\rho_v t$$

由终端约束条件,可求得 ρ_u、ρ_v 和 $r(t_f)$。

3.5　终端时刻自由的最优控制

本节首先讨论终端时刻 t_f 和终端状态 $x(t_f)$ 均为自由的情形,假设 $u^*(t)$ 为最优控制,$x^*(t)$ 为最优轨线,t_f^* 为最优终端时刻。此时,将终端时刻 t_f 视为一个控制参数,对控制输入 $u(t)$ 和终端时刻 t_f 分别在 $u^*(t)$ 和 t_f^* 的充分小邻域内作任意变分 $\delta u(t)$ 和 $\mathrm{d}t_f$。由于变分 $\delta u(t)$ 和 $\mathrm{d}t_f$,除了会导致 $x^*(t)$ 的变分 $\delta x(t)$ 和泛函 $\hat{J}$ 的变分 $\delta\hat{J}$ 之外,还会产生终端状态 $x^*(t_f)$ 的变分 $\delta x(t_f)$。令

$$u(t) = u^*(t) + \alpha\delta u(t)$$

$$x(t) = x^*(t) + \alpha\delta x(t)$$

$$t_f = t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f$$

其中 α 为一充分小实数。则

$$\begin{aligned} x(t_f) &= x^*(t_f) + \alpha\delta x(t_f) \\ &= x^*(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f) + \alpha\delta x(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f) \end{aligned}$$

而泛函 $\hat{J}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \hat{J}[u^*(t) + \alpha\delta u(t)] = {} & \Phi[x^*(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f) + \alpha\delta x(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f), t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f] \\ & - \lambda^{\mathrm{T}}(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f)[x^*(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f) + \alpha\delta x(t_f^* + \alpha\mathrm{d}t_f)] \end{aligned}$$

$$+\lambda^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f^*+\alpha \mathrm{d}t_f}\{H[x^*(t)+\alpha\delta x(t),u^*(t)$$

$$+\alpha\delta u(t),\lambda(t),t]+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\}\mathrm{d}t$$

由引理 3.1 可知，泛函$\hat{J}$的变分$\delta\hat{J}$为

$$\delta\hat{J}=\left[\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t_f^*)}-\lambda^{\mathrm{T}}(t_f^*)\right][\dot{x}^*(t_f^*)\mathrm{d}t_f+\delta x(t_f^*)]$$

$$+\left[\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f^*}+H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]\right]\mathrm{d}t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\left\{\left[\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t)}+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\right]\delta x(t)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{*\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

如果 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$满足协态方程式(3.2.4)和终端条件式(3.2.5)，则

$$\delta\hat{J}=\left[\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f^*}+H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]\right]\mathrm{d}t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{*\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\mathrm{d}t$$

由于变分 $\delta u(t)$和 $\mathrm{d}t_f$ 的任意性知，极值条件成立，且 Hamilton 函数在终端满足如下等式

$$H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]=-\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f^*}$$

整理上述讨论，可以得到如下结论。

定理 3.5 对于式(3.2.1)所描述的受控对象，假设初始状态 $x(t_0)$和初始时刻 t_0 给定，且 $x(t_0)=x_0$，而容许控制集 **U** 为一开集。对应式(3.2.2)的性能指标，若 $u^*(t)$和 $x^*(t)$分别为最优控制和最优轨线，t_f^* 为最优终端时刻，则存在适当选取的 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$，如下方程和等式成立：

(1) 规范方程

$$\dot{x}^*(t)=\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial\lambda(t)}=f[x^*(t),u^*(t),t]$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^*(t)}$$

其中 Hamilton 函数 H 如式(3.2.3)所定义；

(2) 边值条件

$$x(t_0)=x_0$$

$$\lambda(t_f^*)=\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial x^*(t_f^*)}$$

(3) 极值条件

$$\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^*(t)}=0$$

(4) 终端条件

$$H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]=-\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f^*}$$

对于终端时刻 t_f 自由而终端状态 $x(t_f)$受约束的情形,可以类似处理。假设存在如下终端等式约束

$$g[x(t_f),t_f]=0,\quad g\in\mathbf{R}^l$$

其中函数向量 g 对于 $x(t_f)$存在一阶偏导数,令

$$\hat{\Phi}[x(t_f),t_f]=\Phi[x(t_f),t_f]+g^{\mathrm{T}}[x(t_f),t_f]\mu$$

其中 μ 是 Lagrange 常数乘子。以 $\hat{\Phi}[x(t_f),t_f]$替代上述论述中的 $\Phi[x(t_f),t_f]$,在受控系统可控性的假设下,可以得到与定理 3.5 类似的结论。

由上述各节的论述中可见,对于不同的终端约束,会导致不同的边界条件,但对于最优控制和最优轨线,规范方程总是成立,在容许控制集 **U** 为一开集和受控对象为状态完全可控的假设下,Hamilton 函数 H 对 $u(t)$的偏导数总等于零,因此,总成立

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\partial x^{\mathrm{T}}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial u^{\mathrm{T}}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial\lambda^{\mathrm{T}}}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=\frac{\partial H}{\partial x^{\mathrm{T}}}\frac{\partial H}{\partial\lambda}+\frac{\partial H}{\partial u^{\mathrm{T}}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial\lambda^{\mathrm{T}}}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=\frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}$$

由此可知,当 Hamilton 函数 H 不显含 t(即受控对象是定常系统并且性能指标的被积函数不显含 t)时,其恒等于常数

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t]=H[x(t_f^*),u(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]=H[x(t_0),u(t_0),\lambda(t_0),t_0]$$

对于此情形,若终端时刻是自由的且终端型性能指标部分 Φ 不显含终端时刻 t_f,则 Hamilton 函数 H 恒等于零,即

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t]=0,\quad t\in[t_0,t_f]$$

对于 Hamilton 函数 H 显含 t 的情形,则对于 $t\in[t_0,t_f]$,成立

$$H[x(t),u(t),\lambda(t),t]=H[x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f]+\int_{t_f}^{t}\frac{\partial H[x(\tau),u(\tau),\lambda(\tau),\tau]}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$$

上述等式被称为 Hamilton **函数 H 沿最优解等式**。第 4 章将介绍的极小值原理表明,在容许控制集 **U** 不是开集时,上述 Hamilton 函数 H 沿最优解等式仍然成立。

例 3.7　给定平面上的一个圆,其由如下方程描述

$$\Sigma:(y-5)^2+(x-5)^2=1$$

欲求原点到圆 Σ 的最短距离(图 3.3)。

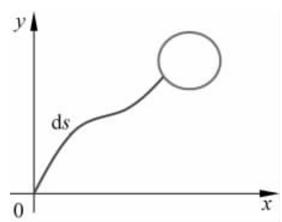

图 3.3　点到圆的最短距离问题

假设 $y(x)$是一条过原点且与圆 Σ 相交的曲线。该曲线上在(x,y)处的微小线段长度近似等于

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$$

令

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u$$

则从原点沿曲线 $y(x)$到圆 Σ 的距离为

$$S=\int_{0}^{x_1}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}x$$

其中 x_1 是随着 x 从 0 开始增大，曲线 $y(x)$首次与圆 Σ 相交时 x 的值，其满足圆方程，即满足终端约束条件

$$(y(x_1)-5)^2+(x_1-5)^2=1$$

这样将求最短距离问题描述为具有终端等式约束的最优控制问题。

引入 Lagrange 常数乘子 η 和函数乘子 $\lambda(x)$，定义扩展性能指标

$$\hat{S}=\mu[(y(x_1)-5)^2+(x_1-5)^2-1]+\int_{0}^{x_1}\sqrt{1+u^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

且定义 Hamilton 函数

$$H[u(x),\lambda(x)]=\sqrt{1+u^2(x)}+\lambda(x)u(x)$$

则相应的协态方程为

$$\dot{\lambda}(x)=0$$

其边值条件为

$$\lambda(x_1)=2\mu(y(x_1)-5)$$

可知，$\lambda(x)$是一常数

$$\lambda(x)=\lambda(x_1)=2\mu(y(x_1)-5)$$

由极值条件有

$$\frac{u(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}+\lambda(x)=0$$

解得

$$u(x)=-\frac{\lambda(x_1)}{\sqrt{1-\lambda^2(x_1)}}$$

因此曲线 $y(x)$是一条过原点的直线

$$y(x)=-\frac{\lambda(x_1)}{\sqrt{1-\lambda^2(x_1)}}x$$

由终端条件有

$$\sqrt{1+u^2(x_1)}+\lambda(x_1)u(x_1)=-2\mu(x_1-5)$$

联立协态边值条件、极值条件和终端条件，可解得

$$\mu^2=\frac{1}{4}$$

联立上述求得的直线方程和终端约束圆方程，可解得

$$x_1=5-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y_1=5-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

最后求得极值解为

$$y(x)=x$$

从原点到圆 Σ 的最短距离为

$$S_{\min}=\sqrt{2}\,x_1=5\sqrt{2}-1$$

3.6　内点等式约束的最优控制

本章的前面几节讨论了各种终端约束下的最优控制问题，在一些情形下，会对控制过程中某时刻的状态，有一定形式的约束。本节讨论的问题是在 3.5 节中讨论的（终端时刻 t_f 自由）问题中加入如下内点状态等式约束

$$g[x(t_1),t_1]=0,\quad g\in\mathbf{R}^k$$

其中，t_1 是区间(t_0,t_f)内某时刻，是自由的；g 是 k 维连续可微函数向量。此时，由于变分 $\delta u(t)$和 $\mathrm{d}t_f$，除了会产生最优轨迹 $x^*(t)$的变分 $\delta x(t)$、最优终端状态 $x^*(t_f)$的变分 $\delta x(t_f)$和泛函$\hat{J}$的变分$\delta\hat{J}$之外，还会产生最优内点状态 $x^*(t_1)$的变分 $\delta x(t_1)$和最优内点时刻 t_1^* 的变分 $\mathrm{d}t_1$。令

$$\begin{aligned} t_1 &= t_1^*+\alpha\mathrm{d}t_1 \\ x(t_1) &= x^*(t_1)+\alpha\delta x(t_1) \end{aligned}$$

以 t_{1-} 和 t_{1+} 分别表示极限

$$t_{1-}=\lim_{\varepsilon\to 0_-}(t_1+\varepsilon),\quad t_{1+}=\lim_{\varepsilon\to 0_+}(t_1+\varepsilon)$$

假设系统状态及其微分是连续的。则

$$\begin{aligned} \delta x(t_{1-}^*) &= \delta x(t_{1+}^*) \\ \dot{x}^*(t_{1-}^*) &= \dot{x}^*(t_{1+}^*) \end{aligned}$$

考虑如下扩展性能指标

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \Phi[x(t_f),t_f]+g^{\mathrm{T}}[x(t_1),t_1]\mu+\int_{t_0}^{t_f}\{H[x(t),u(t),\lambda(t),t]-\lambda^{\mathrm{T}}(t)\,\dot{x}(t)\}\mathrm{d}t \\ &= \Phi[x(t_f),t_f]+g^{\mathrm{T}}[x(t_1),t_1]\mu+\int_{t_0}^{t_{1-}}[H-\lambda^{\mathrm{T}}\,\dot{x}]\mathrm{d}t+\int_{t_{1+}}^{t_f}[H-\lambda^{\mathrm{T}}\,\dot{x}]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

在下面的讨论中我们将看到，需要选取 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$为分段连续可微函数向量，其在时刻 t_1^* 处可存在跳变。所以，在上式中将积分分段写成两项。由

$$\begin{aligned} \hat{J}[u^*(t)+\alpha\delta u(t)] =& \Phi[x^*(t_f^*+\alpha\mathrm{d}t_f)+\alpha\delta x(t_f^*+\alpha\mathrm{d}t_f),t_f^*+\alpha\mathrm{d}t_f] \\ &+g^{\mathrm{T}}[x^*(t_1^*+\alpha\mathrm{d}t_1)+\alpha\delta x(t_1^*+\alpha\mathrm{d}t_1),t_1^*+\alpha\mathrm{d}t_1]\mu \\ &-\lambda^{\mathrm{T}}(t_{1-}^*+\alpha\mathrm{d}t_{1-})[x^*(t_{1-}^*+\alpha\mathrm{d}t_{1-})+\alpha\delta x(t_{1-}^*+\alpha\mathrm{d}t_{1-})] \\ &+\lambda^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)-\lambda^{\mathrm{T}}(t_f^*+\alpha\mathrm{d}t_f)[x^*(t_f^*+\alpha\mathrm{d}t_f) \\ &+\alpha\delta x(t_f^*+\alpha\mathrm{d}t_f)]+\lambda^{\mathrm{T}}(t_{1+}^*+\alpha\mathrm{d}t_{1+})[x^*(t_{1+}^*+\alpha\mathrm{d}t_{1+}) \\ &+\alpha\delta x(t_{1+}^*+\alpha\mathrm{d}t_{1+})]+\int_{t_0}^{t_{1-}^*+\alpha\mathrm{d}t_1}\{H[x^*(t)+\alpha\delta x(t),u^*(t) \end{aligned}$$

$$+\alpha\delta u(t),\lambda(t),t]+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\}\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_{1+}^*+\alpha \mathrm{d}t_1}^{t_f^*+\alpha \mathrm{d}t_f}\{H[x^*(t)+\alpha\delta x(t),u^*(t)+\alpha\delta u(t),\lambda(t),t]$$

$$+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)[x^*(t)+\alpha\delta x(t)]\}\mathrm{d}t$$

可求得$\hat{J}$的变分$\delta\hat{J}$为

$$\delta\hat{J}=\left\{\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t_f^*)}-\lambda^{\mathrm{T}}(t_f^*)\right\}[\dot{x}^*(t_f^*)\mathrm{d}t_f+\delta x(t_f^*)]$$

$$+\left\{\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f^*}+H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]\right\}\mathrm{d}t_f$$

$$+\left\{\lambda^{\mathrm{T}}(t_{1+}^*)-\lambda^{\mathrm{T}}(t_{1-}^*)+\mu^{\mathrm{T}}\frac{\partial g[x^*(t_1^*),t_1^*]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t_1^*)}\right\}[\dot{x}^*(t_1^*)\mathrm{d}t_1+\delta x(t_1^*)]$$

$$+\left\{H\Big|_{t_{1-}^*}-H\Big|_{t_{1+}^*}+\mu^{\mathrm{T}}\frac{\partial g[x^*(t_1^*),t_1^*]}{\partial t_1^*}\right\}\mathrm{d}t_1$$

$$+\int_{t_0}^{t_f^*}\left\{\left[\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^{*\mathrm{T}}(t)}+\dot{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\right]\delta x(t)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^{*\mathrm{T}}(t)}\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t$$

由此,我们可以得到如下结论。

定理 3.6 假设状态完全可控受控对象式(3.2.1)的初始状态 $x(t_0)=x_0$ 和初始时刻 t_0 给定,容许控制集 $\mathbf{U}$ 为一开集。在如下内点状态等式约束条件下

$$g[x(t_1),t_1]=0,\quad g\in\mathbf{R}^k,\quad t_1\in(t_0,t_f)$$

对应式(3.2.2)的性能指标,若 $u^*(t)$和 $x^*(t)$分别为最优控制和最优轨线,t_f^* 和 t_1^* 分别为最优终端时刻和最优内点时刻,则存在适当选取的 Lagrange 乘子 $\lambda(t)$和 μ,如下方程和等式成立:

(1) 规范方程

$$\dot{x}^*(t)=\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial\lambda(t)}=f[x^*(t),u^*(t),t]$$

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial x^*(t)}$$

(2) 边值条件和内点条件

$$x(t_0)=x_0$$

$$\lambda(t_f^*)=\frac{\partial\Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial x^*(t_f^*)}$$

$$\lambda(t_{1+}^*)-\lambda(t_{1-}^*)=-\frac{\partial g^{\mathrm{T}}[x^*(t_1^*),t_1^*]}{\partial x^*(t_1^*)}\mu$$

$$H\Big|_{t_{1+}^*}-H\Big|_{t_{1-}^*}=\frac{\partial g^{\mathrm{T}}[x^*(t_1^*),t_1^*]}{\partial t_1^*}\mu$$

$$g[x^*(t_1^*),t_1^*]=0$$

(3) 极值条件

$$\frac{\partial H[x^*(t),u^*(t),\lambda(t),t]}{\partial u^*(t)}=0$$

(4) 终端条件

$$H[x^*(t_f^*),u^*(t_f^*),\lambda(t_f^*),t_f^*]=-\frac{\partial \Phi[x^*(t_f^*),t_f^*]}{\partial t_f^*}$$

注：因为 g 是连续可微函数向量，其偏导数在 t_1^* 处的值是连续的。因此，我们不区分其在 t_{1-}^* 和 t_{1+}^* 的值。由上述定理中的边界条件可知，Lagrange 乘子 $\lambda(t)$ 和 Hamilton 函数 H 在 t_1^* 处的值可能有跳变。在内点状态等式约束下的最优控制问题的求解问题是一个三点边值问题。

例 3.8　假设一系统的运动方程为

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=u(t)$$

给定初始时刻 $t_0=0$，终端时刻 $t_f=2$ 和初始状态 $x_1(0)=x_2(0)=0$。欲求控制律 $u(t),t\in[0,2]$，使得

$$x_1(t_1)=h,\quad x_1(2)=0,\quad x_2(2)=0$$

且使得性能指标

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\mathrm{d}t$$

达最小，其中 $t_1\in(0,2)$ 是内点时刻（未给定），$h=200$。

引入 Lagrange 常数乘子 η_1、η_2 和 μ，函数乘子 $\lambda_1(t)$ 和 $\lambda_2(t)$，则扩展性能指标定义为

$$\hat{J}=\mu[x_1(t_1)-h]+\eta_1 x_1(2)+\eta_2 x_2(2)+\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)\mathrm{d}t$$

Hamilton 函数定义为

$$H[x_2(t),u(t),\lambda_1(t),\lambda_2(t)]=\lambda_1(t)x_2(t)+\lambda_2(t)u(t)+\frac{1}{2}u^2(t)$$

协态方程为

$$\dot{\lambda}_1(t)=0,\quad \dot{\lambda}_2(t)=-\lambda_1(t)$$

协态的边值条件和内点条件分别为

$$\lambda_1(2)=\eta_1,\quad \lambda_2(2)=\eta_2$$
$$\lambda_1(t_{1+})-\lambda_1(t_{1-})=-\mu$$
$$\lambda_2(t_{1+})-\lambda_2(t_{1-})=0$$

解得

$$\lambda_1(t)=\eta_1+\mu,\quad \lambda_2(t)=-(\eta_1+\mu)t+2\eta_1+\mu t_1+\eta_2,\quad t\in[0,t_1)$$
$$\lambda_1(t)=\eta_1,\quad \lambda_2(t)=-\eta_1(t-2)+\eta_2,\quad t\in[t_1,2]$$

注意，在 t_1 处，$\lambda_1(t)$ 有跳变，而 $\lambda_2(t)$ 是连续的。

由极值条件得

$$u(t)=-\lambda_2(t)=\begin{cases}(\eta_1+\mu)t-2\eta_1-\mu t_1-\eta_2, & t\in[0,t_1)\\ \eta_1(t-2)-\eta_2, & t\in[t_1,2]\end{cases}$$

求解运动方程，并考虑初始条件和在内点处状态的连续性，得

$$x_2(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\eta_1+\mu)t^2-(2\eta_1+\mu t_1+\eta_2)t, & t\in[0,t_1)\\ \frac{\eta_1}{2}(t-2)^2-\eta_2 t-\frac{\mu}{2}t_1^2-2\eta_1, & t\in[t_1,2]\end{cases}$$

$$x_1(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}(\eta_1+\mu)t^3-\frac{1}{2}(2\eta_1+\mu t_1+\eta_2)t^2, & t\in[0,t_1)\\ \frac{\eta_1}{6}(t-2)^3-\frac{1}{2}\eta_2 t^2-\left(\frac{\mu}{2}t_1^2+2\eta_1\right)t+\frac{1}{6}\mu t_1^3+\frac{4}{3}\eta_1, & t\in[t_1,2]\end{cases}$$

在 t_1 处，因为 $\lambda_2(t)$和 $u(t)$是连续的，而 $\lambda_1(t)$有跳变，由 $H\Big|_{t_{1+}}-H\Big|_{t_{1-}}=0$ 可知，$x_2(t_1)=0$。联立状态的终端条件（$x_1(2)=0,x_2(2)=0$）和内点状态等式约束条件（$x_1(t_1)=200,x_2(t_1)=0$），可解得

$$\eta_1=2400,\quad \eta_2=-1200,\quad \mu=-4800,\quad t_1=1$$

最优控制律为

$$u(t)=\begin{cases}-2400t+1200, & t\in[0,1)\\ 2400t-3600, & t\in[1,2]\end{cases}$$

上述所求得最优控制 $u(t)$和最优状态 $x_1(t)$、$x_2(t)$分别如图 3.4、图 3.5 和图 3.6 所示。

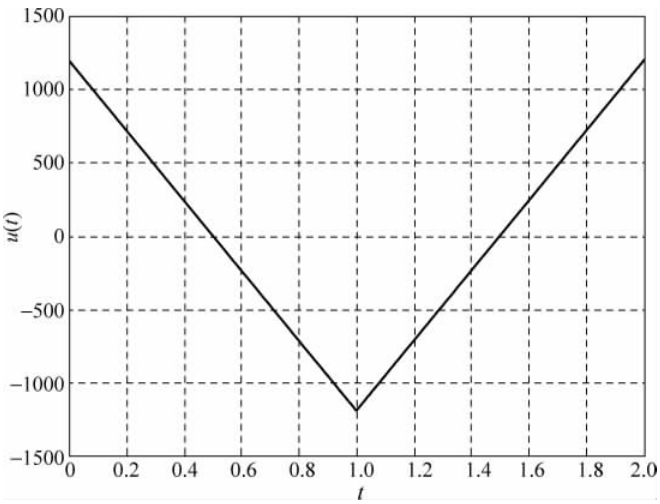

图 3.4 最优控制 $u(t)$

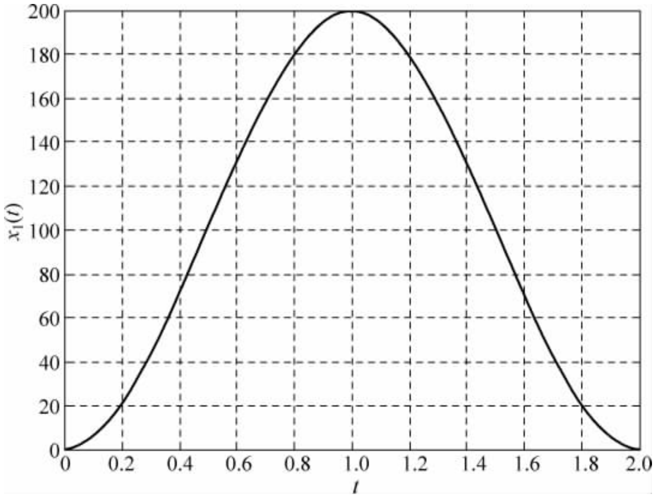

图 3.5　最优状态 $x_1(t)$

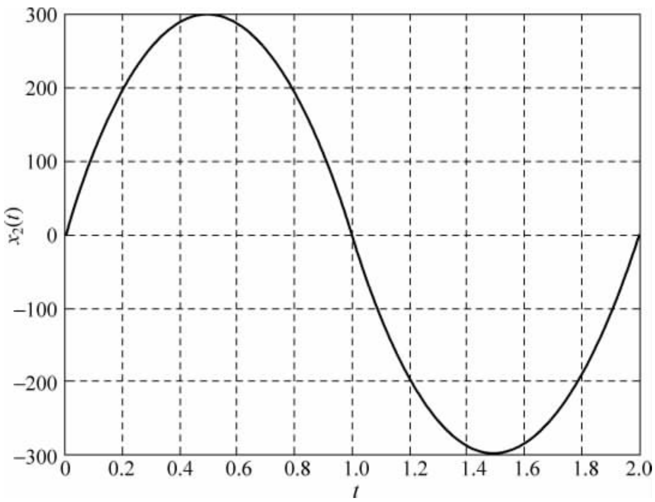

图 3.6　最优状态 $x_2(t)$

3.7　离散时间系统最优控制

考虑如下离散时间受控对象

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k], \quad k_0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{3.7.1}$$

其中，$x(k) \in \mathbf{R}^n$ 和 $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 分别为时刻 k（或第 k 次采样）的受控系统状态和控制输入；函数向量 f 对于 $x(k)$ 和 $u(k)$ 具有连续偏导数，起始时刻 k_0 和终端时刻 N 是给定整数。假设初始状态 $x(k_0)=x_0$ 给定，终端状态需满足等式约束

$$g[x(N), N]=0, \quad g \in \mathbf{R}^l$$

其中函数向量 g 对于 $x(N)$ 存在一阶偏导数，$l\leqslant n$。假设容许控制集 $\mathbf{U}$ 为一开集，性能指标为

$$J=\Phi[x(N),N]+\sum_{k=k_0}^{N-1}L[x(k),u(k),k] \tag{3.7.2}$$

其中，函数 Φ 对于 $x(N)$ 具有一阶偏导数；函数 L 对于 $x(k)$ 和 $u(k)$ 均具有一阶偏导数。

定义 Hamilton 函数为

$$H[x(k),u(k),\lambda(k+1),k]=L[x(k),u(k),k]+\lambda^{\mathrm{T}}(k+1)f[x(k),u(k),k]$$

则扩展的性能指标为

$$\begin{aligned}\hat{J}=&\Phi[x(N),N]+g^{\mathrm{T}}[x(N),N]\eta\\&+\sum_{k=k_0}^{N-1}\{L[x(k),u(k),k]+\lambda^{\mathrm{T}}(k+1)[f[x(k),u(k),k]-x(k+1)]\}\end{aligned}$$

扩展后的性能指标可改写为

$$\begin{aligned}\hat{J}=&\Phi[x(N),N]+g^{\mathrm{T}}[x(N),N]\eta-\lambda^{\mathrm{T}}(N)x(N)+H[x(k_0),u(k_0),\lambda(k_0+1),k_0]\\&+\sum_{k=k_0+1}^{N-1}\{H[x(k),u(k),\lambda(k+1),k]-\lambda^{\mathrm{T}}(k)x(k)\}\end{aligned}$$

对于某给定的控制序列 $\{u(k_0),u(k_0+1),\cdots,u(N-1)\}$，考虑变分 $\delta u(k)(k=k_0,\ k_0+1,\cdots,N-1)$，其导致状态的变分为 $\delta x(k)(k=k_0+1,k_0+2,\cdots,N)$，性能指标 $\hat{J}$ 的变分为

$$\begin{aligned}\delta\hat{J}=&\left[\frac{\partial\Phi[x(N),N]}{\partial x^{\mathrm{T}}(N)}+\eta^{\mathrm{T}}\frac{\partial g[x(N),N]}{\partial x^{\mathrm{T}}(N)}-\lambda^{\mathrm{T}}(N)\right]\delta x(N)\\&+\frac{\partial H[x(k_0),u(k_0),\lambda(k_0+1),k_0]}{\partial u^{\mathrm{T}}(k_0)}\delta u(k_0)\\&+\sum_{k=k_0+1}^{N-1}\left\{\left[\frac{\partial H[x(k),u(k),\lambda(k+1),k]}{\partial x^{\mathrm{T}}(k)}-\lambda^{\mathrm{T}}(k)\right]\delta x(k)\right\}\\&+\sum_{k=k_0+1}^{N-1}\left\{\frac{\partial H[x(k),u(k),\lambda(k+1),k]}{\partial u^{\mathrm{T}}(k)}\delta u(k)\right\}\end{aligned}$$

由上式可知，适当选取 Lagrange 乘子，由控制的变分 $\delta u(k)(k=k_0,k_0+1,\cdots,N-1)$ 的任意性，可以得到无终端状态约束的离散时间系统最优控制应满足的必要条件（对于离散系统，可以证明类似于引理 3.2 的结论成立）。

定理 3.7 假设离散时间受控对象式(3.7.1)的初始状态 $x(k_0)=x_0$、初始时刻 k_0 以及终端时刻 N 均给定，容许控制集 $\mathbf{U}$ 为一开集。对应于式(3.7.2)的性能指标，最优控制序列为 $\{u^*(k_0),u^*(k_0+1),\cdots,u^*(N-1)\}$，相应的最优状态序列为 $\{x^*(k_0+1),x^*(k_0+2),\cdots,x^*(N)\}$，则存在适当选取的 Lagrange 乘子序列 $\{\lambda(k_0+1),\lambda(k_0+2),\cdots,\lambda(N)\}$，如下方程和等式成立：

(1) 规范方程

$$x^*(k+1)=\frac{\partial H[x^*(k),u^*(k),\lambda(k+1),k]}{\partial\lambda(k+1)}=f[x^*(k),u^*(k),k]$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \cdots, N-1$$

$$\lambda(k) = \frac{\partial H[x^*(k), u^*(k), \lambda(k+1), k]}{\partial x^*(k)}$$

$$k = k_0 + 1, k_0 + 2, \cdots, N-1$$

（2）边值条件

$$x(k_0) = x_0$$

$$\lambda(N) = \frac{\partial \Phi[x^*(N), N]}{\partial x^*(N)} + \frac{\partial g^{\mathrm{T}}[x^*(N), N]}{\partial x^*(N)}\eta$$

$$g[x^*(N), N] = 0$$

（3）极值条件

$$\frac{\partial H[x^*(k), u^*(k), \lambda(k+1), k]}{\partial u^*(k)} = 0, \quad k = k_0, k_0+1, \cdots, N-1$$

例 3.9（最优消费策略——离散情形） 假设某人持有资金 x_0 元，其计划在 N 年内消费这笔资金。假设银行存款利率为 α，贴现率为 β，均为常数。设在第 k 年此人所持有的可消费资金（包括银行存款利息）为 $x(k)$元，该年其消费为 $u(k)$元，在消费资金 $u(k)$元的过程中此人所获得的效用为

$$L(k) = \sqrt{u(k)}\,\mathrm{e}^{-\beta k}$$

则此人持有资金满足状态方程

$$x(k+1) = (1+\alpha)x(k) - u(k)$$

持有资金的初始值和终端值为

$$x(t_0) = x_0, \quad x(N) = 0$$

其获得的总效用为 $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \sqrt{u(k)}\,\mathrm{e}^{-\beta k}$。考虑如下扩展性能指标

$$\hat{J} = x(N)\eta - \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{u(k)}\,\mathrm{e}^{-\beta k}$$

其中 η 是 Lagrange 常数乘子。

对于上述问题的 Hamilton 函数为

$$H[x(k), u(k), \lambda(k+1), k] = -\sqrt{u(k)}\,\mathrm{e}^{-\beta k} + \lambda(k+1)[(1+\alpha)x(k) - u(k)]$$

协态方程及其边值条件为

$$\lambda(k) = (1+\alpha)\lambda(k+1)$$

$$\lambda(N) = \eta$$

可解得协态为

$$\lambda(k) = \eta(1+\alpha)^{(N-k)}$$

由极值条件有

$$-\frac{\mathrm{e}^{-\beta k}}{2\sqrt{u(k)}} = \lambda(k+1)$$

联立协态方程及其边值条件以及极值条件，解得最优消费策略为

$$u(k) = \frac{\mathrm{e}^{-2\beta k}}{4\lambda^2(k+1)} = \frac{\mathrm{e}^{-2\beta k}}{4\eta^2(1+\alpha)^{2(N-k-1)}}$$

由状态方程和终端等式约束有

$$x(N)=(1+\alpha)^N x_0-\frac{1}{\eta^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{-2\beta(N-i)}}{4(1+\alpha)^{(i-1)}}=0$$

解得

$$\eta=-\sqrt{\frac{1}{(1+\alpha)^N x_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{-2\beta(N-i)}}{4(1+\alpha)^{(i-1)}}}$$

考虑 $\alpha=0.0300$ 和 $\alpha=0.0526$，$\beta=0.1054$ 和 $\beta=0.0513$(分别对应于 $e^{-\beta}=0.9$ 和 $e^{-\beta}=0.95=1/1.0526$)的情形，持有资金的初始值 $x(t_0)=400$ 万，消费时间为 40 年，相应的最优消费策略 $u(k)$和最优持有资金 $x(k)$分别如图 3.7 和图 3.8 所示。

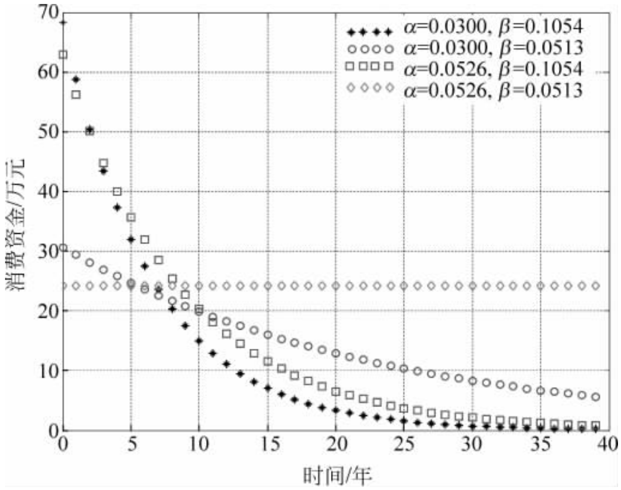

图 3.7 最优消费策略(离散情形)

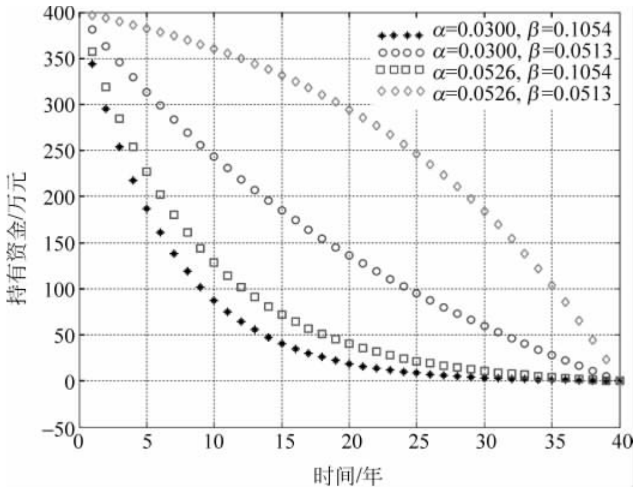

图 3.8 最优持有资金(离散情形)

习题 3

3.1　求泛函

$$J=\int_0^1[4y^2(t)+\dot{y}^2(t)]\mathrm{d}t$$

在边界条件 $y(0)=0,y(1)=1$ 下的最小值。

3.2　假设函数 $F[t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t)]\in\mathbf{R}^1$，对 t、$x(t)$、$\dot{x}(t)$、$\ddot{x}(t)$ 存在二阶偏导数，考虑泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F[t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t)]\mathrm{d}t$$

给出使得泛函 J 达到极小值且满足如下边界条件的函数向量 $x(t)$ 应满足的必要条件。

$$x(t_0)=x_0,\quad \dot{x}(t_0)=v_0,\quad x(t_f)=x_f,\quad \dot{x}(t_f)=v_f$$

其中 t_0、t_f 为给定常数，且 $t_f>t_0$，x_0、v_0、x_f、v_f 均为给定常数向量。

3.3　假设系统运动方程为

$$\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)$$

初始时间和初始状态分别为 $t_0=0,x(0)=1$，终端时间为 $t_f=1$。求使得如下性能指标达到最小的控制 $u(t),t\in[0,1]$。

$$J=qx^2(1)+\int_0^1u^2(t)\mathrm{d}t$$

其中 q 为给定正数。

3.4　考虑一阶系统

$$\dot{x}(t)=x(t)+2u(t)$$

其初始状态为 $x(0)=0$，试求控制律 $u(t),t\in[0,5]$，使得 $x(5)=10$，且使得如下性能指标达到最小。

$$J=\int_0^5[x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

3.5　考虑一线性定常二阶系统

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)+u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=u_2(t)$$

给定初始时间为 $t_0=0$，初始状态为 $x(0)=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$，终端时间为 $t_f=1$，$x_2(t)$ 的终端值为 $x_2(1)=0$。求控制向量 $u(t),t\in[0,1]$，使得如下性能指标达到最小（注意，仅第二个状态分量的终端值是给定的）。

$$J=\int_0^1[u_1^2(t)+u_2^2(t)]\mathrm{d}t$$

3.6　已知系统的运动方程和初始状态为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=-x_1(t)+x_2(t), & x_1(1)&=0\\ \dot{x}_2(t)&=u(t), & x_2(1)&=0\end{aligned}$$

给定初始时间为 $t_0=1$，终端时间为 $t_f=2$。要求控制 $u(t), t\in[1,2]$，使得终端状态满足等式约束

$$x_1(2)+x_2(2)=2$$

且使得如下性能指标达到最小。

$$J=\int_1^2 u^2(t)\mathrm{d}t$$

3.7　对于系统 $\dot{x}(t)=-x(t)+u(t), x(0)=2$，求终端时间 t_f 和控制 $u(t), t\in[0,t_f]$，使得 $x(t_f)=0$，且使得性能指标 $J=t_f^2+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t$ 达到最小。

3.8　考虑离散系统

$$x(k+1)=x(k)+u(k)$$

对于初始状态 $x(0)=1$，求控制序列 $u(k), k=0,1,\cdots,6$，使得终端状态为 $x(7)=-1$，且使得代价函数 $J=\sum_{k=0}^{6}u^2(k)$ 为最小。