# 第 1 章

# 预 备 知 识

阅读本书仅需的预备知识是测度论与积分. 测度论是数学的一个分支, 长度、面积、体积都是测度概念的特例. 本章简要介绍测度论的基本概念和主要内容，包括测度、 Borel 集、可测函数、 Lebesgue 积分、 Lebesgue-Stieltjes 积分、单调类定理、 Carathéodory 扩张定理、测度连续性定理、乘积测度定理、单调收敛定理、Fatou 引理、 Lebesgue 控制收敛定理、 Fubini 定理. 由于本章的主要结果是众所周知的，所以没有注明具体的参考文献.

## 1.1 测 度

### 1. 测度的概念

**定义 1.1** 设 $\Omega$ 是一个非空集合， $\mathcal{A}$ 是由 $\Omega$ 的一些子集构成的集类. 如果下列条件成立：

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(b) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$;

(c) 若 $A_i \in \mathcal{A}\ (i=1,2,\cdots,n)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

那么称 $\mathcal{A}$ 是一个代数. 如果将条件 (c) 换为对可数并运算封闭，那么就称 $\mathcal{A}$ 为一个 $\sigma$ 代数.

**例 1.1** 设 $\Omega$ 是一个非空集合，则 $\{\emptyset, \Omega\}$ 是 $\Omega$ 上的最小 $\sigma$ 代数，而幂集 $\mathcal{P}(\Omega)$ ($\Omega$ 的所有子集全体) 是 $\Omega$ 上的最大 $\sigma$ 代数.

**例 1.2** 令 $A$ 是 $\Omega$ 的一个非空真子集. 于是 $\{\emptyset, \Omega, A, A^{\mathrm{c}}\}$ 是包含 $A$ 的最小 $\sigma$ 代数.

**例 1.3** 设 $\mathcal{A}$ 是形如 $(-\infty, a]$, $(a,b]$, $(b,\infty)$ 和 $\mathbb{R}$ 的一切区间的所有有限不交并构成的集合. 易知， $\mathcal{A}$ 是一个代数，但不是一个 $\sigma$ 代数. 实际上，若对任意 $i$ 定义 $A_i = (0, (i-1)/i] \in \mathcal{A}$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,1) \notin \mathcal{A}.$$

请读者注意这是一个非常重要的代数，以后的定理证明中会多次用到它。

**定理 1.1** $\sigma$ 代数的交仍然是一个 $\sigma$ 代数. 进一步地，对于任何非空类 $\mathcal{C}$, 存在惟一一个包含 $\mathcal{C}$ 的最小 $\sigma$ 代数.

**证明** 前一断言容易证明. 令 $\mathcal{A}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的所有 $\sigma$ 代数之交. 由前一断言知 $\mathcal{A}$ 是一个 $\sigma$ 代数. 易验证， $\mathcal{A}$ 包含 $\mathcal{C}$ 及其最小性. 定理证毕.

**定理 1.2** 一个 $\sigma$ 代数 $\mathcal{A}$ 对差运算、可数并、可数交、极限、上极限和下极限是封闭的. 即

$$A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}; \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}; \quad \lim_{i\to\infty} A_i \in \mathcal{A}; \tag{1.1}$$

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}; \quad \liminf_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

**证明** 由定义即得.

**定义 1.2** 设 $\Omega$ 是一个非空集合， $\mathcal{A}$ 是由 $\Omega$ 的一些子集构成的 $\sigma$ 代数. 则 $(\Omega, \mathcal{A})$ 称为可测空间，而 $\mathcal{A}$ 中的集合称为可测集.

**定义 1.3** 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是一个可测空间. 一个测度 $\pi$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的广义实值函数，满足：

(a) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $\pi\{A\} \geq 0$;

(b) 对于可数个互不相交的集合 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, 有

$$\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi\{A_i\}. \tag{1.3}$$

**定义 1.4** 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是一个可测空间. 测度 $\pi$ 是有限的当且仅当 $\pi\{A\}$ 对于任意 $A \in \mathcal{A}$ 都是有限的. 测度 $\pi$ 是 $\sigma$ 有限的当且仅当 $\Omega$ 可表示为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 其中 $A_i \in \mathcal{A}$ 且对一切 $i$ 有 $\pi\{A_i\} < \infty$.

**定义 1.5** 设 $\Omega$ 是非空集， $\mathcal{A}$ 是由 $\Omega$ 的子集构成的 $\sigma$ 代数， $\pi$ 是 $\mathcal{A}$ 上的测度. 则三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 称为一个测度空间.

下面不加证明地表述单调类定理、 Carathéodory 扩张定理以及逼近定理. 对证明感兴趣的读者可查阅有关测度论的书籍.

**定理 1.3** (单调类定理) 假设 $\mathcal{A}_0$ 是 $\Omega$ 的子集构成的代数，且 $\mathcal{C}$ 是 $\Omega$ 的子集构成的单调类 (若 $A_i \in \mathcal{C}$ 且 $A_i \uparrow A$ 或 $A_i \downarrow A$, 则 $A \in \mathcal{C}$). 如果 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{A}_0$, 那么 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{A}_0$ 上的最小 $\sigma$ 代数.

**定理 1.4** (Carathéodory 扩张定理) 代数 $\mathcal{A}_0$ 上的一个 $\sigma$ 有限测度 $\pi$ 可以惟一扩张成为包含 $\mathcal{A}_0$ 上的最小 $\sigma$ 代数 $\mathcal{A}$ 上的测度.

**定理 1.5** (逼近定理) 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 为一个测度空间, 又设 $\mathcal{A}_0$ 是 $\Omega$ 的子集构成的代数, 使得 $\mathcal{A}$ 是包含 $\mathcal{A}_0$ 上的最小 $\sigma$ 代数. 如果 $\pi$ 是 $\sigma$ 有限的, 并且 $A \in \mathcal{A}$ 有有限的测度, 那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个集合 $A_0 \in \mathcal{A}_0$ 使得 $\pi\{A \setminus A_0\} < \varepsilon$.

**2. 测度连续性定理**

**定理 1.6** 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 为一个测度空间, $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$.

(a) 若 $\{A_i\}$ 是单调增集列, 则

$$\lim_{i\to\infty} \pi\{A_i\} = \pi\left\{\lim_{i\to\infty} A_i\right\}. \tag{1.4}$$

(b) 若 $\{A_i\}$ 是单调减集列, 且 $\pi\{A_1\}$ 有限, 则

$$\lim_{i\to\infty} \pi\{A_i\} = \pi\left\{\lim_{i\to\infty} A_i\right\}. \tag{1.5}$$

**证明** (a) 记 $A_i \to A$ 和 $A_0 = \emptyset$, 即空集, 则 $\{A_i \setminus A_{i-1}\}$ 是不交的集列, 并且对 $k = 1, 2, \cdots$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \setminus A_{i-1}) = A_k, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i-1}) = A.$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}
\pi\{A\} &= \pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i-1})\right\} = \sum_{i=1}^{\infty}\pi\{A_i \setminus A_{i-1}\} \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\pi\{A_i \setminus A_{i-1}\} = \lim_{k\to\infty}\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \setminus A_{i-1})\right\} \\
&= \lim_{k\to\infty}\pi\{A_k\}.
\end{aligned}$$

结论 (a) 得证.

(b) 显然, 集列 $\{A_1 \setminus A_i\}$ 单调增加. 由 $\pi\{A_1\} < \infty$ 和结论 (a) 知

$$\begin{aligned}
\pi\{A_1\} - \pi\{A\} = \pi\left\{\lim_{i\to\infty}(A_1 \setminus A_i)\right\} &= \lim_{i\to\infty}\pi\{A_1 \setminus A_i\} \\
&= \pi\{A_1\} - \lim_{i\to\infty}\pi\{A_i\}.
\end{aligned}$$

这意味着 $\pi\{A_i\} \to \pi\{A\}$. 定理证毕.

**例 1.4** 若 $\pi\{A_1\}$ 不是有限的，则定理 1.6 的结论 (b) 未必成立．例如，设 $A_i=[i,+\infty)(i=1,2,\cdots)$ 且令 $\pi$ 为区间长度．则当 $i\to\infty$ 时，有 $A_i\downarrow\emptyset$. 然而，$\pi\{A_i\}\equiv+\infty\not\to 0=\pi\{\emptyset\}$.

**定理 1.7** 设 $(\Omega,\mathcal{A},\pi)$ 为一个测度空间，且 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{A}$. 则有

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty}A_i\right\}\le\liminf_{i\to\infty}\pi\{A_i\}. \tag{1.6}$$

若 $\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}<\infty$, 则

$$\limsup_{i\to\infty}\pi\{A_i\}\le\pi\left\{\limsup_{i\to\infty}A_i\right\}. \tag{1.7}$$

**证明** (a) 因为 $\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i$ 是单调增序列且 $\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i\subset A_k$, 所以

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty}A_i\right\}=\pi\left\{\lim_{k\to\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i\right\}=\lim_{k\to\infty}\pi\left\{\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i\right\}\le\liminf_{i\to\infty}\pi\{A_i\}.$$

(b) 类似地，$\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i$ 是单调减序列且 $\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\supset A_k$. 于是

$$\pi\left\{\limsup_{i\to\infty}A_i\right\}=\pi\left\{\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\right\}=\lim_{k\to\infty}\pi\left\{\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\right\}\ge\limsup_{i\to\infty}\pi\{A_i\}.$$

定理证毕.

**例 1.5** 定理 1.7 中的严格不等式可能成立．例如，设

$$A_i=\begin{cases}(0,1], & \text{若 } i \text{ 为奇数},\\ (1,2], & \text{若 } i \text{ 为偶数},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots$, 又设 $\pi$ 为区间长度，那么

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty}A_i\right\}=\pi\{\emptyset\}=0<1=\liminf_{i\to\infty}\pi\{A_i\},$$

$$\limsup_{i\to\infty}\pi\{A_i\}=1<2=\pi\{(0,2]\}=\pi\left\{\limsup_{i\to\infty}A_i\right\}.$$

**定理 1.8** 设 $(\Omega,\mathcal{A},\pi)$ 为一个测度空间，且 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{A}$. 如果 $\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}<\infty$, 且 $\lim_{i\to\infty}A_i$ 存在，那么

$$\lim_{i\to\infty}\pi\{A_i\}=\pi\left\{\lim_{i\to\infty}A_i\right\}. \tag{1.8}$$

**证明** 由定理 1.7 得

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty} A_i\right\} \le \liminf_{i\to\infty} \pi\{A_i\} \le \limsup_{i\to\infty} \pi\{A_i\} \le \pi\left\{\limsup_{i\to\infty} A_i\right\}.$$

因为 $\lim\limits_{i\to\infty} A_i$ 存在，所以等式成立．定理证毕．

### 3. 乘积测度定理

设 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 为任意集合 (不必是同一空间的子集)．卡氏积 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ 就是形如 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一切有序的 $n$ 元组的集合，其中 $x_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

**定义 1.6** 设 $\mathcal{A}_i$ 分别是 $\Omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的子集构成的 $\sigma$ 代数．记 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$. 所谓 $\Omega$ 中的一个可测矩形是指集合 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 其中 $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 包含 $\Omega$ 中的所有可测矩形的最小 $\sigma$ 代数称为乘积 $\sigma$ 代数，记为 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$.

请注意，乘积 $\sigma$ 代数 $\mathcal{A}$ 是可测矩形上的最小 $\sigma$ 代数，并非就是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ 的卡氏积.

**定理 1.9** (乘积测度定理) 设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \pi_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是测度空间．假设 $\pi_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\sigma$ 有限的， $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$. 则 $\mathcal{A}$ 上存在惟一测度 $\pi$ 使得

$$\pi\{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\} = \pi_1\{A_1\} \times \pi_2\{A_2\} \times \cdots \times \pi_n\{A_n\} \tag{1.9}$$

对每个可测矩形 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 成立.

测度 $\pi$ 称为 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 的乘积，记为 $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_n$. 三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 称为乘积测度空间.

### 4. 无穷乘积测度定理

设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \pi_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 是一列无穷多个测度空间，满足 $\pi_i(\Omega_i) = 1$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 卡氏积 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$ 定义为形如 $(x_1, x_2, \cdots)$ 的一切有序元所构成的集合，其中 $x_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 对此情形，一个可测矩形是指形如 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots$ 的集合，其中对所有 $i$, $A_i \subset \mathcal{A}_i$, 并且对有限多个 $i$ 之外有 $A_i = \Omega_i$. 包含 $\Omega$ 的所有可测矩形的最小 $\sigma$ 代数称为乘积 $\sigma$ 代数，记为 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots$.

**定理 1.10** (无穷乘积测度定理) 假设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \pi_i)$ 是一列无穷多个测度空间，满足 $\pi_i\{\Omega_i\} = 1$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 令 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots$, 则 $\mathcal{A}$

上存在惟一测度 $\pi$, 使得

$$\pi\{A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots\} = \pi_1\{A_1\} \times \pi_2\{A_2\} \times \cdots \times \pi_n\{A_n\} \quad (1.10)$$

对每个可测矩形 $A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots$ 和所有 $n = 1, 2, \cdots$ 成立.

测度 $\pi$ 称为无穷乘积测度，记为 $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots$, 三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 称为无穷乘积测度空间.

## 1.2 Borel 集

设 $\mathbb{R}$ 为实数集， $\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维 Euclid 空间. 下面先引入开集、闭集、 $F_\sigma$ 集和 $G_\delta$ 集.

集合 $O \subset \mathbb{R}^n$ 称为开集，如果对任意 $\boldsymbol{x} \in O$, 存在充分小的正整数 $\delta$ 使得 $\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| < \delta\} \subset O$. 空集 $\emptyset$ 与 $\mathbb{R}^n$ 是开集. 若 $\{O_i\}$ 是一列开集，则并集 $O_1 \cup O_2 \cup \cdots$ 是开集，有限交 $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_m$ 也是开集，但是，开集的无限交未必是开集. 例如，令

$$O_i = \left(-\frac{1}{i}, \frac{i+1}{i}\right), \quad i = 1, 2, \cdots,$$

则交集 $O_1 \cap O_2 \cap \cdots = [0, 1]$ 不是开集. 开集的可数交称为 $G_\delta$ 集.

开集的补称为闭集. 设 $\{C_i\}$ 是一列闭集，则交集 $C_1 \cap C_2 \cap \cdots$ 是闭集，有限并 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_m$ 也是闭集. 但是，闭集的无限并未必是闭集. 例如，令

$$C_i = \left[\frac{1}{i+1}, \frac{i}{i+1}\right], \quad i = 1, 2, \cdots,$$

则并集 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots = (0, 1)$ 不是闭集. 闭集的可数并称为 $F_\sigma$ 集.

所有的开集都是 $G_\delta$ 集. 所有的闭集都是 $F_\sigma$ 集. 一个集合是 $G_\delta$ 集当且仅当它的补是 $F_\sigma$ 集.

**例 1.6** 有理数集是 $F_\sigma$ 集, 因为它是并集 $\bigcup_i \{r_i\}$, 其中 $r_1, r_2, \cdots$ 为所有有理数. 无理数集是 $G_\delta$ 集，因为它是有理数集的补集.

假设 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的点，满足 $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. $\mathbb{R}^n$ 中的开区间定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

闭区间、左半闭区间和右半闭区间定义为

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\},$$
$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \le x_i < b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}] = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,|\, a_i < x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

**定义 1.7** 包含 $\mathbb{R}^n$ 的所有开区间的最小 $\sigma$ 代数 $\mathcal{B}$ 称为 Borel 代数， $\mathcal{B}$ 中的任一元素称为 Borel 集，而 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ 称为 Borel 可测空间.

在定义 1.7 中，开区间可以用其他区间类替而代之．比如，闭区间、左半闭区间、右半闭区间或所有区间.

**例 1.7** 开集、闭集、 $F_\sigma$ 集、 $G_\delta$ 集、有理数集、无理数集以及实数的可数集都是 Borel 集.

**例 1.8** 此处介绍 $\mathbb{R}$ 中的一个非 Borel 集．两个实数 $a$ 与 $b$ 说成是等价的当且仅当 $a-b$ 为一个有理数．令 $[a]$ 表示与 $a$ 等价的所有实数的等价类．注意到若 $a_1$ 与 $a_2$ 不等价，则 $[a_1] \cap [a_2] = \emptyset$. 设 $A$ 是从每个等价类 $[a]$ $(a \in \mathbb{R})$ 中恰好选出一个元素构成的集合，另外还假定代表元的选定使得 $A \subset [0,1]$. 已经证明 $A$ 不是一个 Borel 集.

## 1.3 Lebesgue 测度

**定理 1.11** 在 $\mathbb{R}$ 的 Borel 代数上，存在惟一的测度使得对 $\mathbb{R}$ 的任意区间 $(a,b]$ 有 $\pi\{(a,b]\} = b-a$. 此测度称为 Lebesgue 测度.

**证明** 这是稍后将证明的定理 1.21 的特例.

**注 1.1** 事实上，定理 1.11 可以推广到 $n$ 维的情形．在 $\mathbb{R}^n$ 的 Borel 代数上，存在惟一的测度使得对 $\mathbb{R}^n$ 的任意区间 $(a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \times \cdots \times (a_n,b_n]$, 有

$$\pi\left\{\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\right\} = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i). \tag{1.11}$$

**例 1.9** 设 $A$ 是有理数集．因为 $A$ 是可数的，故可表示为 $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 开区间族

$$I_i = \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},\ a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right), \quad i = 1, 2, \cdots$$

是 $A$ 的可数覆盖，且

$$\pi\{A\} \leq \pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \pi\{I_i\} = \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 可以得到 Lebesgue 测度 $\pi\{A\} = 0$.

**例 1.10** 假设一个集合的 Lebesgue 测度为零, 该集合可数吗？答案是否定的. 将单位区间 $[0,1]$ 三等分，选取中间的开区间 $(1/3,2/3)$. 接着又将剩下的两个区间三等分，选取中间的开区间 $(1/9,2/9)$ 和 $(7/9,8/9)$. 依次重复此过程得到 $D_{ij}$, 其中 $j=1,2,\cdots,2^{i-1}$ 和 $i=1,2,\cdots$ 注意到 $\{D_{ij}\}$ 是一列互不相交的开区间，无损一般性，假设 $D_{i1}<D_{i2}<\cdots<D_{i,2^{i-1}}$ $(i=1,2,\cdots)$, 定义集合

$$D=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{2^{i-1}}D_{ij}. \tag{1.12}$$

集合 $C=[0,1]\setminus D$ 称为 Cantor 集. 换言之， $x\in C$ 当且仅当 $x$ 能够表示为仅由数字 0 和 2 表示的三进制数的形式，即

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}, \tag{1.13}$$

其中 $a_i=0$ 或 2 $(i=1,2,\cdots)$. Cantor 集是不可数的、闭的、无处稠密的完备集 (集合中的每点都是其极限点), 且 Lebesgue 测度为零.

## 1.4 可测函数

### 1. 可测函数

**定义 1.8** 设 $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$ 与 $(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ 为可测空间，且 $f$ 是由 $(\Omega_1,\mathcal{A}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathcal{A}_2)$ 的函数. 如果

$$f^{-1}(A)\in\mathcal{A}_1,\quad \forall A\in\mathcal{A}_2, \tag{1.14}$$

那么称 $f$ 是可测的. 若 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 是 Borel 集，则 $\mathcal{A}_1$ 与 $\mathcal{A}_2$ 总被分别假定为 $\Omega_1$ 与 $\Omega_2$ 上的 Borel 代数. 此时，可测函数也称为 Borel 可测函数或 Baire 函数.

**定理 1.12** 从 $(\Omega,\mathcal{A})$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的函数 $f$ 是可测的当且仅当对 $\mathbb{R}^m$ 的任意开区间 $I$, 有 $f^{-1}(I)\in\mathcal{A}$.

**证明** 若函数 $f$ 可测，则因每个开区间 $I$ 是 Borel 集，故 $f^{-1}(I)\in\mathcal{A}$. 反之，若对于每个开区间 $I$ 有 $f^{-1}(I)\in\mathcal{A}$, 则集类

$$\mathcal{C}=\{C\mid f^{-1}(C)\in\mathcal{A}\}$$

包含 $\mathbb{R}^m$ 的所有开区间. 容易验证， $\mathcal{C}$ 是 $\sigma$ 代数. 因此， $\mathcal{C}$ 包含 $\mathbb{R}$ 的所有区间. 所以 $f$ 可测. 定理证毕.

**注 1.2** 若将定理 1.12 中的开区间替换为闭区间或半闭区间, 则结论仍然成立.

**例 1.11** 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 称为连续的，如果对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 和 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得只要 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|<\delta$ 就有 $\|f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon$. Dirichlet 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 的每个点处不连续. Riemann 函数

$$f(x)=\begin{cases}1/p, & \text{若 } x=q/p \text{ 且}(p,q)=1,\\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在每个有理点处不连续，而在每个无理点处连续. 然而，不存在函数在所有有理点处连续，但在所有无理点处不连续.

从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的任一连续函数 $f$ 是可测的，这是因为对任意开区间 $I\in\mathbb{R}^m$，$f^{-1}(I)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 (不一定是区间).

**例 1.12** 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的任一单调函数 $f$ 是可测的，因为对任意区间 $I\in\mathbb{R}$，$\{x|f(x)\in I\}$ 是区间.

**例 1.13** 若一个函数只取有限个数值，则称其为简单函数. 若一个函数取可数无限个数值，则称其为阶梯函数. 一般来说，从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的阶梯函数未必是可测的，除非它可以写成 $f(\boldsymbol{x})=a_i$, 当 $\boldsymbol{x}\in A_i$ 时，其中 $A_i$ $(i=1,2,\cdots)$ 是 Borel 集.

**例 1.14** 设 $f$ 是从 $(\Omega,\mathcal{A})$ 到 $\mathbb{R}$ 的可测函数，则其正部与负部

$$f^+(\omega)=\begin{cases}f(\omega), & \text{若 } f(\omega)\ge 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f^-(\omega)=\begin{cases}-f(\omega), & \text{若 } f(\omega)\le 0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

是可测函数. 这是因为

$$\left\{\omega \mid f^+(\omega)>t\right\}=\left\{\omega \mid f(\omega)>t\right\}\cup\left\{\omega \mid f(\omega)\le 0 \text{ 若 } t<0\right\},$$

$$\left\{\omega \mid f^-(\omega)>t\right\}=\left\{\omega \mid f(\omega)<-t\right\}\cup\left\{\omega \mid f(\omega)\ge 0 \text{ 若 } t<0\right\}.$$

**例 1.15** 设 $f_1$ 与 $f_2$ 是从 $(\Omega,\mathcal{A})$ 到 $\mathbb{R}$ 的可测函数. 因为

$$\left\{\omega \mid f_1(\omega)\vee f_2(\omega)>t\right\}=\left\{\omega \mid f_1(\omega)>t\right\}\cup\left\{\omega \mid f_2(\omega)>t\right\},$$

$$\left\{\omega \mid f_1(\omega)\wedge f_2(\omega)>t\right\}=\left\{\omega \mid f_1(\omega)>t\right\}\cap\left\{\omega \mid f_2(\omega)>t\right\},$$

所以 $f_1 \vee f_2$ 与 $f_1 \wedge f_2$ 是可测函数.

**例 1.16** 设 $f_1$ 与 $f_2$ 是可测函数. 因为

$$\left\{\omega \mid f_1(\omega)+f_2(\omega)>t\right\}=\bigcup_r\left\{\omega \mid f_1(\omega)>r\right\} \cap\left\{\omega \mid f_2(\omega)>t-r\right\},$$

所以 $f_1+f_2$ 是可测函数. 另外可证明 $f_1-f_2$, $f_1 f_2$, $f_1/f_2$ 及 $|f_1|$ 是可测函数.

**例 1.17** 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是可测空间, 且 $A \subset \Omega$. 若 $A$ 是可测集, 则其特征函数

$$f(\omega)=\begin{cases}1, & \text{若 } \omega \in A, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

是可测的; 若 $A$ 不是可测集, 则其特征函数也不是可测的.

**定理 1.13** 设 $\{f_i\}$ 是从 $(\Omega, \mathcal{A})$ 到 $\mathbb{R}$ 的一列可测函数, 则下述函数是可测的:

$$\sup_{1 \leq i<\infty} f_i(\omega); \quad \inf_{1 \leq i<\infty} f_i(\omega); \quad \limsup_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega); \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega). \tag{1.15}$$

特别地, 若 $\lim\limits_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)$ 存在, 则它也是可测函数.

**证明** 定理的证明源于下列事实:

$$\left\{\omega \mid \sup_{1 \leq i<\infty} f_i(\omega)>r\right\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{\omega \mid f_i(\omega)>r\right\};$$

$$\inf_{1 \leq i<\infty} f_i(\omega)=-\sup_{1 \leq i<\infty}\left(-f_i(\omega)\right);$$

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)=\inf_{1 \leq i<\infty}\left(\sup_{k \geq i} f_k(\omega)\right);$$

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} f_i(\omega)=\sup_{1 \leq i<\infty}\left(\inf_{k \geq i} f_k(\omega)\right).$$

定理证毕.

**定理 1.14** (a) 设 $f$ 是从 $(\Omega, \mathcal{A})$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个非负可测函数, 则存在一列渐升的非负可测的简单函数 $\{h_i\}$ 使得

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i(\omega)=f(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{1.16}$$

(b) 若 $f$ 是从 $(\Omega, \mathcal{A})$ 到 $\mathbb{R}$ 的任一可测函数, 则存在一列可测的简单函数使得 (1.16) 式成立.