第 7 章　$(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{\rho}_0^n)$的拓扑、$n$ 元函数的连续与极限

从极限理论和实数理论导出了闭区间$[a,b]$上连续函数的零值定理、介值定理、最值定理及一致连续性定理，要将这些定理推广到 n 维 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$ 中，必须介绍$\mathbb{R}^n$ 及其子集的拓扑的确切定义，随之而来的还有开集、闭集、聚点、收敛、紧致性、连通性等重要概念.本章证明了$\mathbb{R}^n$ 中子集 A 的紧致、可数紧数、列紧、序列紧致都等价于 A 为$\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集；连通集上的连续函数有零值定理与介值定理；紧致集上的连续函数有最值定理及一致连续性定理.上述内容是站在度量空间、拓扑空间高度来叙述的.考虑到 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$这一特定的度量空间、特定的拓扑空间，我们还需讨论 n 元函数的极限及相关的定理.

7.1　$(\mathbb{R}^n, \boldsymbol{\rho}_0^n)$的拓扑

为了培养读者抽象思维能力，我们采用从抽象到具体的方法，在非空集合上引进拓扑的概念，然后给出度量空间(X,ρ)诱导的拓扑空间$(X,\mathscr{T}_\rho)$，作为特殊度量空间的 Euclid 空间$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$，它相应的拓扑空间为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$，而 $\mathscr{T}_{\rho_0^n}$ 就是$\mathbb{R}^n$ 中的通常拓扑.

定义 7.1.1　如果非空集合 X 的子集族

$$\mathscr{T}=\{U \mid U \text{ 具有性质 } *\}$$

满足：

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{T}$；

(2) 若 $U_1,U_2\in\mathscr{T}$，则 $U_1\cap U_2\in\mathscr{T}$；

(3) $\bigcup\limits_{U\in\mathscr{T}_0\subset\mathscr{T}} U\in\mathscr{T}\left(\text{或表达为：若 } U_\alpha\in\mathscr{T},\alpha\in\Gamma(\text{指标集})\text{，必有}\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathscr{T}\right)$.

则称 $\mathscr{T}$ 为 X 上的一个**拓扑**，$(X,\mathscr{T})$称为 X 上的一个**拓扑空间**.

$U\in\mathscr{T}$称为$(X,\mathscr{T})$中的**开集**，如果 F 的余(补)集 $F^c=X\backslash F\in\mathscr{T}$，则称 F 为$(X,\mathscr{T})$中的**闭集**，由数学归纳法与(2)知，有限个开集的交为开集；由(3)知，任意多个开集的并为开集.

定义 7.1.2　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$(不必属于 A)，如果对 x 的任何**开邻域**(含 x 的开集)U 必有

$$U\cap(A\backslash\{x\})=(U\backslash\{x\})\cap A\neq\varnothing,$$

则称 x 为 A 的**聚点**.记 A 的聚点的全体为 A'或 A^d，称为 A 的**导集**.而 $\overline{A}=A\cup A'$称为 A

的**闭包**，有时，记 $\overline{A}$ 为 A^-，如果 $\overline{A}=X$，则称 A 为$(X,\mathscr{T})$的**稠密集**.

如果 $a\in A$，且 $a\notin A'$，则称 a 为 A 的**孤立点**. 显然，

$$a \text{ 为 } A \text{ 的孤立点} \Leftrightarrow a\in A\text{，且}\exists U_0\in\mathscr{T},\text{s. t. } U_0\cap A=\{a\}.$$

定理 7.1.1　$x\in\overline{A}\Leftrightarrow$对 x 的任何开邻域 U，有 $U\cap A\neq\varnothing$.

等价地，有

$$x\notin\overline{A}\Leftrightarrow \text{存在 } x \text{ 的开邻域 } U_0\text{，使得 } U_0\cap A=\varnothing.$$

证明　$x\in\overline{A}=A\cup A'\Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\notin A$，$x\in A'\Leftrightarrow$对 x 的任何开邻域 U，有 $U\cap A\neq\varnothing$.　□

引理 7.1.1(De Morgan 公式)

$$X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha),$$

$$X\setminus\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha).$$

如果 $A_\alpha\subset X(\forall\alpha\in\Gamma)$，则称 X 为**全空间**. 上述两式变为

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)^{\mathrm{c}}=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^{\mathrm{c}},$$

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\Big)^{\mathrm{c}}=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha^{\mathrm{c}}.$$

证明　由

$$\begin{aligned}x\in X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha&\Leftrightarrow x\in X,x\notin\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\\&\Leftrightarrow x\in X,\forall\alpha\in\Gamma,x\notin A_\alpha\\&\Leftrightarrow\forall\alpha\in\Gamma,x\in(X\setminus A_\alpha)\\&\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha)\end{aligned}$$

知

$$X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X\setminus A_\alpha).$$

第 2 式可类似证明(留作习题).　□

定理 7.1.2　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，则闭集族

$$\mathscr{F}=\{F\mid F\text{ 为}(X,\mathscr{T})\text{ 中的闭集}\}$$

具有如下性质：

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{F}$；

(2) 若 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$，则 $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$；

(3) $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}}F\in\mathscr{F}\left(\text{或表达为：若 } F_\alpha\in\mathscr{F},\alpha\in\Gamma\text{(指标集)，必有}\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\in\mathscr{F}\right)$.

由数学归纳法与(2)知，有限个闭集的并为闭集；由(3)知，任意个闭集的交为闭集.

证明 (1) 因为 $X^c=\varnothing\in\mathscr{T}$，$\varnothing^c=X\in\mathscr{T}$，所以 $X,\varnothing\in\mathscr{F}$.

(2) 因为 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$，所以 $F_1^c,F_2^c\in\mathscr{T}$，

$$(F_1\cup F_2)^c\xlongequal{\text{De Morgan 公式}}F_1^c\cap F_2^c\in\mathscr{T},$$

从而 $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$.

(3) 因为 $F_\alpha\in\mathscr{F}$，所以 $F_\alpha^c\in\mathscr{T}$，$\alpha\in\Gamma$. 于是，

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\Big)^c\xlongequal{\text{De Morgan 公式}}\bigcup_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha^c\in\mathscr{T},$$

从而 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha\in\mathscr{F}$.

或者由

$$\Big(\bigcap_{F\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}}F\Big)^c\xlongequal{\text{De Morgan 公式}}\bigcup_{F\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}}F^c\in\mathscr{T},$$

推得 $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}}F\in\mathscr{F}$. □

定理 7.1.3(导集的性质)

(1) $\varnothing'=\varnothing$；

(2) $A\subset B$ 蕴涵 $A'\subset B'$；

(3) $(A\cup B)'=A'\cup B'$.

证明 (1) $\forall x\in X$，x 的任何开邻域 U，$U\cap(\varnothing\setminus\{x\})=\varnothing$，故 $x\notin\varnothing'$，从而$\varnothing'=\varnothing$.

(2) 设 $x\in A'$，对 x 的任何开邻域 U，有 $U\cap(B\setminus\{x\})\supset U\cap(A\setminus\{x\})\neq\varnothing$，所以 $x\in B'$，从而 $A'\subset B'$.

(3) 由 $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$，根据(2)知，

$$A'\subset(A\cup B)',\quad B'\subset(A\cup B)'.$$

因此，$A'\cup B'\subset(A\cup B)'$.

另一方面，如果 $x\notin A'\cup B'$，则 $x\notin A'$且 $x\notin B'$，故存在 x 的开邻域 U_A，U_B，使得

$$U_A\cap(A\setminus\{x\})=\varnothing,\quad U_B\cap(B\setminus\{x\})=\varnothing.$$

显然，$(U_A\cap U_B)\cap(A\cup B\setminus\{x\})=\varnothing$，所以 $x\notin(A\cup B)'$. 这就证明了$(A\cup B)'\subset A'\cup B'$.

综上得到$(A\cup B)'=A'\cup B'$. □

定理 7.1.4(闭包的性质)

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$；

(2) $A\subset B$ 蕴涵 $\overline{A}\subset\overline{B}$；

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(4) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

证明 (1) $\overline{\varnothing}=\varnothing\cup\varnothing'=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

(2) 由 $A\subset B$ 与定理 7.1.3(2)得到 $A'\subset B'$，从而

$$\overline{A} = A \cup A' \subset B \cup B' = \overline{B}.$$

(3) $\overline{A \cup B} = (A \cup B) \cup (A \cup B)' \xlongequal{\text{定理 7.1.3(3)}} (A \cup B) \cup (A' \cup B') = (A \cup A') \cup (B \cup B') = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(4) 显然，$\overline{A} \subset \overline{A} \cup (\overline{A})' = \overline{(\overline{A})}$. 进而，有

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} & \xLeftrightarrow{\text{定理7.1.1}} \text{对 } x \text{ 的任何开邻域 } U, U \cap A \neq \varnothing \\ & \Longleftrightarrow \text{对 } x \text{ 的任何开邻域 } U, U \cap \overline{A} \neq \varnothing \\ & \xLeftrightarrow{\text{定理7.1.1}} x \in \overline{(\overline{A})}. \end{aligned}$$

所以，$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. □

定义 7.1.3　设$\{x_n\}$为$(X, \mathscr{T})$中的点列，如果$\exists x \in X$，对 x 的任何开邻域 U，$\exists N \in \mathbb{Z}_+$，当 $n > N$ 时，有 $x_n \in U$，则称$\{x_n\}$**收敛于** x，记作 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ 或 $x_n \to x (n \to +\infty)$，而 x 称为点列$\{x_n\}$**极限**.

定理 7.1.5　设$(X, \mathscr{T})$为拓扑空间，则(1)A 为闭集$\Leftrightarrow$(2)$A' \subset A \Leftrightarrow$(3)$\overline{A} = A \Rightarrow$(4)$\forall x_n \in A$，$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$，则 $x \in A$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2) 设 A 为闭集，则 A^c 为开集，$\forall x \in A^c$(x 的开邻域)，有

$$A^c \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing.$$

所以 $x \notin A'$，从而 $A' \subset A$.

(2)$\Leftrightarrow$(3) $A' \subset A \Leftrightarrow \overline{A} = A \cup A' = A$.

(1)$\Leftarrow$(2) 设 $A' \subset A$，$\forall x \in A^c$，必有 $x \notin A'$. 根据聚点的定义，存在 x 的开邻域 U_x，使得 $U_x \cap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$. 再从 $x \notin A$ 知 $U_x \cap A = \varnothing$，$x \in U_x \subset A^c$，于是，$A^c = \bigcup\limits_{x \in A^c} U_x$ 为开集，而 A 为闭集.

(1)$\Rightarrow$(4) 因 A 为闭集，故 A^c 为开集. (反证)假设 $x \notin A$，即 $x \in A^c$，则 A^c 为 x 的一个开邻域，由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$，故$\exists N \in \mathbb{Z}_+$，当 $n > N$ 时，有 $x_n \in A^c$，即 $x_n \notin A$，这与已知 $x_n \in A$ 相矛盾. □

下面将介绍的度量空间就是一类具有优良性质的拓扑空间.

定义 7.1.4　设 X 为非空集合，

$$\rho: X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \rho(x, y)$$

为映射，如果满足：

(1) $\rho(x, y) \geqslant 0$；且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$　(正定性)；

(2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$　(对称性)；

(3) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$　(三角(点)不等式).

则称 ρ 为 X 上的一个**度量**(或**距离**),(X,ρ)称为 X 上的一个**度量(距离)空间**,$\rho(x,y)$称为**点 x 与 y 的距离**.

现在验证:度量空间(X,ρ)上的子集族

$$\mathscr{T}_\rho=\{U\mid \forall x\in U,\exists\,\delta>0,\text{s.t. 开球 } B(x;\delta)\subset U\}$$

为 X 上的一个拓扑,称为**由ρ诱导的拓扑**,其中 $B(a;\delta)=\{y\mid y\in X,\rho(y,x)<\delta\}$是**以 x 为中心,δ 为半径的开球**.

证明 (1) 由于$\forall x\in X$,显然有 $B(x;1)\subset X$,故 $X\in\mathscr{T}_\rho$.

因为$\varnothing$不含任何元素,自然它满足 $\mathscr{T}_\rho$ 的性质,故$\varnothing\in\mathscr{T}_\rho$.

(2) 设$U_1,U_2\in\mathscr{T}_\rho$,如果 $U_1\cap U_2=\varnothing$,根据(1),$U_1\cap U_2=\varnothing\in\mathscr{T}_\rho$;如果 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$,则$\forall x\in U_1\cap U_2$,有 $x\in U_i$,$\exists\,\delta_i>0$,s.t. $B(x;\delta_i)\subset U_i\,(i=1,2)$,于是,$B(x;\delta)\subset U_1\cap U_2$,其中 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 因此,$U_1\cap U_2\in\mathscr{T}_\rho$.

(3) 设 $U_\alpha\in\mathscr{T}_\rho$,$\alpha\in\Gamma$. 如果 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$,则 $x\in U_{\alpha_0}$,$\alpha_0\in\Gamma$. 于是,$\exists\,\delta_0>0$,s.t. $B(x;\delta_0)\subset U_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha$. 因此,$\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathscr{T}_\rho$.

根据(1),(2),(3)可知 $\mathscr{T}_\rho$ 为 X 上的一个拓扑. □

在度量空间$(X,\mathscr{T}_\rho)$中显然有:

$$\begin{aligned}\text{点列}\{x_n\}\text{ 收敛于 } x_0\in X&\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbb{Z}_+,\text{当 } n>N \text{ 时},x_n\in B(x_0;\varepsilon)\\&\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\exists\,N\in\mathbb{Z}_+,\text{当 } n>N \text{ 时},\rho(x_n,x_0)<\varepsilon.\end{aligned}$$

定理 7.1.6 设(X,ρ)为度量空间,$A\subset X$,则以下结论等价:

(1) x 为 A 的聚点,即 $x\in A'$.

(2) 对 x 的任何开邻域 U,$U\cap A$ 为无限集,即 U 中含 A 的无限个点.

(3) $\exists\{x_k\}\subset A$,x_k 互异且 $x_k\neq x$,s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$.

证明 (1)$\Leftarrow$(2) 由聚点的定义即知.

(1)$\Rightarrow$(3) 设 $x\in A'$,对 x 的任何开邻域 U,$\exists\,n_1\in\mathbb{Z}_+$,s.t. $B\left(x;\dfrac{1}{n_1}\right)\subset U$,则有 $x_1\in B\left(x;\dfrac{1}{n_1}\right)\cap(A\setminus\{x\})$,取 $n_2>n_1$,s.t. $\dfrac{1}{n_2}<\rho(x_1,x)$,则对 x 的开邻域 $B\left(x;\dfrac{1}{n_2}\right)$,有 $x_2\in B\left(x;\dfrac{1}{n_2}\right)\cap(A\setminus\{x\})$,显然 $x_2\neq x_1$,依此类推,得到$\{x_k\}$,s.t. $x_k\in B\left(x;\dfrac{1}{n_k}\right)\cap(A\setminus\{x\})$,且 x_k 为异于 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 的点. 于是,x_k 互异且 $x_k\neq x$,再由 $0\leqslant\rho(x_k,x)<\dfrac{1}{n_k}\to 0\,(k\to+\infty)$得到 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$.

(2)$\Leftarrow$(3) 对 x 的任何开邻域 U,因为 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=x$,故$\exists\,K\in\mathbb{Z}_+$,当 $k>K$ 时,有 $x_k\in U$. 由于 x_k 互异知 U 中含 A 的无限个点. □

为了看出定理 7.1.6 中的(2),(3)为度量空间中特有的性质,注意下面例题.

例 7.1.1 设 X 为非空集合,$\mathscr{T}_{平庸}=\{\varnothing,X\}$,显然 $\mathscr{T}_{平庸}$ 为 X 上的一个拓扑,其开集最少,只含$\varnothing$与 X 两个,称$(X,\mathscr{T}_{平庸})$为 X 上的**平庸拓扑空间**.

当 $X=\{a,b\}$,$a\neq b$ 时,$\mathscr{T}_{平庸}=\{\varnothing,X=\{a,b\}\}$. 取 $A=\{a\}$,则 $A'=\{b\}$. 显然,b 的任何开邻域 U 必为 $X=\{a,b\}$,它只含 $A=\{a\}$的一个点 a,而不是无限个点,由于 A 为有限集,自然定理 7.1.6 中(3)不成立.

定义 7.1.5 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,$x\in X$,x 的一个开邻域族 $\mathscr{T}_x^*$,若对 x 的任何开邻域 U,均有 $U_0\in\mathscr{T}_x^*$,s. t. $x\in U_0\subset U$,则称 $\mathscr{T}_x^*$ 为 x 的一个**局部基**. 若 $\mathscr{T}_x^*$ 为至多可数集,则称 $\mathscr{T}_x^*$ 为 x 的一个**可数局部基**.

如果 $\forall\, x\in X$ 均有可数局部基,则称$(X,\mathscr{T})$为 $\boldsymbol{A}_1$ **空间**或**具有第一可数性公理**的拓扑空间.

如果有 $\mathscr{T}^*\subset\mathscr{T}$,对 $\mathscr{T}$中任一元素 U,有 $U=\bigcup\limits_{V\in\mathscr{T}_0^*\subset\mathscr{T}^*}V$(即 $\forall\, x\in U$,$\exists\, V\in\mathscr{T}^*$,s. t. $x\in V\subset U$),则称 $\mathscr{T}^*$ 为$(X,\mathscr{T})$的一个**拓扑基**,换句话说,$\mathscr{T}$是由 $\mathscr{T}^*$ 生成的,进而,当 $\mathscr{T}^*$ 为至多可数集时,称 $\mathscr{T}^*$ 为$(X,\mathscr{T})$的一个**可数拓扑基**. 有可数拓扑基的拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为 $\boldsymbol{A}_2$ **空间**或**具有第二可数性公理**的拓扑空间.

显然 A_2 空间必为 A_1 空间($\mathscr{T}_x^*=\{U\mid U\in\mathscr{T}^*,x\in U\}$为 x 处的可数局部基). 但反之不一定成立.

例 7.1.2 设 X 为非空集合,$\mathscr{T}_{离散}=\{A\mid A\subset X\}$显然为一个拓扑,它的开集最多,称$(X,\mathscr{T}_{离散})$为 X 上的**离散拓扑空间**. 容易看出$(X,\mathscr{T}_{离散})$为 A_1 空间($\mathscr{T}_x^*=\{\{x\}\}$为 x 处的可数局部基).

但值得注意的是$(X,\mathscr{T}_{离散})$未必为 A_2 空间. 例如,当 X 为不可数集时,$(X,\mathscr{T}_{离散})$就不是 A_2 空间.

证明 (反证)假设$(X,\mathscr{T}_{离散})$为 A_2 空间,则有可数拓扑基 $\mathscr{T}^*$. 由于独点集$\{x\}\in\mathscr{T}_{离散}$,根据拓扑基定义知,$\exists\, U_x\in\mathscr{T}^*$,s. t. $x\in U_x\subset\{x\}$,则$\{x\}=U_x$. 由此推得$\{\{x\}\mid x\in X\}\subset\mathscr{T}^*$,从而$\{\{x\}\mid x\in X\}$与 X 为至多可数集,这与 X 为不可数集相矛盾. □

定理 7.1.7 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,在 $x\in X$ 处有可数局部基 $\mathscr{T}^*=\{U_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$,则必有 x 的可数局部基 $\mathscr{T}^{**}=\{V_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$,s. t. $V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset V_{n+1}\supset\cdots$,并称 $\mathscr{T}^{**}$ 为 x 处的**规范可数局部基**.

证明 令 $V_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\subset U_n$. 显然 $V_n\in\mathscr{T}$,且 $V_1\supset V_2\supset\cdots\supset V_n\supset V_{n+1}\supset\cdots$. 再证$\{V_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$为 x 处的局部基. 事实上,对 x 的任何开邻域 U,必有 $U_n\in\mathscr{T}^*$ s. t. $x\in U_n\subset U$. 根据 V_n 的定义,$x\in V_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\subset U_n\subset U$. 这就证明了$\{V_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$为 x 处的局部基. □

定理 7.1.8 设$(X,\mathscr{T})$为 A_1 空间,则

$$A\text{ 为闭集}\Leftrightarrow \forall x_n\in A,\lim_{n\to+\infty}x_n=x,\text{则 }x\in A.$$

证明 $(\Rightarrow)$ 由定理 7.1.5(1)$\Rightarrow$(4).

$(\Leftarrow)$(反证)假设 A 不为闭集,则 $\exists x\in A'$,$x\notin A$. 因为$(X,\mathscr{T})$为 A_1 空间,根据定理 7.1.7,x 处有规范可数局部基$\{V_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$. 于是,对 x 的任何开邻域 V_n,有 $V_n\cap(A\backslash\{x\})\neq\varnothing$. 取 $x_n\in V_n\cap(A\backslash\{x\})\subset A$,显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 事实上,对 x 的任何开邻域 U,由$\{V_n|n\in\mathbb{Z}_+\}$为 x 处的规范可数局部基,故 $\exists N\in\mathbb{Z}_+$,s. t. $x\in V_N\subset U$,当 $n>N$ 时,$x_n\in V_n\subset V_N\subset U$,这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 但是,$x\notin A$,这与右边条件矛盾. □

定义 7.1.6 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间,如果 $\forall p,q\in X$,$p\neq q$ 均有 p 的开邻域 U 与 q 的开邻域 V,s. t. $U\cap V=\varnothing$,则称$(X,\mathscr{T})$为 $\boldsymbol{T}_2$ **空间或 Hausdorff 空间**.

定理 7.1.9 设$(X,\mathscr{T})$为 T_2 空间,点列$\{x_n\}\subset X$ 收敛,则极限是惟一的.

证明 (反证)假设极限不惟一,则 $\exists x,y\in X$,$x\neq y$,s. t. $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=y$. 因为$(X,\mathscr{T})$为 T_2 空间,所以存在 x 的开邻域 U 与 y 的开邻域 V,s. t. $U\cap V=\varnothing$. 根据极限的定义,$\exists N_1,N_2\in\mathbb{Z}_+$,当 $n>N_1$ 时,$x_n\in U$;当 $n>N_2$ 时,$x_n\in V$. 于是,当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$时,$x_n\in U\cap V=\varnothing$,矛盾. □

例 7.1.3 设 X 至少含两个点,$\{x_n\}$为$(X,\mathscr{T}_{平庸})$中的任一点列,则 $\forall x\in X$,都必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

事实上,对 x 的任何开邻域 U,必有 $U=X$,故当 $n>N=1$ 时,$x_n\in X=U$,这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 因此,$X$ 中任一点都为点列$\{x_n\}$的极限,这个结果真出乎意料!

引理 7.1.2 (X,ρ)中的开球 $B(x;\delta)$为开集.

证明 $\forall y\in B(x;\delta)$,必有 $B(y;\delta-\rho(x,y))\subset B(x;\delta)$,因此 $B(x;\delta)\in\mathscr{T}_\rho$,即开球 $B(x;\delta)$为开集. □

例 7.1.4 设 X 为非空集合,ρ: $X\times X\to\mathbb{R}$,$(x,y)\mapsto\rho(x,y)$,其中

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

显然,(X,ρ)为 X 上的一个度量空间,并且开球

$$B(x;\delta)=\begin{cases}\{x\}, & 0<\delta\leqslant 1,\\ X, & \delta>1.\end{cases}$$

由此可知,每个独点集$\{x\}$均为$(X,\mathscr{T}_\rho)$中的开集(实际上是开球). $\forall A\subset X$,

$$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}=\bigcup_{x\in A}B(x;1)$$

为$(X,\mathscr{T}_\rho)$的开集. 因此 $\mathscr{T}_\rho=\{A|A\subset X\}=\mathscr{T}_{离散}$.

例 7.1.5　设(X,ρ)为度量空间，$Y\subset X$ 为非空集合，显然，$\rho_Y=\rho|_Y: Y\times Y\to\mathbb{R}$，$\rho_Y(x,y)=\rho(x,y)$为 Y 上的一个度量(距离)，使得(Y,ρ_Y)为 Y 上的一个度量(距离)空间，称为(X,ρ)的一个**子度量空间**. 其开球

$$\begin{aligned}B_Y(x;\delta)&=\{y\mid y\in Y,\rho_Y(y,x)=\rho(y,x)<\delta\}\\&=\{y\mid y\in X,\rho(y,x)<\delta\}\cap Y=B(x;\delta)\cap Y.\end{aligned}$$

这表明(Y,ρ_Y)中的以 x 为中心、δ 为半径的开球 $B_Y(X;\delta)$就是(X,ρ)中以 x 为中心、δ 为半径的开球 $B(x;\delta)$与 Y 的交.

例 7.1.6　设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$Y\subset X$ 为非空集合，记

$$\mathscr{T}_Y=\{U\cap Y\mid U\in\mathscr{T}\},$$

则 $\mathscr{T}_Y$ 为 Y 上的一个拓扑，称为**由$\mathscr{T}$诱导的拓扑**，$(Y,\mathscr{T}_Y)$称为$(X,\mathscr{T})$的**诱导拓扑空间**或**子拓扑空间**.

证明　(1) $\varnothing=\varnothing\cap Y\in\mathscr{T}_Y$，$Y=X\cap Y\in\mathscr{T}_Y$.

(2) 若 $H_i=U_i\cap Y\in\mathscr{T}_Y$，$U_i\in\mathscr{T}(i=1,2)$，则 $U_1\cap U_2\in\mathscr{T}$，从而

$$H_1\cap H_2=(U_1\cap Y)\cap(U_2\cap Y)=(U_1\cap U_2)\cap Y\in\mathscr{T}_Y.$$

(3) 若 $H_\alpha=U_\alpha\cap Y\in\mathscr{T}_Y$，$U_\alpha\in\mathscr{T}$，$\alpha\in\Gamma$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\mathscr{T}$，从而

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}H_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(U_\alpha\cap Y)=\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\Big)\cap Y\in\mathscr{T}_Y.$$

根据(1)，(2)，(3)推得 $\mathscr{T}_Y$ 为 Y 上的一个拓扑.　□

引理 7.1.3　设(X,ρ)为度量空间，$Y\subset X$ 为非空子集，则 $\mathscr{T}_{\rho_Y}=(\mathscr{T}_\rho)_Y$.

证明　$\forall H\in(\mathscr{T}_\rho)_Y$，则 $H=U\cap Y$，$U\in\mathscr{T}_\rho$. $\forall x\in H$，必有开球 $B(x;\delta)\subset U$，则

$$B_Y(x;\delta)=B(x;\delta)\cap Y\subset U\cap Y=H,$$

从而 $H\in\mathscr{T}_{\rho_Y}$，$(\mathscr{T}_\rho)_Y\subset\mathscr{T}_{\rho_Y}$.

反之，$\forall H\in\mathscr{T}_{\rho_Y}$，$\forall x\in H$，必有 $B(x;\delta_x)\cap Y=B_Y(x;\delta_x)\subset H$，则

$$H=\bigcup_{x\in H}B_Y(x;\delta_x)=\Big(\bigcup_{x\in H}B(x;\delta_x)\Big)\cap Y\in(\mathscr{T}_\rho)_Y,\quad \mathscr{T}_{\rho_Y}\subset(\mathscr{T}_\rho)_Y.$$

综上可知，$\mathscr{T}_{\rho_Y}=(\mathscr{T}_\rho)_Y$.　□

引理 7.1.4　设(X,ρ)为度量空间，则$(X,\mathscr{T}_\rho)$为 A_1 空间、T_2 空间.

证明　容易验证$\left\{B\left(x;\dfrac{1}{n}\right)\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}_+\right\}$为 x 点处的规范可数局部基；而$\{B(x;r)\mid r\in\mathbb{Q},r>0\}$为 x 点处的可数局部基. 因此$(x,\mathscr{T}_\rho)$为 A_1 空间.

$\forall p,q\in X$，$p\neq q$，显然 $B\left(p;\dfrac{1}{2}\rho(p,q)\right)$与 $B\left(q;\dfrac{1}{2}\rho(p,q)\right)$分别为 p 与 q 的两个不相交的开球邻域，所以$(X,\mathscr{T}_\rho)$为 T_2 空间.　□

推论 7.1.1 设(X,ρ)为度量空间,则有:

(1) A 为闭集$\Leftrightarrow \forall x_n\in A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$,则 $x\in A$;

(2) 如果点列$\{x_n\}\subset X$ 收敛,则极限是惟一的.

证明 (1) 可由引理 7.1.4 与定理 7.1.8 推得.

(2) 可由引理 7.1.4 与定理 7.1.9 推得. □

注 7.1.1 设 X 为不可数集,

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

由例 7.1.4 知,$\mathscr{T}_\rho=\mathscr{T}_{离散}$. 再由例 7.1.2 知,$(X,\mathscr{T}_\rho)=(X,\mathscr{T}_{离散})$为 A_1 空间,但不为 A_2 空间. 此例表明度量空间只是 A_1 空间($\mathscr{T}^*=\left\{B\left(x;\dfrac{1}{n}\right)\middle| n\in\mathbb{Z}_+\right\}$为 x 处的规范可数局部基),未必是 A_2 空间.

现在来讨论最重要的一个度量空间——通常的 Euclid 空间.

例 7.1.7 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\},$$

并称$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i$ 为向量$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积,也记为 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$;称 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**模**、**范数**或**长度**;由此,我们还定义 $\rho_0^n:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mapsto\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 下面证明 ρ_0^n 为$\mathbb{R}^n$ 上的一个度量(距离),使得$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$为$\mathbb{R}^n$ 的一个度量空间,它诱导的拓扑空间为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$. 这就是通常的 **$n$ 维 Euclid 空间**.

证明 (1) $\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$,$\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow x_i-y_i=0,i=1,2,\cdots,n$

$$\Leftrightarrow x_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y};$$

(2) $\rho_0^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(y_i-x_i)^2}=\rho_0^n(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

(3) 由关于 t 的二次三项式

$$\sum_{i=1}^n a_i^2-2\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)t+\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)t^2=\sum_{i=1}^n(a_i-b_it)^2\geqslant 0$$

的判别式 $\Delta=4\left[\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\right]\leqslant 0$ 得到 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2\leqslant\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2.$$

由此推得

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)\right]^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2,$$

$$\begin{aligned}\rho_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)+(y_i-z_i)]^2}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(x_i-y_i)^2+(y_i-z_i)^2+2(x_i-y_i)(y_i-z_i)]}\\&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}=\rho_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho_0(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$ □

$B(\boldsymbol{x};\delta)=\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mid(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2<\delta^2\}$称为$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$中以 $\boldsymbol{x}$ 为中心，$\delta>0$ 为半径的 **n 维开球体.**

当 $n=1$ 时，$(\mathbb{R}^1,\rho_0^1)$称为 **Euclid 直线或实直线**，$B(x;\delta)=(x-\delta,x+\delta)$为开区间；

当 $n=2$ 时，$(\mathbb{R}^2,\rho_0^2)$称为 **Euclid 平面**，$B(\boldsymbol{x};\delta)=\{(y_1,y_2)\mid(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2<\delta\}$为开圆片；

当 $n=3$ 时，$(\mathbb{R}^3,\rho_0^3)$称为**三维 Euclid 空间**，$B(\boldsymbol{x};\delta)=\{(y_1,y_2,y_3)\mid(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2<\delta^2\}$为三维开球体.

$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$作为一个特殊的度量空间，凡是拓扑空间与度量空间具有的性质，$(\mathbb{R}^n,\rho_0^n)$也必具有，除此以外，还应注意一般度量空间不具有的性质.

不难证明$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$为 A_2 空间. 事实上 $\mathscr{T}^*=\left\{B\left(\boldsymbol{x};\frac{1}{m}\right)\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{Q}^n,m\in\mathbb{Z}_+\right\}$或 $\mathscr{T}^{**}=\{B(\boldsymbol{x};\delta)\mid\boldsymbol{x}\in\mathbb{Q}^n,\delta\in\mathbb{Q},\delta>0\}$都为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$的可数拓扑基.

例 7.1.8 设$\mathbb{Q}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{Q},i=1,2,\cdots,n\}$，易见$\overline{\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$，$\overline{\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{Q}^n}=\mathbb{R}^n$，因此，$\mathbb{Q}^n$ 与$\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{Q}^n$ 都为$(\mathbb{R}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$中的稠密集，而

$$B_{\mathbb{Q}^n}(\boldsymbol{x};\delta)=B(\boldsymbol{x};\delta)\cap\mathbb{Q}^n$$

为$(\mathbb{Q}^n,\mathscr{T}_{\rho_0^n})$的开球 $B(\boldsymbol{x};\delta)$中有理点(n 个坐标都为有理数的点)的全体.

例 7.1.9 在直线$\mathbb{R}^1$ 上的通常拓扑空间$(\mathbb{R}^1,\mathscr{T}_{\rho_0^1})$中，

$$U\text{ 为开集}\Leftrightarrow U=\bigcup_{i\in\Gamma}(\alpha_i,\beta_i),$$

其中 Γ 为至多可数集，(α_i,β_i)为两两不相交的开区间，称为开集 U 的**构成区间.**

证明 ($\Leftarrow$) 由 $\mathscr{T}_{\rho_0^1}$的定义可得到.

($\Rightarrow$) 设 U 为$(\mathbb{R}^1,\mathscr{T}_{\rho_0^1})$中的开集，$\forall a\in U$，$\exists\,\delta>0$，s. t.

$$(a-\delta,a+\delta)=B(a;\delta)\subset U.$$

令

$$\alpha_a=\inf\{x\mid(x,a)\subset U\},\quad\beta_a=\sup\{x\mid(a,x)\subset U\},$$