



1.1 引言

自动化水平的高低是衡量一个国家现代化程度的重要标志之一。目前自动控制技术已广泛地应用于工业、农业、国防乃至日常生活的许多领域,在改善工作条件,减少劳动强度、提高产品质量和生产效率,帮助人类改造自然、探知未来、建设高度文明社会等方面都扮演了重要角色。

控制工程将自动控制理论应用于化工、机械、能源、航空航天、交通、建筑、生物等工程领域,包括对各类企业的生产、销售、经营以及对经济和社会各部门的活动进行控制与管理。控制工程的设计是以自动控制理论为基础,同时必须理解被控制工程系统的规律,综合应用有关的知识才能完成。一个具体的工程控制系统常常要用到各种类型的部件,如机械的、电气的、电子的、液压的、气动的以及它们的组合。因此控制工程是一项综合工程。从事控制领域的工作人员,要努力掌握有关方面的知识,如各种装置的原理、特性,以及由这些装置组合而成的一个控制系统分析、设计的知识。本书主要讨论自动控制系统的分析、设计的基本方法——反馈控制理论,为自动控制系统设计打下基础。

最简单的控制系统是开环控制,图 1-1 是开环控制系统的框图。

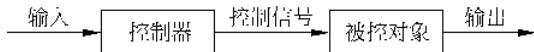


图 1-1 开环控制系统框图

开环控制系统将输入信号通过控制器产生控制信号,控制信号直接作用于被控对象,使系统产生预期的输出。开环系统结构简单,成本低廉,工作稳定,不存在振荡问题。当在输入和扰动确定的情况下,开环控制仍可取得比较满意的结果。但是,由于开环控制不能自动修正系统元件参数的变化以及外来未知干扰对系统精度的影响,所以为了获

得期望的输出,就必须选用高质量的元器件,其结果必然导致投资增加、成本提高。

另一种是闭环控制系统(如图 1-2)。它对系统的输出进行测量,并将它反馈至输入端与输入(预期的输出)进行比较(相减),利用其误差信号对系统进行控制。这种闭环控制系统就是反馈控制系统,它能够有效地抑制元件参数的变化以及外来未知干扰的影响。反馈控制系统是本书研究的重点。



图 1-2 闭环控制系统框图

早在公元前,古希腊就使用了浮球调节器来保持油灯的燃油液面高度。1796 年 James Watt 发明的飞球调节器(离心调速器),用来控制蒸汽机的转速,是最早用于工业的反馈控制器。这些自动控制装置都是人们在生产实践中针对具体的控制系统发明的,随着对控制系统精度要求的提高,开始了对控制理论的研究。到 20 世纪,随着通信和电子技术的发展,对反馈控制理论的研究得到进一步发展,逐渐形成一套完整的反馈控制理论——(经典)控制理论,它包括时域分析、复数域和频域(后两者有时统称为复频域)的分析和设计方法。经典控制理论主要考虑单输入单输出系统(单变量系统),它为设计稳定的、能满足一定性能指标的控制系统提供了一套实用的方法。许多学者在这方面都作出过重大贡献,如 J. C. Maxwell、H. Nyquist、H. W. Bode 和 W. B. Evans 等。

随着航空航天技术和生产自动化技术的发展要求,最优控制和多变量系统研究开始受到关注,并逐步形成了现代控制理论。现代控制理论以多变量系统为研究对象,以状态空间法为研究方法。这种方法主要在时域中研究系统,它深刻地揭示了控制系统的许多基本特点和性质,并可以定量地进行系统的分析和设计。现代控制理论经过几十年的发展,已形成许多学科分支,如线性系统理论,最优控制,系统辨识,自适应控制,鲁棒控制和非线性控制系统理论等。必须指出,控制理论的应用和发展是与计算机技术的应用和发展紧密联系的。离开计算机强大的、高速的计算能力,就不可能实现生产的现代自动化。

1.2 自动控制系统的基本原理和组成

1.2.1 自动控制系统基本原理

自动控制系统是指离开人的直接干预,利用控制装置(简称控制器)使被控对象(或生产过程等)的工作状态(或被控量如:温度、压力、流量、pH 值、位置、速度

等)按照预定的要求运行的系统。下面通过两个例子来说明自动控制系统的基本工作原理。

1. 温度控制系统

图 1-3 是闭环温度控制系统。

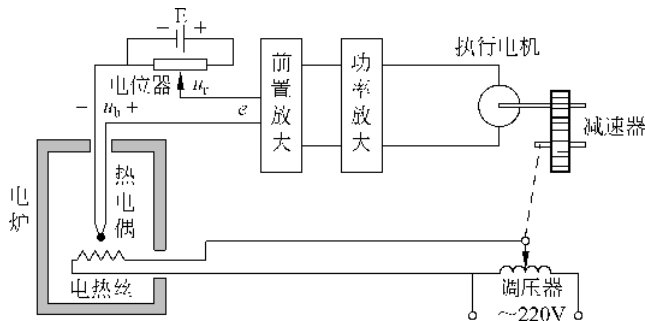


图 1-3 闭环温度控制系统

其工作原理如下：将给定信号电位器的电压设定在对应于期望温度的数值 u_r 上，热电偶测量炉内温度，其输出是电压 u_b ， u_b 与给定电压 u_r 比较，若炉内温度低于期望温度时，比较电路的输出电压(系统的误差信号) $e = u_r - u_b > 0$ ，误差信号 e 经放大器放大，驱动执行电机，通过减速器使调压器向增大输出电压的方向转动，从而使炉温升高。只有当炉内温度与期望温度相等时， $e = u_r - u_b = 0$ ，电机停转，系统达到平衡状态。

若炉内温度低于期望温度时，系统将执行相反的控制过程。

可见，系统由比较电路产生的电压误差信号 e 对系统产生控制作用，在炉内温度达到期望值时，误差信号 $e = 0$ ，控制作用消失，否则 $e \neq 0$ ，执行电机转动，控制调压器的移动臂朝减少误差的方向滑动，这样系统就实现了温度的自动控制。

图 1-3 系统的原理框图如图 1-4 所示。

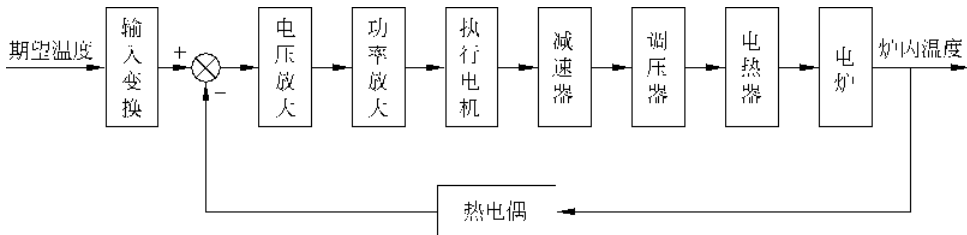


图 1-4 闭环炉温控制系统原理框图

图中⊗是比较元件的符号，在本系统中是比较电路。从以上分析看出：闭环控制系统之所以能保持温度为期望值，是系统中引入了负反馈，利用比较元件

产生的误差信号进行控制。这样的系统能自动消除如外界扰动和系统参数变化等因素引起的误差。所以闭环控制系统就是利用系统误差来消除系统误差。

2. 自动火炮角度跟踪系统

图 1-5 是典型的自动火炮系统中角度跟踪系统原理框图。其工作原理如下：当雷达捕捉到目标(飞机)后,即将测得的飞机有关运动数据(如距离、方位角、俯仰角、速度等)送入指挥仪进行处理,计算出火炮发射所需的位置角(方位角和俯仰角)提前量数据输入收信仪。同时,将通过检测装置测得的火炮实际位置角也输入到收信仪并进行比较。当二者存在误差时,收信仪就会输出一个电压信号,经放大后驱动执行电机,使执行电机按一定的速度和方向旋转,再经过减速装置,使火炮自动地按位置角提前量跟踪目标,这样,当目标进入火炮的射击范围时,指挥仪便发出射击指令,打击目标。

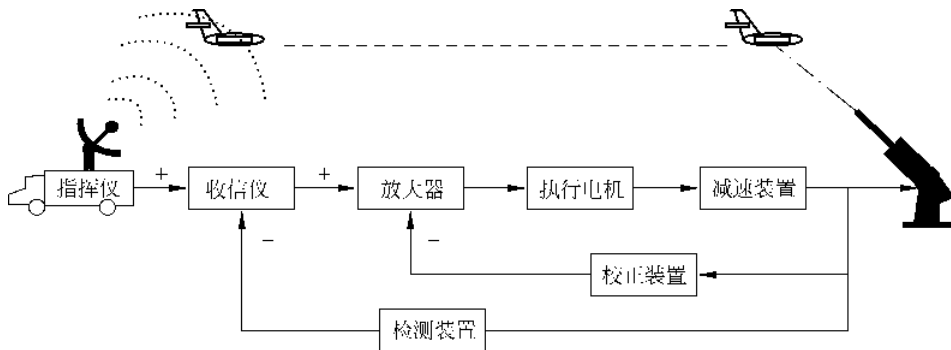


图 1-5 自动火炮角度跟踪系统框图

这是一个闭环控制系统,系统中引入了负反馈信号,收信仪是比较装置,它产生的系统误差信号对系统进行控制,从而消除误差。它也是利用系统误差来消除系统误差。

闭环控制系统工作时可能产生振荡,甚至不稳定,使系统无法正常工作。图 1-5 中的校正装置便是为改善系统的性能而设计的。

1.2.2 自动控制系统的组成

从上面两个例子可以看出,典型的闭环系统组成框图一般具有图 1-6 的形式。

前向通道与反馈通道:信号从输入端沿箭头方向到达输出端的传输通道称为前向通道;系统输出量经测量装置将输出信号反馈到系统输入端的通道称为主反

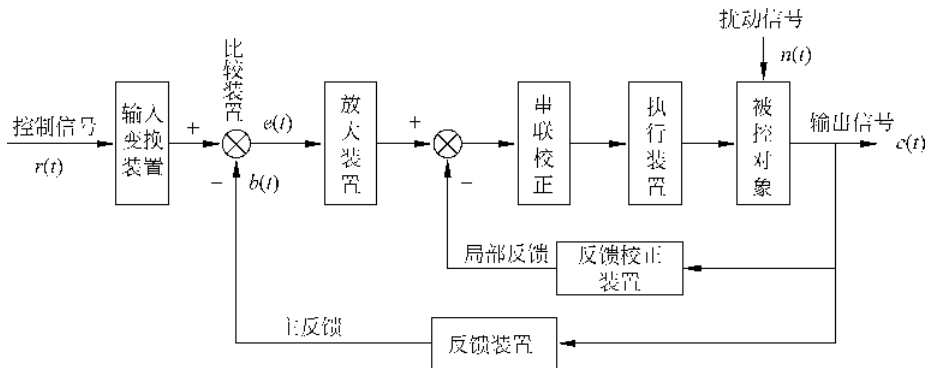


图 1-6 典型闭环控制系统的组成框图

馈通道。前向通道与主反馈通道一起构成主回路。此外还有局部反馈及由它组成的回路称为局部反馈通道。

输入信号 $r(t)$ 与输入变换装置：输入到系统中控制输出量变化的信号称为输入信号 $r(t)$ （又称给定量或控制量），它通过输入变换装置变换成比较装置要求的物理量，通常是电压。

反馈装置与反馈信号 $b(t)$ ：用来测量被控量并按特定的函数关系反馈到系统的输入端的器件称为反馈（检测）装置，如图 1-3 中的热电偶。反馈装置的输出叫反馈信号。根据极性，把反馈信号与输入信号同极性的反馈叫正反馈，反极性的反馈叫负反馈。为消除系统误差，主反馈一定是负反馈，这是闭环控制系统正常工作的基本条件。

比较装置与误差信号 $e(t)$ ：比较装置是把输入信号与反馈信号相减，其输出为误差信号，简称为误差。如图 1-5 中收信仪的输出信号。

放大装置：比较装置给出的信号通常很小，必须将它进行放大（包括幅值和功率等）。常用的有电子放大器、液压放大器等。

执行装置：能产生驱动被控对象的信号，以改变系统输出，常用的有直流伺服电机等。如图 1-5 中的执行电机。

反馈校正（或称为校正装置）：它是为了改善系统的性能而引入的。串联校正装置是串接在系统前向通道中的校正装置。而在系统局部反馈回路内接入的反馈装置称为反馈校正装置。简单的校正装置可以是一个阻容网络，复杂的校正装置可以是一个微型计算机。

被控对象与输出信号 $c(t)$ ：被控对象即系统要求控制的对象，其输出量为系统的输出信号，又称为被控制量。如图 1-4 中的被控对象为电炉，被控制量（输出信号）是温度。

扰动信号 $n(t)$ ：除输入信号外，影响系统输出的其他输入统称为扰动信号。

1.3 自动控制系统的分类

1.3.1 按信号的传递路径来分

1. 开环控制系统

指系统的输出端与输入端不存在反馈回路,输出量对系统的控制作用不发生影响的系统。如工业上使用的微型计算机控制机床,参见图 1-7。

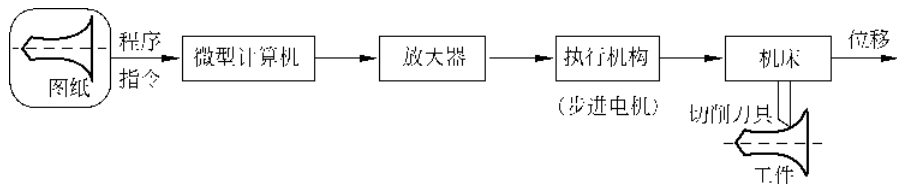


图 1-7 微型计算机开环控制

工作过程：根据设计图纸的要求,将加工过程编制成程序指令输入到微型计算机,微型计算机完成对控制脉冲的寄存、交换和计算,并输出控制脉冲给执行机构(一般是步进电机),驱动机床运动,完成程序指令的要求。这就是一个开环控制系统,它具有如下特点:

- (1) 系统的作用信号由输入端到输出端单方向传输,没有反馈通道,不具有修正误差的能力。
- (2) 对系统的每一个输入,总有一个与之对应的输出。
- (3) 控制精度决定于系统组成部件和元器件参数的精度与稳定性,所以为了获得高质量的输出,必须选用高质量的元件,导致投资大、成本高。

2. 闭环控制系统(反馈控制系统)

闭环控制系统也叫反馈控制系统。它是将输出信号通过测量元件反馈到系统的输入端,通过比较产生误差信号,通过对系统产生控制作用来减小系统误差。在上例中引入反馈测量元件,就是闭环控制(图 1-8)。

系统反馈装置把切削刀具的实际位置送给计算机,与程序指令比较,经计算机处理后发出控制信号,再经放大后驱动执行机构,就可以减小由各种原因产生的误差。

闭环控制系统如果系统参数配合不当,容易产生振荡,使系统不能正常工作,这就是系统的稳定性问题。

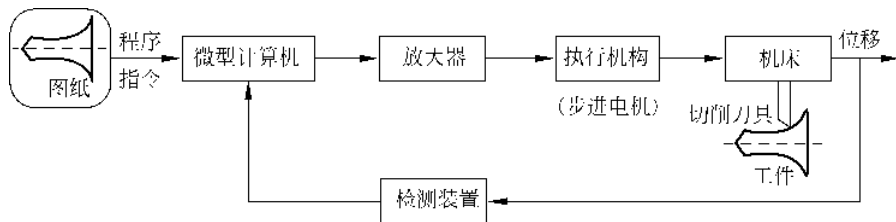


图 1-8 微型计算机闭环控制

1.3.2 按系统输出信号的变化规律来分

1. 恒值控制系统(或称自动调节系统)

要求系统的输出是一个恒定的数值。这种系统是保证系统在任何扰动下,输出量以一定精度接近给定值。工业生产中的恒温、恒压等自动控制系统都属于这一类型。

恒值控制系统主要研究如何克服各种扰动对系统输出的影响。

2. 程序控制系统

要求系统的输出按照一个已知的函数变化,此类系统又叫过程控制系统。系统的控制过程按预定的程序进行,这时要求被控量能迅速准确地复现输入,如化工中反应罐的压力、温度、流量控制。图 1-8 中微型计算机控制机床属此类系统。

3. 随动系统(或称伺服系统)

要求系统的输出信号能跟踪一个未知信号。这个未知信号通常就是系统的输入,要求控制系统的输出跟随输入信号变化,如图 1-5 所示的火炮自动跟踪系统。飞机的运动规律对系统说是随机的,系统要求火炮能跟随飞机的运行轨迹。

对于随动系统要求跟踪具有很好的快速性和准确性。

1.3.3 按系统传输信号的性质来分

1. 连续系统

这类系统的特点是系统各部分的信号都是连续函数。图 1-3 温度控制系统及目前工业中普遍采用的模拟 PID 调节器控制的系统就属于这一类型。

2. 离散系统

系统中只要有一处信号出现脉冲信号或数字信号的系统,就称之为离散系

统。如目前广泛使用的计算机控制系统就属于这一类型(图 1-9)。

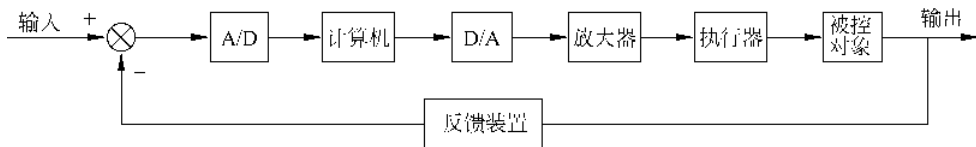


图 1-9 数字控制系统结构图

1.3.4 按系统的输入输出特性不同来分

1. 线性系统

线性系统由线性元件构成,描述运动规律的数学模型为线性微分方程。主要特点是具有叠加性和齐次性。假设系统的输入分别为 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$, 对应的输出分别为 $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$, 则当输入为 $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$ 时, 如系统的输出为

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) \quad (1-1)$$

则称系统具有叠加性。若对应于输入 $r_1(t)$, 系统的输出为 $c_1(t)$ 。当输入为 $r(t) = \alpha r_1(t)$ 时, 如系统的输出为

$$c(t) = \alpha c_1(t) \quad (1-2)$$

则称系统具有齐次性。

同时满足式(1-1)和式(1-2)的系统就是线性系统。将上述二式合并, 如线性系统输入为 $r(t) = \alpha_1 r_1(t) + \alpha_2 r_2(t)$, 则系统的输出必为

$$c(t) = \alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t) \quad (1-3)$$

式(1-3)通常称为线性原理。

如果线性系统参数不随时间变化, 就是线性定常系统, 其运动方程一般形式为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

式中, $r(t)$ 为系统的输入; $c(t)$ 为系统的输出; $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 和 $b_j (j=0, 1, 2, \dots, m)$ 均为常数。

2. 非线性系统

在构成系统的元件中有一个或一个以上是非线性的, 则称此系统为非线性系统。典型的非线性特性有饱和特性、死区特性、间隙特性、继电特性、磁滞特性等。非线性系统不满足线性叠加原理, 这是不同于线性系统的本质区别, 这就大大增

加了系统分析与设计的复杂性。

严格地说,自然界中任何物理系统的特性都是非线性的。但是,为了研究问题的方便,许多系统在一定的条件下,可以近似为线性系统来研究,其误差往往在工业生产允许的范围之内。

1.4 控制系统实例

下面举两个自动控制系统的实际例子。

1.4.1 内燃机的转速控制系统

图 1-10 是应用瓦特式转速调节器的内燃机转速控制系统,它利用飞球的离心力来调节内燃机的燃油阀门,控制喷油量,从而达到调节内燃机转速的效果。

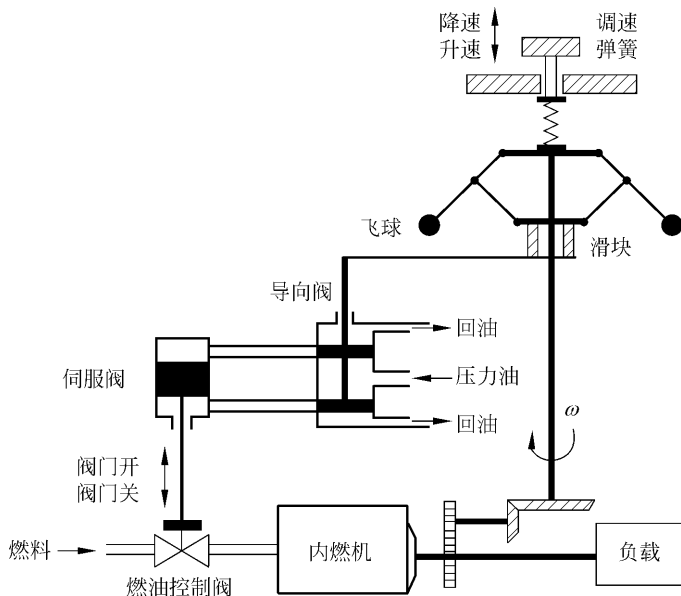


图 1-10 内燃机的转速控制系统

系统的工作原理如下：设图中所示内燃机工作在期望的转速状态。如果由于某种原因,例如负载增大使转速降低,调速器的飞球离心力减小,导致导向阀向下移动,压力油流向伺服阀油缸的下半部,使燃油控制阀开大,于是内燃机加速,直达到期望转速,控制系统又回到图示的状态。如果要升高期望转速,只要压紧调速弹簧,调速器就将平衡在转速较高的位置上。

1.4.2 角度随动系统

图 1-11 是一个角度随动系统的原理图。

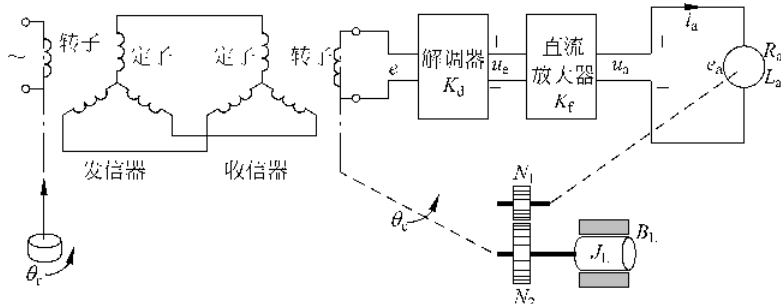


图 1-11 角度随动系统的原理图

系统中采用自整角变压器作为角度的发信器和收信器。其工作原理是：当发信器的转角 θ_r 与收信器的转角 θ_c 相等，即它们的角差 $\theta = \theta_r - \theta_c = 0$ 时，误差电压 $e = 0$ ，当 $\theta \neq 0$ 时，误差电压 $e \neq 0$ ，并且， e 的相位反映了 θ 的符号。于是经过解调器解调的直流信号 u_e 的极性也反映了 θ 的符号，即当 $\theta > 0$ ， $u_e > 0$ ，当 $\theta < 0$ ， $u_e < 0$ ，而当 $\theta = 0$ 时，则 $u_e = 0$ 。当系统发信器的转角 θ_r 与收信器的转角 θ_c 相等时， $e = 0$ 及 $u_e = 0$ ，系统处于平衡状态。当 $\theta \neq 0$ ， $e \neq 0$ ， $u_e \neq 0$ ，经直流放大器放大， $u_a \neq 0$ 驱动直流伺服电机转动，伺服电机带动负载转动的同时，也带动收信器向减小 $|\theta|$ 的方向转动，一直到 $\theta = \theta_r - \theta_c = 0$ ，系统又进入平衡状态。这样，系统的输出转角 θ_c 总能跟踪给定的转角 θ_r 。

1.5 本书概貌

本书主要研究自动控制系统的建模、分析和设计。

建立完善的系统数学模型是系统分析和设计的基础。通常人们所说的数学模型是指描述系统运动状态的微分方程。由于微分方程中的自变量是时间 t ，所以将微分方程称之为时域数学模型。为了便于系统的分析和设计，经典控制理论中通常将系统的时域数学模型——微分方程映射到复数域（简称复域）或频率域（简称频域）中：复域数学模型——传递函数和频域数学模型——频率特性。这三种模型在数学上是一种映射关系，如图 1-12 所示。

时域的数学模型是基础，传递函数和频率特性是重要的工具。

系统分析包括系统的稳定性分析、稳态特性分析和动态特性分析（简称“三性分析”）。在时域、复域和频域（有时统称为复频域）中都可进行系统分析，时域分

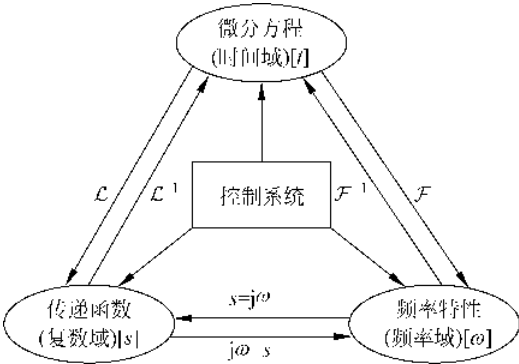


图 1-12 系统三种数学模型之间关系

图中： $\mathcal{L}, \mathcal{L}^{-1}$ 分别表示拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换；
 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ 分别表示傅里叶变换和傅里叶反变换。

析就是求解系统的运动方程(微分方程)。通过对系统零输入响应的分析,获得线性定常系统稳定的充分必要条件;通过对二阶系统单位阶跃响应的分析,建立系统的动态性能指标。系统特征方程的根决定了系统的稳定性;阻尼比 ζ 和自然振荡角频率 ω_n 决定了系统的动态性能。复数域分析方法和频率响应法给出适合于工程应用的方法——作图的方法(根轨迹图和各种频率特性图),给出在这些图上判别系统稳定性和系统性能的方法和指标。时域法可以精确求解系统的运动特性,但它一般只能解决二阶系统的分析问题,而复域法和频域法则可解决高阶系统的分析问题,并且还解决了在时域中难以解决的系统设计问题,尽管它是间接的分析方法,不如时域法精确,但它们能满足工程上的要求。表 1-1 给出了在三种方法中表征系统性能的参数。

表 1-1

数学模型 性能分析	时域(t) 微分方程——数学求解	复数域(s) 传递函数——根轨迹法	频域(ω) 频率特性——频率法 (以伯德图为例)
	解析法	工程法	
稳定性	特征方程的根具有负实部,则系统稳定	闭环极点在左半 s 平面部分,对应的系统是稳定的	相位裕度 $\gamma > 0$ 则系统稳定
稳态特性 (稳态误差 e_{ss})	期望输出与系统稳态解之差	由工作点处的开环根迹增益 K_r 决定	取决于系统开环频率特性的低频段的特性:斜率和幅值
动态特性	阶跃响应:调整时间 t_s 、超调量 M_p 等	主要取决于主导极点的位置:阻尼比 ζ 和无阻尼自然振荡角频率 ω_n	主要取决于系统开环频率特性中频段的特性:增益剪切角频率 ω_c 和相位裕度 γ

系统校正是系统设计的一种方法,本书详细讨论用根轨迹法和频率法设计系统各种校正装置的方法。

近年来,计算机技术迅速发展,促进了计算机辅助设计技术的应用。MATLAB是当前一种常用的计算机辅助设计软件,它为控制系统的分析与设计提供了专用的工具包。本书在各章都将介绍 MATLAB 的相关应用。

本书的整体框架如图 1-13 所示。

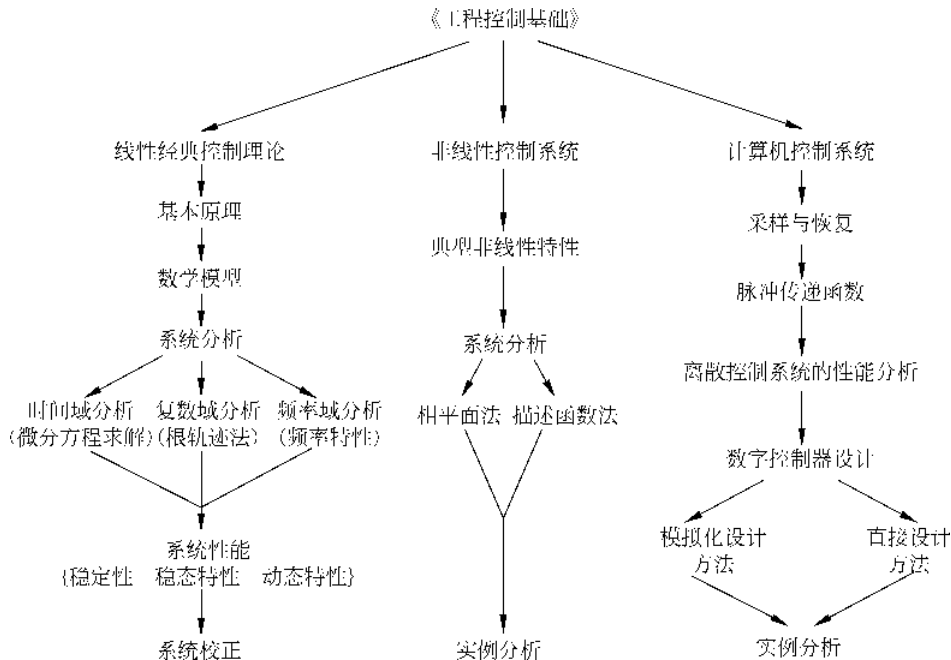


图 1-13 本书体系结构

本书力求对基本概念的阐述尽量严格清晰,并将习题分为一般题、深入题、实际题和 MATLAB 题,读者可根据需要选择。

习题

A 基本题

A1-1 什么是反馈? 什么是正反馈和负反馈? 为消除系统误差,为什么工程上反馈控制必须是负反馈?

A1-2 人在平时生活中做的许多事情,比如走路、取物、吃食物、阅读、清扫等都带有反馈控制作用,试举例,并用框图说明其反馈工作原理。

A1-3 现在家电设备在人们日常生活中已经十分普遍。试从家电中举几个开环和闭环控制系统的例子,说明它们的工作原理,并画出其框图。

A1-4 在日常也有许多人参与系统的控制。图 A1-1 是一个液位控制系统，其输出管路是一直开启的，控制目标是保持容器中的液位为恒值，液位由仪表中读出。

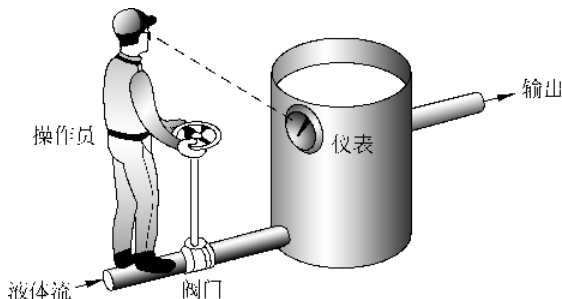


图 A1-1 由人参与的液位控制系统

- (1) 说明系统的工作原理，画出其框图，并指出系统的测量装置与执行装置；
- (2) 配上适当的元器件，将系统改为自动控制系统，并说明其工作原理，画出系统框图，指出输入量、输出量、被测量和控制器。

A1-5 试绘制图 1-11 随动系统的方框图。如果系统的反馈变成正反馈，会产生什么后果？

A1-6 试绘制图 1-10 离心调速器的方框图，如果将从导向阀通向伺服阀的两根管路对调，将会产生什么后果？改变飞球的旋转方向，会产生相同的结果吗？

B 实际题

B1-1 图 B1-1 是压力调节器的原理图。通过压力调节器的流体由阀门控制，而阀门是由横隔板来操纵的，作用在其上下两边的压力差使横隔板向上或向下运动，弹簧的预期压力可以通过压力调节螺丝设定。这是一个以输出流体压力为控制对象的自动控制系统，试分析其工作原理，并画出系统的方框图。

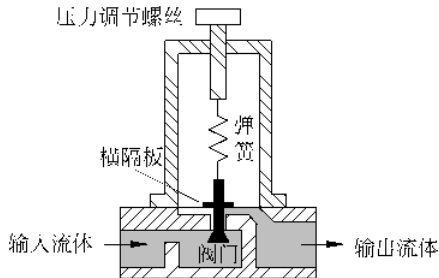


图 B1-1 题 B1-1 图

B1-2 教师与学生之间的教学过程，是一个使学生根据教学大纲要求掌握知识的过程，实际上是一个使系统误差趋于最小的反馈控制过程。试绘制教学过程

的方框图,并对照图 1-2,说明各方块的功能。

B1-3 图 B1-2 是补偿直流电机负载扰动的恒速调节系统。

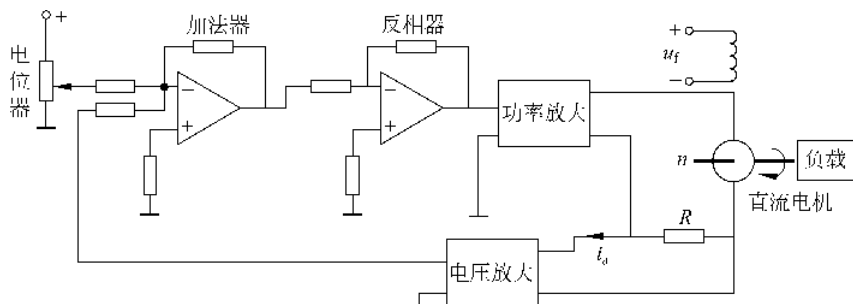


图 B1-2 补偿电机负载扰动的恒速调节系统

- (1) 试分析系统补偿直流电机负载扰动的工作原理(当由于电机负载增大使转速降低,系统如何使转速恢复);
- (2) 为达到补偿目的,电压放大的输出极性应当是怎样的? 为什么?
- (3) 该系统能否补偿由于激磁电压 u_f 变化引起的转速变化? 为什么?



对控制系统进行分析与设计,首先必须建立系统的数学模型。控制系统的数学模型是物理系统运动特性的数学抽象。在经典控制理论中,控制系统的数学模型通常是指描述系统输出量与输入量之间关系的数学表达式,其最基本的形式是微分方程。广义而言,凡是表示系统各变量之间内在联系的解析式或图形(图模型)都是系统的数学模型。

在静态条件下,描述变量之间关系的代数方程,称为静态模型;描述系统在动态过程中各变量之间关系的微分方程,称为动态模型。自动控制理论主要研究系统的动态特性,所以动态模型是系统最基本的数学模型。

如果线性系统是由定常、集中参数的元件构成,则其动态模型是常系数微分方程,这类系统称为线性定常系统。微分方程的各阶导数为零时,就是系统的静态模型。若微分方程的系数是时间的函数,此类系统称为线性时变系统。

经典控制理论中系统的数学模型主要有两种形式:数学解析式和图模型。前者又分为三种:微分方程、传递函数和频率特性,它们的自变量分别为时间 t 、复数 s 和角频率 ω ,分别是系统在时域、复域和频域的数学模型。利用时域数学模型分析设计系统的方法属解析法,它可以精确求解系统的行为,物理意义清楚,便于理解;利用复域数学模型、频域数学模型分析设计系统的方法属工程法,它简单清晰,直观形象,可用曲线表示(根轨迹图和各种频率特性图),十分方便,工程上中得到广泛的应用。本书介绍的图模型主要有方块图和信号流图。

这些模型各有所长,在系统的建模、分析和设计中,应视系统的具体情况选用适当的数学模型。控制系统的建模和求解是经典控制理论的重要内容。

2.1 控制系统的时域数学模型——微分方程

控制系统的微分方程是系统的运动方程,是系统最基本的数学模型,它是通过建立系统输入量与输出量之间的关系,来描述系统运动规

律的数学表达式。它描述的是系统在特定的输入激励下,系统输出量随时间变化的规律。它是以时间 t 为自变量,所以是系统时域的数学模型。

控制系统的微分方程可以应用有关物理学的基本定律来推导求取。如在机电系统中可应用牛顿定律、基尔霍夫定律,液压系统则可应用流体力学的有关定律。这些定律都是应用于线性系统的,但实际的物理系统如机电系统、液压系统、气动系统和热力系统等都是非线性的,例如电磁器件的饱和特性、元件中的死区以及某些元件中存在的平方律关系等。对非线性系统的问题,求解过程很复杂。但绝大多数非线性系统在一定范围内呈现线性特性,对于这类系统,可通过非线性系统线性化的方法,将它近似为线性系统,就会使系统的求解问题大大简化。

必须指出,有些元件对任意大小的信号都是非线性的,如开关控制系统只有开和关两种状态,其输入与输出之间就不存在线性关系,对这类系统是不能将它线性化的。

2.1.1 系统的微分方程举例

例 2-1 求图 2-1 所示 RLC 电路,以电压 $u(t)$ 为输入, $u_C(t)$ 为输出的微分方程。

解 由基尔霍夫定律:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C \quad (2-1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (2-2)$$

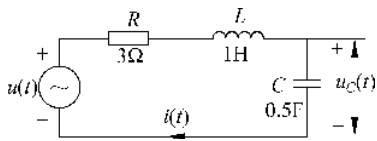


图 2-1 RLC 线性电路

将式(2-2)代入式(2-1)得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u \quad (2-3)$$

式(2-3)就是图 2-1 电路的时域数学模型——微分方程。 ■

微分方程的阶次决定于系统中独立储能元件的数量。在本例中,有两个独立的储能元件——电容和电感,所以微分方程是二阶的。

线性定常系统的微分方程一般具有如下形式:

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (2-4)$$

式中, $a_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 与 $b_j (j=1, 2, \cdots, m)$ 为常数。

一般来说,方程的解精确地描述了系统的行为。然而方程阶次越高,求解越困难。为了了解系统的结构参数变化对系统行为的影响,就需进行多次重复的计算,因此利用微分方程直接分析和设计系统往往不太方便。

2.1.2 非线性系统的线性化

考虑一个具有输入(激励) $x(t)$ 和输出(响应) $y(t)$ 的非线性系统,输入与输出之间的关系一般可表示为

$$y = f(x) \quad (2-5)$$

设工作点在 x_0 处,如果系统只是在 x_0 附近一个很小的邻域内运动,那么非线性系统就可以近似为一个线性系统。一般的实际系统, $f(t)$ 在 x_0 的区间内是连续可微的,可以在 x_0 附近用泰勒(Taylor)级数展开:

$$y(t) = f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots \quad (2-6)$$

如果系统只是在 x_0 附近的一个很小的邻域内运动,即 $(x-x_0)$ 是很小的数值,式(2-6)中 $(x-x_0)$ 的高次项可以略去,式(2-6)可近似为

$$y(t) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x-x_0) = y_0 + m_0(x-x_0) \quad (2-7)$$

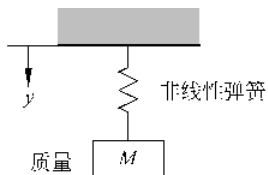
或

$$\Delta y = m_0 \Delta x \quad (2-8)$$

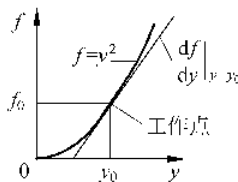
式(2-8)就是 $y(t)=f(x(t))$ 在工作点 x_0 处的线性化方程。式中, $\Delta x = x - x_0$,

$\Delta y = y - y_0$, $m_0 = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ 是 $y(t)=f(x(t))$ 在工作点 (x_0, y_0) 的斜率,因此线性化就是用斜率为 m_0 的直线来近似原来的非线性特性。

例 2-2 图 2-2 是一个质量 M 悬挂在非线性弹簧上的模型,求弹簧的线性化模型。



(a) 质量—非线性弹簧系统



(b) 非线性弹簧系统特性

图 2-2 非线性弹簧的线性化

解 若工作点是系统位移的平衡点 $y=y_0$, 假设非线性弹簧的弹力 $f=y^2$, 在平衡点 $f_0=y_0^2$, 它与质量的重力相等即 $f_0=Mg$, g 是重力加速度, 由牛顿定律, $y_0^2=Mg$ 或 $y_0=(Mg)^{\frac{1}{2}}$, 按式(2-8), 系统的线性化模型是

$$\Delta f = m \cdot \Delta y \quad (2-9)$$

式中:

$$m = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0} = 2y_0 \quad (2-10)$$

图 2-2(b) 给出了非线性弹簧系统特性, $m = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y_0}$ 就是在平衡点 (y_0, f_0) 处切线的斜率。 ■

对式(2-4)直接进行求解往往比较困难, 可以用拉氏变换将复杂的微分方程变换成代数方程, 经简单的代数运算和拉氏反变换, 便可求得系统的输出响应。(拉氏变换的运算方法可参考高等数学, 此略)。

在控制理论中, 拉氏变换另一个重要的用途是求取线性系统的复域数学模型——传递函数。用输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换的比值来描述输入、输出的关系, 这就是传递函数——系统的复域模型。传递函数不仅可以直接看出系统的特性, 而且计算简单, 为系统模型的图形化创造了条件。

2.2 控制系统的复域数学模型——传递函数

2.2.1 传递函数定义

传递函数定义: 线性定常系统在零初始条件下, 系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比, 记为 $G(s)$ 。

对式(2-4)两边在零初始条件下作拉氏变换得

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s) \end{aligned} \quad (2-11)$$

式中, $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$, $\mathcal{L}[c(t)] = C(s)$ 。对式(2-11)整理可得传递函数。线性定常系统传递函数有三种不同形式的表达式。

(1) 一般表达式

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)} \quad (2-12)$$

(2) 时间常数表达式(又叫典型环节表达式)。此时, s 幂次方为零项的系数为 1。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} \left[\left(\frac{s}{\omega_{nk}} \right)^2 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{nk}} + 1 \right]}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} \left[\left(\frac{s}{\omega_{nl}} \right)^2 + 2\zeta_l \frac{s}{\omega_{nl}} + 1 \right]} \quad (2-13)$$

式中, $K = \frac{b_0}{a_0}$ 为系统的稳态增益; $m_1 + 2m_2 = m$; $\nu + n_1 + 2n_2 = n$ 。式(2-13)还可表示为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} [T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1]}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} [T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1]} \quad (2-14)$$

式中, $T_k = \frac{1}{\omega_{nk}}$, $T_l = \frac{1}{\omega_{nl}}$ 。

(3) 零、极点表达式:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_r (s + z_1)(s + z_2) + \cdots + (s + z_m)}{s^\nu (s + p_{\nu+1})(s + p_{\nu+2}) + \cdots + (s + p_n)} \quad (2-15)$$

式中 $-z_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 称为系统的零点, $-p_j (j=1, 2, \cdots, n-\nu)$ 称为系统的极点, 极点还包括 ν 个等于零的极点。 $-z_i$ 和 $-p_j$ 可以是复数或实数, 复数必定是成对(共轭)出现的。 K_r 为增益因子。 K 与 K_r 有如下关系

$$K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^{n-\nu} p_j} \quad (2-16)$$

例 2-1 中, 对式(2-3)两边进行拉氏变换, 不难求得对应的复域数学模型——传递函数:

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (2-17)$$

常用时间函数的拉氏变换式见附录 2。

2.2.2 传递函数性质

控制系统的传递函数具有以下性质:

(1) 传递函数是系统的复域数学模型, 它只与系统的结构和参数有关, 与系统的输入无关, 所以它描述了系统的内在特性——动态特性和静态特性, 且只适用于线性定常系统;

(2) 多数系统的传递函数是复变量 s 的有理分式, 一般物理系统传递函数分母的阶次大于等于分子的阶次, 即 $n \geq m$;

(3) 传递函数只描述系统本身固有的属性(动、静态特性), 而不描述系统的物理性质和结构, 不同的物理系统, 可以具有相同形式的传递函数;

(4) 传递函数可以通过实验来确定, 即通过测试系统的输入与输出的关系来确定(在以后章节将会提及)。

2.3 控制系统的频域数学模型——频率特性

在经典控制理论中, 系统的频域数学模型是指系统的频率特性(或频率响应), 控制系统分析和设计的频率特性法(或频率响应法)是一种重要而又实用的方法。

频率特性定义：输入是正弦信号时，系统的稳态输出与系统的输入之比，记以 $G(j\omega)$ 。则

$$G(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (2-18)$$

式中， $R(j\omega)$ 表示正弦输入， $C(j\omega)$ 表示稳态输出。对于线性定常系统， $C(j\omega)$ 是与 $R(j\omega)$ 频率相同的正弦信号。

例 2-1 系统的频率特性 $G(j\omega)$ 实际上是正弦输入时，稳态输出电压（电容两端的电压）与输入电压之比。由电路理论中的复阻抗方法，不难求得

$$G(j\omega) = \frac{U_c(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1} \quad (2-19)$$

式(2-19)就是例 2-1 系统的频率特性。

比较式(2-19)与式(2-17)，不难看出，只要将系统传递函数中的 s 用 $j\omega$ 代替，便可获得系统的频率特性。实际上，频率特性是系统微分方程通过傅氏变换获得的。时间函数 $f(t)$ 的拉氏变换定义为

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2-20)$$

$f(t)$ 的傅氏变换定义为

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2-21)$$

由式(2-20)和式(2-21)看出， $f(t)$ 的拉氏变换和傅氏变换的形式十分相似，并且 $f(t)$ 只在 $t \geq 0$ 有定义，上面二式的积分下限也一样。这样，如果已知 $F(s)$ ，只要令 $s = j\omega$ 便可求得 $F(j\omega)$ 。

频率特性还可以用图形表示，并可以用实验的方法测量获得，在后面的章节中将进行详细讨论。

2.4 典型环节及其传递函数

线性定常系统通常都可看成是由一些典型环节组成。常见的典型环节主要有以下六种：比例环节、微分环节、积分环节、惯性环节、振荡环节和延迟环节等。

2.4.1 比例环节

比例环节的特性是：输出量与输入量成比例，对信号无失真、无延迟地传递。其运动方程为

$$c(t) = Kr(t) \quad (2-22)$$

式中， $r(t)$ 为输入量； $c(t)$ 为输出量； K 是增益，通常都是有量纲的。