

第1章

离散数学

集合、关系与函数

集合论是现代数学的基础。集合论的内容是极其丰富的,本章主要介绍朴素集合论的基本内容,包括什么是集合,集合的表示形式,子集、全集、幂集等概念;介绍集合的基本运算;在此基础上,引入二元关系的定义和有关概念,介绍二元关系的表示形式,复合关系和逆关系,关系的闭包运算等;并着重介绍有着广泛用途的特殊二元关系:等价关系、序关系等;在高等数学中,函数的定义域和值域都是在实数集上讨论的,本章将把函数定义为一种特殊的二元关系,函数的定义域和值域可以是任意集合,从而扩大了函数的应用范围。

1.1 集合

1.1.1 集合的基本概念

在数学理论研究中,通常把概念分为两类,一类是原始概念,另一类是派生概念。所谓派生概念是指可以由其他概念来定义的概念,例如:正方形可以由邻边相等的矩形来定义,矩形可以由内角为直角的平行四边形来定义等,而原始概念则无法由其他概念给以定义,几何学中点、线等都是原始概念。集合也是一种原始概念,不能给以确切定义,只能给以说明性的描述。

集合就是具有某种特点的研究对象的聚合,其中每一个研究对象称为这个集合的元素。例如,当需要研究北京市大学生健康状况时,清华大学全体学生可以构成一个集合,每一个清华大学学生就是这个集合中的一个元素;同样,北京大学全体学生也可以构成一个集合,北京大学学生就是集合中的元素。通常用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 来表示集合,用小写英文字母 $a, b, c, \dots$ 来表示集合中的元素。如果 a 是集合 A 中元素,称 a 属于 A ,并记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 中元素,称 a 不属于 A ,并记作 $a \notin A$ 。

1. 集合的表示方法

集合有多种表示方法,这里介绍两种常用表示方法。

(1) 列举法

这种表示方法是把集合中所有元素一一列举出来,元素之间用逗号分开,并用花括

号括弧表示。如集合 A 中有 6 个元素,它们分别是 1,2,3,4,5,6。用列举法可以把集合 A 表示成:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

又如:

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

这表明集合 B 中有 5 个元素,它们分别是: a, e, i, o, u 。

易见, $2 \in A$, 但 $7 \notin A$; $i \in B$, 但 $b \notin B$ 。

(2) 特征法

特征法也称叙述法,它以某个小写英文字母来统一表示集合元素,并指出这类元素的共同特征。如:

$$C = \{x | x \text{ 是正整数且 } x \leq 6\}$$

花括号内符号“ $|$ ”读作“系指”,花括号内符号“ $\wedge$ ”读作“并且”。因此集合 C 中元素是一些正整数,并且小于等于 6,即集合 C 由小于等于 6 的正整数组成。实际上集合 C 的元素就是: 1,2,3,4,5,6。可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的。又如:

$$D = \{x | x \text{ 是英文字母, } x \text{ 是元音}\}$$

易见, D 中元素就是: a, e, i, o, u 。它和列举法中所提到的集合 B 的元素是完全相同的。

定义 1.1 当集合 P 的元素和集合 Q 的元素相同时,称这两个集合相等,记作 $P=Q$ 。

易见,上面提到的集合 A, B, C, D 中,有 $A=C, B=D$ 。

2. 子集

定义 1.2 设 A, B 是集合,如果 A 中每一个元素又都是 B 中元素,则称 A 是 B 的子集,也称 B 含有 A ,或 A 含在 B 中,并记作:

$$B \supseteq A \quad \text{或} \quad A \subseteq B$$

如果 A 是 B 的子集,且集合 B 中总存在一些元素不属于 A ,则称 A 是 B 的真子集,并记作:

$$B \supset A \quad \text{或} \quad A \subset B$$

如果 A 不是 B 的子集,也就是说,在 A 中至少有一个元素不属于 B ,则称 B 不包含 A ,或 A 不含在 B 中,并记作:

$$B \not\supseteq A \quad \text{或} \quad A \not\subseteq B$$

例如,设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 3\}, C = \{1, 3, 5, 7\}$ 。易见, B 是 A 的真子集,即有 $A \supset B$; B 也是 C 的真子集,即有 $C \supset B$; 但 C 不是 A 的子集,因为 $7 \in C$ 而 $7 \notin A$,所以 $A \not\supseteq C$; A 也不是 C 的子集,因为 $4 \in A$ 而 $4 \notin C$,所以 $C \not\supseteq A$ 。

由集合间包含关系易得:

定理 1.1 集合 A 和 B 相等的充要条件是: $A \supseteq B$ 且 $B \supseteq A$ 。

上述定理在证明集合相等时,是一种基本而有效的方法。

不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$ 。

例如:

$$A = \{x | x \text{ 是在 2000 年跳过 2.50 米的运动员}\}$$

由于 2000 年还没有一个运动员跳过这个高度,所以 A 是空集,即 $A = \emptyset$ 。

由空集的定义可知,空集是任何集合的子集。

3. 全集和补集

在实际工作中,我们所研究对象总是限制在一定范围内,例如我们要研究北京市大学生消费情况时,研究对象可以是清华大学的学生,也可以是北京工业大学的学生,但研究对象总是限制在北京市大学生这个范围内,在这种情况下,我们称“北京市大学生全体”组成集合为全集。又如在初等数学中,研究对象是整数,这种情况下,全体整数组成集合就是全集。全集常用大写英文字母 E 或 U 来表示,本书采用 E 表示全集。

请注意,全集的概念和研究对象所处的范围密切相关,不同研究范围就有不同全集,一般来说,当我们讨论总是限制在某个集合的子集时,这个集合就是全集。

下面介绍补集。

定义 1.3 设 A 是集合,由属于全集 E 但不属于 A 的所有元素组成集合称为 A 的补集,记作 $\bar{A}$ 或 $\sim A$ 。

例如,设全集 E 为清华大学全体学生, A 是清华大学所有女学生组成集合,即有:

$$E = \{x | x \text{ 是清华大学学生}\}$$

$$A = \{x | x \text{ 是清华大学女学生}\}$$

则 A 的补集为:

$$\bar{A} = \{x | x \text{ 是清华大学男学生}\}$$

4. 幂集

定义 1.4 设 A 是集合,由 A 的所有子集作为元素构成集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$ 。

例如,集合 $A = \{a, b, c\}$, A 的子集有 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ 等,另外空集 $\emptyset$ 和 A 也是 A 的子集,由此可知 A 的幂集为:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

又如, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 A 的幂集为:

$$\begin{aligned} P(A) = & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \\ & \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ & \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \\ & \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \end{aligned}$$

当集合中元素个数有限时,称为有限集,否则称为无限集。有限集 A 中元素个数称为集合 A 的基数,记作 $|A|$,如 $A = \{a, b, c\}$, 则 $|A| = 3$ 。

易见,当 $A = \{a, b, c\}$, 即 $|A| = 3$ 时,其幂集基数 $|P(A)| = 8 = 2^3$; 当 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 即 $|A| = 4$ 时,其幂集基数 $|P(A)| = 16 = 2^4$ 。一般情况有:

定理 1.2 A 是具有 n 个元素的有限集,即 $|A| = n$, 则 A 的幂集 $P(A)$ 的基数为 2^n 。

证明 由排列组合知识可知,幂集基为:

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

又由二项式定理可知:

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + \cdots + C_n^{n-1} \cdot ab^{n-1} + C_n^n \cdot b^n$$

特别取 $a=b=1$, 则有:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

由此证得:

$$|P(A)| = 2^n$$

在求有限集合 A 的幂集时,需要写出 A 的所有子集,当 A 中元素较多时,往往容易遗漏一些子集,下面介绍一种求幂集的方法,这种方法可以较方便地、没有遗漏地写出幂集 $P(A)$ 。

由定理 1.1.2 可知,当集合 A 含有 n 个元素时,其幂集 $P(A)$ 含有 2^n 个元素,因此可以把幂集 $P(A)$ 中的元素与 n 位二进制序列 $00\cdots 0 \sim 11\cdots 1$ 建立一一对应关系,常把 $P(A)$ 中的元素写成含有下标集合 A_k ,其中 k 是 n 位二进制序列。具体做法如下:

首先把集合 A 中的 n 个元素确定排列顺序,如 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,于是 $P(A)$ 中的元素 A_k 是这样集合:当 n 位二进制序列 k 中的第 i 位为 1 时,集合 A_k 含有元素 a_i ,否则集合 A_k 不含有元素 a_i 。

例如, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, 其幂集 $P(A) = \{A_{000}, A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\}$, 其中:

$$\begin{aligned} A_{000} &= \emptyset \\ A_{001} &= \{a_3\} \\ A_{010} &= \{a_2\} \\ A_{011} &= \{a_2, a_3\} \\ A_{100} &= \{a_1\} \\ A_{101} &= \{a_1, a_3\} \\ A_{110} &= \{a_1, a_2\} \\ A_{111} &= \{a_1, a_2, a_3\} \end{aligned}$$

即有:

$$P(A) = \{\emptyset, \{a_3\}, \{a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

又如,设 $A = \{a, b, c, d\}$, 则其幂集为:

$$\begin{aligned} P(A) &= \{A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, A_{0011}, A_{0100}, A_{0101}, A_{0110}, A_{0111}, A_{1000}, A_{1001}, \\ &\quad A_{1010}, A_{1011}, A_{1100}, A_{1101}, A_{1110}, A_{1111}\} \\ &= \{\emptyset, \{d\}, \{c\}, \{c, d\}, \{b\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \\ &\quad \{a, c, d\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\} \end{aligned}$$

为了叙述方便,一些常用的结果常用特定的字母表示:

$\mathbf{N}$ ——自然数集

$\mathbf{Z}$ ——整数集

Q ——有理数

R ——实数

C ——复数

Z^+ ——正整数

Z^- ——负整数

Q^+ ——正有理数

Q^- ——负有理数

R^+ ——正实数

R^- ——负实数

在本书中,自然数 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$,也称为扩大自然数

1.1.2 集合的基本运算

1. 交运算

定义 1.5 设 A, B 是集合,由 A 和 B 的所有共同元素组成的集合称为 A 和 B 的交,记作 $A \cap B$ 。即:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

例如,集合 A 和 B 分别为:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

则:

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

又如,集合 A 和 B 分别为:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{b, d, f, g\}$$

则:

$$A \cap B = \{b, d\}$$

集合的交运算可以用文氏图形象地表示。在图 1.1 中,矩形表示全集 E ,两个圆分别表示集合 A 和 B ,图中阴影部分就是 $A \cap B$ 。

由集合交运算的定义可知,交运算具有以下性质:

- (1) $A \cap B = B \cap A$
- (2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (3) $A \cap A = A$
- (4) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- (5) $A \cap E = A$

如果集合 $A \cap B = \emptyset$,即 A 和 B 没有共同元素,则称 A 和 B 不相交。

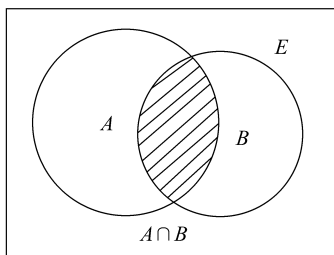


图 1.1

2. 并运算

定义 1.6 设 A, B 是集合, 由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的并, 记作 $A \cup B$, 即:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例如, 集合 A 和 B 分别为:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

则:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

又如, 集合 A 和 B 分别为:

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{c, d, e, f\}$$

则:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

集合并运算的维氏图表示见图 1.2, 图中阴影部分就是 $A \cup B$ 。

由集合的并运算定义可知, 并运算具有以下性质:

- (1) $A \cup B = B \cup A$
- (2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (3) $A \cup A = A$
- (4) $A \cup \emptyset = A$
- (5) $A \cup E = E$

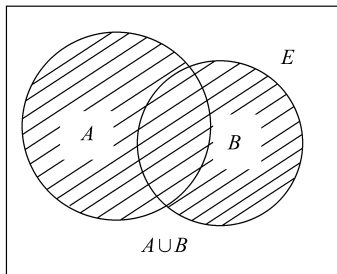


图 1.2

交和并运算有着密切联系, 下面给出交、并运算的相关公式:

相关公式:

- (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (3) $A \cap (A \cup B) = A$
 $A \cup (A \cap B) = A$

其中公式(1)说明集合的并交运算满足分配律, 运算交对于并是可分配的, 且并对交也是可分配的; 公式(2)常称为摩根律; 公式(3)常称为吸收律。

上述公式可利用定理 1.1.1 证明之, 这里不再详述。由于这些公式在集合运算中有重要用途, 希望读者能牢记这些公式, 并逐步能熟练地运用这些公式。

例 1.1 设 A, B 是集合, 证明下列等式:

- (1) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$
- (2) $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$

$$(3) (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B}) = (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$$

证明 (1) 由分配律可知:

$$\begin{aligned} A \cup (\overline{A} \cap B) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B) \\ &= E \cap (A \cup B) \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap (A \cup \overline{A})) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap E) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

(3) 由摩根律可知:

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B}) &= (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= ((A \cap B) \cup \overline{A}) \cap ((A \cap B) \cup \overline{B}) \\ &= (A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B}) \\ &= E \cap (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) \cap E \\ &= (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{A}) \end{aligned}$$

3. 减运算

定义 1.7 设 A, B 是集合, 由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 减 B 差集, 记作 $A - B$ 。

例如, A, B, C 是集合, 分别为:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 3, 5\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

则:

$$A - B = \{2, 4\}$$

$$B - A = \{5\}$$

$$A - C = \{1, 3\}$$

$$C - A = \{6, 8\}$$

$$B - C = \{1, 3, 5\}$$

$$C - B = \{2, 4, 6, 8\}$$

集合减运算的韦氏图表示见图 1.3。

由集合减运算的定义可知, 减运算有以下性质:

$$(1) A - A = \emptyset$$

$$(2) A - \emptyset = A$$

$$(3) A - E = \emptyset$$

$$(4) A - B = A \cap \overline{B}$$

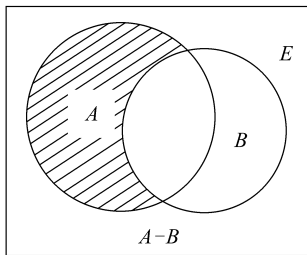


图 1.3

性质(4)表明,集合的减运算可以转化为集合的交与取补运算(如果把补集 $\bar{B}$ 看作是对 B 作取补运算),这条性质在集合的运算中有重要用途。

显然,由减运算的定义可知,补集 $\bar{A}=E-A$ 。

例 1.2 设 A, B, C 是集合,证明:

$$(1) A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$(2) A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$(3) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明 (1) 利用减运算的性质可知:

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (\overline{B \cap C}) \\ &= A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) \\ &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad A - (B \cup C) &= A \cap (\overline{B \cup C}) \\ &= A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= A \cap A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \\ &= (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C}) \\ &= (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \text{右式} &= (A \cap B) - (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \\ &= (A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) \\ &= (A \cap B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \\ &= A \cap (B \cap \bar{C}) \\ &= A \cap (B - C) \end{aligned}$$

4. 对称差运算

定义 1.8 设 A, B 是集合,由所有属于 A 但不属于 B 或者属于 B 但不属于 A 的元素构成集合,称为 A 和 B 的对称差,记作 $A \oplus B$,也即:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

例如, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$,则 $A \oplus B = \{1, 2, 4, 5\}$ 。

又如, $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}$,则 $A \oplus B = \{a, b, e, f\}$ 。

集合对称差的文氏图表示见图 1.4。

由集合对称差的定义可知,对称差有以下性质:

$$(1) A \oplus A = \emptyset$$

$$(2) A \oplus \emptyset = A$$

$$(3) A \oplus E = \bar{A}$$

$$(4) A \oplus B = B \oplus A$$

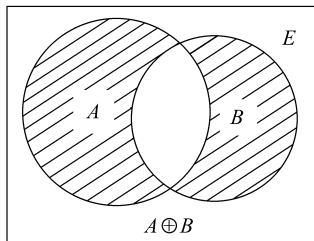


图 1.4

$$(5) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

定理 1.3 设 A, B 是集合, 则:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

证明 由对称差定义可知:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \\ &= ((A \cap \bar{B}) \cup B) \cap ((A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}) \quad (\text{分配律}) \\ &= (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \quad (\text{分配律}) \\ &= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) \quad (\text{摩根律}) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

上述定理是集合对称差的另一种重要表示形式。

至此, 已介绍了集合的4种基本运算, 为了查阅方便, 现把本小节介绍的所有公式总结如下:

- (1) $\left. \begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A \end{aligned} \right\} \text{等幂律}$
- (2) $\left. \begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \\ A \oplus B &= B \oplus A \end{aligned} \right\} \text{交换律}$
- (3) $\left. \begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \oplus B) \oplus C &= A \oplus (B \oplus C) \end{aligned} \right\} \text{结合律}$
- (4) $\left. \begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \right\} \text{分配律}$
- (5) $\left. \begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned} \right\} \text{摩根律}$
- (6) $\overline{\bar{A}} = A$
- (7) $\left. \begin{aligned} A \cap \bar{A} &= \emptyset \\ A \cup \bar{A} &= E \end{aligned} \right\} \text{补余律}$
- (8) $\left. \begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap E &= A \end{aligned} \right\} \text{同一律}$
- (9) $\left. \begin{aligned} A \cup E &= E \\ A \cap \emptyset &= \emptyset \end{aligned} \right\} \text{零一律}$
- (10) $A - B = A \cap \bar{B}$
- (11) $\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$
- (12) $A \oplus A = \emptyset$
- (13) $\overline{\emptyset} = E$

$$(14) \bar{E} = \emptyset$$

1.1.3 包含排斥原理

包含排斥原理也称为容斥原理,它是组合数学的基本原理之一,在组合计数中占有重要用途.

包含排斥原理主要讨论有限集元素的计数问题.设 A, B 是有限集合,当 A 和 B 不相交时,显然有 $|A \cup B| = |A| + |B|$,对于一般情况则有:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

上述结论常称作包含排斥原理,读者可以从集合并运算的欧氏图中得到验证.

对于 3 个有限集的包含排斥原理为:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

这是因为:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

用同样方法可得到对于 4 个有限集的包含排斥原理为:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| \\ &\quad - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| \\ &\quad - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| \\ &\quad + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

利用数学归纳法可得到对于 n 个有限集的包含排斥原理为:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

例 1.3 某班有学生 50 人,其中有 26 人爱好音乐,有 21 人爱好美术,有 14 人即爱好音乐又爱好美术.问这两种爱好都没有的学生人数是多少?

解 设 A 表示爱好音乐学生的集合;

B 表示爱好美术学生的集合.

由题设可知: $|A| = 26, |B| = 21, |A \cap B| = 14$. 利用包含排斥原理可得:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 26 + 21 - 14 = 33 \end{aligned}$$

所以既不爱好音乐又不爱好美术的学生人数为

$$50 - |A \cup B| = 50 - 33 = 17 (\text{人})$$

例 1.4 某班有学生 38 人,其中有 20 人参加合唱队,有 16 人参加话剧队,有 10 人这