第1章

动态测量基础

测量的质量在很大程度上取决于测量系统的特性，测量系统的特性通常可以分为静态特性和动态特性。在静态测量条件下，测量系统的输入量和输出量之间的对应关系称为系统的静态特性。测量系统的动态特性是在动态条件下，即输入信号为动态信号时，系统的响应特性，它是以测量动力学为基础的动态特性指标来衡量动态测量过程品质的。

实际上测量系统的静态特性也同样影响动态测量条件下的测量品质。然而，同时考虑静态特性的影响，将使描述测量系统动态关系的微分方程的求解变得非常复杂，因此，在讨论测量系统的动态特性时，忽略摩擦、滞后、空隙等影响测量系统静态特性的因素，而测量系统的总的性能则由系统的静态特性和动态特性共同决定。

1.1 测量系统的静态特性

1.1.1 测量系统的基本静态特性

如果被测物理量是一个不随时间变化，或随时间变化缓慢的物理量，例如室温、大气压力、湿度等稳态量，则对于测量系统只需考虑其静态特性。

测量系统的基本静态特性，是指被测物理量和测量系统均处于稳定状态时，系统的输出量与输入量之间的函数关系。显然，如果该函数关系已知，则可由输出量求得被测的物理量（输入量）。通常对静态特性而言，输入量 x 和输出量 y 之间的关系可用下述代数方程来描述：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1-1}$$

式中，系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 决定了测量系统输入-输出关系曲线的形状和位置，是决定测量

系统基本静态特性的参数。最理想的测量系统其静态特性曲线是线性的。

测量系统的基本静态特性可以通过对测量系统的静态标定来获得，即通过静态标定得到一组标定数据，然后通过曲线拟合的方法求得测量系统的基本静态特性曲线。

对于由若干测量设备组成的复杂测量系统，其基本静态特性则是诸测量设备静态特性的合成。例如对串联测量系统（见图 1-1），若各个设备的静态特性分别为：$y_1=f(x)$，$y_2=f(y_1)$，…，$y_n=f(y_{n-1})$，则串联系统总的静态特性为

$$y_n = f_n\{f_{n-1}\cdots f_2[f_1(x)]\} \tag{1-2}$$

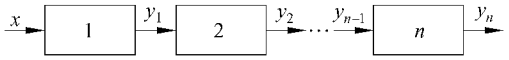

图 1-1　串联测量系统

若各测量设备均具有线性的静态特性，即 $y_1=K_1x$，$y_i=K_iy_{i-1}$，$i=2,3,\cdots,n$，则串联测量系统也具有线性静态特性：

$$y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right)x \tag{1-3}$$

依据同样的方法，对于并联测量系统、反馈测量系统等其他任何形式的测量系统，只要各组成部分的基本静态特性已知，就不难求得测量系统总的静态特性。

1.1.2　测量系统的静态性能指标

描述测量系统在静态测量条件下的测量品质的静态性能指标主要有如下几种。

1. 灵敏度

灵敏度是测量系统静态特性的一个基本参数。其定义为：当输入量变化很小时，测量系统输出量的变化 Δy 与引起这种变化的相应输入量的变化 Δx 之比。若用 S 表示灵敏度，则

$$S = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1-4}$$

对于线性测量系统，其灵敏度是常量；而对于非线性测量系统，其灵敏度将随输入量的变化而变化。由于灵敏度对测量品质影响很大，所以一般测量系统或仪表均给出灵敏度值。

2. 分辨率

分辨率是与灵敏度有关的另一静态性能指标，它是指测量系统能够检测出被测量最小变化量的能力。在数字测量系统中，分辨率比灵敏度更为常用。

3. 量程

测量系统所能测量的最大输入量与最小输入量之间的范围，称为该测量系统的量程。组成测量系统时正确选择仪表量程是十分重要的。通常使被测量量落在系统量程的2/3～3/4处为最佳。如果量程选择太小，被测量的值有可能超过测量量程而使系统因过载而受损；如果量程选择太大，则又会使测量精度下降。

4. 基本误差

测量系统的基本误差，是指在规定的标准条件下，用标准设备进行静态标定时，测量系统在全量程中所产生的最大绝对误差的绝对值与系统量程之比。如果用 R 表示基本误差，则

$$R = \frac{|\delta_{\max}|}{A} \times 100\% \tag{1-5}$$

式中，A 为系统量程；δ 为绝对误差。

5. 精确度

精确度表征某物理量的测定值与真实值的符合程度，简称精度。它反映测量时系统误差和随机误差的综合影响。一般常用基本误差不超过某一允许误差来表示精度，即允许误差去掉百分号之后的数值即为该测量系统或仪表的精度等级。

6. 迟滞误差

测量系统的输入量从量程下限增至量程上限的测量过程称为正行程；反之输入量从量程上限减至量程下限的测量过程称为反行程。理想测量系统的正、反行程的输入-输出关系曲线应是完全重合的。但实际测量系统对同一输入量，其正、反行程的输出量往往并不相等，这种现象称为迟滞。正、反行程造成的输出量之间的差值则称为迟滞差值。图1-2表示了这种迟滞现象和迟滞差值。全量程中的最大迟滞差值 $\Delta H_{\max}$ 与满量程输出值 $Y_{\max}$ 之比，定义为测量系统的迟滞误差，记作 ξ_H，即

$$\xi_H = \frac{\Delta H_{\max}}{Y_{\max}} \times 100\% \tag{1-6}$$

迟滞误差通常是由测量系统中的弹性元件、磁性元件等的滞后现象引起的，也可能起因于测量系统中存在的摩擦或间隙。迟滞误差又称为回差或变差。

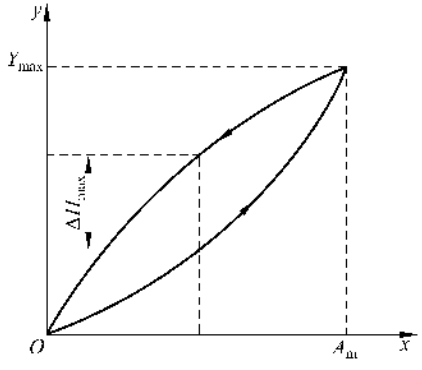

图1-2　迟滞误差

7. 线性度

理想测量系统的输入-输出关系是线性的，但实际测量系统并非如此（见图1-2）。测量系统的

线性度，是全量程范围内的实际特性曲线与理想特性曲线之间的最大偏差值 ΔL_{max} 与满量程输出值 Y_{max} 之比，它反映实际特性曲线与理想特性曲线之间的符合程度。线性度也称为非线性误差，记作 ξ_L，即

$$\xi_L = \frac{\Delta L_{max}}{Y_{max}} \times 100\% \tag{1-7}$$

8. 温度漂移

工作环境温度会对测量系统的特性产生影响。因环境温度变化所引起的测量系统输出量的变化称为温度漂移，通常用环境温度偏离标准温度（一般为 20℃）时的输出值与环境温度下的输出值之差，与温度变化率之比来表示，记作 ξ_t，即

$$\xi_t = \frac{y_t - y_{20}}{\Delta t} \tag{1-8}$$

式中，Δt 为测量系统环境温度 t 与标准温度（20℃）之差值；y_t 为环境温度 t 时系统的输出；y_{20} 为标准温度（20℃）下系统的输出。

温度漂移对测量系统静态特性的影响主要表现为：

（1）使静态特性曲线平移，但斜率不变。这种影响称为热零点漂移或温度零点漂移。

（2）使静态特性曲线斜率变化。这种影响称为热灵敏度漂移或温度灵敏度漂移。

1.2 测量系统的动态特性

1.2.1 连续系统的特性方程及其响应

1. 连续系统数学模型及传递函数的一般表达式

测量系统与其他系统一样，其特性可用微分方程来描述。对于一个线性、定常系统，其特性方程是一个 n 阶常系数线性微分方程，其一般形式为

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{1-9}$$

式中，$y(t)$ 为系统的输出信号；$x(t)$ 为系统的输入信号；a_i、b_j 为常系数，$i=0,1,\cdots,n$，而 $j=0,1,\cdots,m$。

为了更好地描述线性定常系统的输入与输出的关系，人们引入了传递函数的概念。传递函数是一种以系统参数表示的线性定常系统的输入量与输出量之间的关系，它表达了系统本身的特性，而与输入量或驱动函数无关。从数学上讲，传递函数定义为初始条件为零时，输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。因此对于上述线性定常系统，其传

递函数的一般表达式为

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{b_mS^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1S+b_0}{a_nS^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0} \tag{1-10}$$

传递函数是研究线性系统动态特性的重要工具，利用这一工具可以大大简化系统动态性能的分析。例如，已知系统的传递函数 $W(S)$，则任意输入量的像函数乘上传递函数，就得到输出量的像函数，经查表求得拉氏反变换后，即可直接得出输出量。即由式(1-10)有

$$y(t)=L^{-1}[Y(S)]=L^{-1}[W(S)X(S)] \tag{1-11}$$

利用传递函数还有助于确定测量系统总的动态特性。通常测量系统总是由若干测量环节组成，各测量环节则按一定的信号传递方式联接。虽然各测量环节的信号联接方式多种多样，但其典型的联接方式只有串联、并联和反馈联接。掌握这几种典型联接方式下传递函数的综合求解方法，即可求得各种复杂系统的总传递函数，这对分析测量系统的动态特性是极为重要的。值得注意的是，这里所讲的环节联接是指环节之间的信号传递关系，而不是指各个测量元件之间结构上的联接。

2. 系统环节之间的信号传递关系

1）环节的串联

环节的串联如图1-3所示。其特点是前一环节的输出信号是后一环节的输入信号，任何一个环节的输出信号均对以前各个环节无任何反作用。

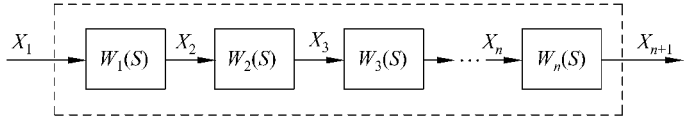

图1-3　环节的串联

设各串联环节的传递函数分别为 $W_1(S)$，$W_2(S)$，$W_3(S)$，…，$W_n(S)$，则整个串联环节的传递函数 $W(S)$ 应为

$$\begin{aligned}W(S)&=\frac{X_{n+1}(S)}{X_1(S)}=\frac{X_2(S)}{X_1(S)}\cdot\frac{X_3(S)}{X_2(S)}\cdot\frac{X_4(S)}{X_3(S)}\cdots\frac{X_{n+1}(S)}{X_n(S)}\\&=W_1(S)W_2(S)W_3(S)\cdots W_n(S)\end{aligned} \tag{1-12}$$

因此，若干个环节串联后，总的传递函数等于各个环节传递函数之积。

2）环节的并联

环节的并联如图1-4所示。其特点是一个信号 X 同时送入各环节的输入端，各个环节输出信号之和 Y 为总的输出信号。如果各个并联环节的传递函数分别为 $W_1(S)$，$W_2(S)$，…，$W_n(S)$，则总并联环节的传递函数为

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{Y_1(S)+Y_2(S)+\cdots+Y_n(S)}{X(S)}$$
$$=W_1(S)+W_2(S)+\cdots+W_n(S) \tag{1-13}$$

因此，若干个环节并联后，总的传递函数等于各个环节传递函数之和。

3）环节的反馈联接

环节的反馈联接如图 1-5 所示。其特点是两个环节首尾互相联接形成一个闭合回路，其外部输入信号为 X_1，输出信号为 Y。其中 $W_A(S)$为正向环节，它接受输入信号 X_1 并产生输出信号 Y；$W_B(S)$为反馈环节，它以 Y 为输入信号并将输出信号 X_2 送至正向环节的输入端。

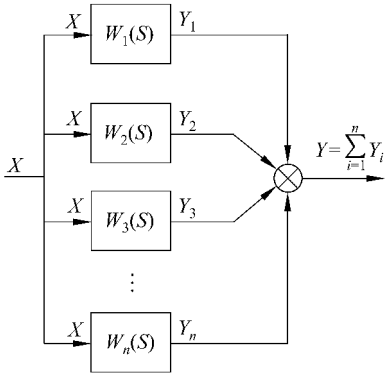

图 1-4　环节的并联

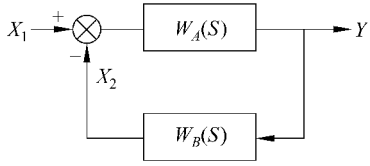

图 1-5　环节的反馈联接

X_2 称为反馈信号。在实际的测量系统中，$W_A(S)$和 $W_B(S)$可能是由若干个环节串联、并联或反馈联接构成的。

根据反馈信号 X_2 和输入信号 X_1 的叠加方式可将反馈联接分为正反馈和负反馈。正反馈是输入信号和反馈信号相加后再送入正向环节，它对输入信号起放大作用；负反馈是输入信号和反馈信号相减后再送入正向环节，它对输入信号起抑制作用。

在负反馈的情况下，很容易从图 1-5 中导得

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X_1(S)}=\frac{W_A(S)}{1+W_A(S)W_B(S)} \tag{1-14}$$

对于正反馈则有

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X_1(S)}=\frac{W_A(S)}{1-W_A(S)W_B(S)} \tag{1-15}$$

1.2.2　典型测量系统的动态特性

大多数测量系统的动态特性都可归属于零阶、一阶和二阶系统。尽管实际上存在着

更高阶的复杂测量系统，但在一定条件下，它们都可以用上述三种基本系统的动态特性的某种组合来逼近。

1. 零阶测量系统

在方程(1-9)所描述的测量系统中，若方程各常系数中，除 a_0、b_0 外其余全部为零，则微分方程就变成简单的代数方程，即 $a_0y(t)=b_0x(t)$。通常将该代数方程写成

$$y(t) = Kx(t) \tag{1-16}$$

式中，$K=b_0/a_0$，称为测量系统的静态灵敏度或放大系数。可用方程(1-16)来描述其动态特性的测量系统就称为零阶测量系统。

零阶测量系统具有理想的动态特性，不论被测物理量 $x(t)$ 如何随时间变化，零阶测量系统的输出都不会失真，其输出在时间上也无任何滞后。由于输出信号能按一定比例、无延迟和无惯性地复现输入信号的变化，所以零阶测量系统又称为比例测量系统。

2. 一阶测量系统

若方程(1-9)中除 a_1、a_0 和 b_0 外，其余系数均为零，则有

$$a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t) = b_0x(t) \tag{1-17}$$

可用上述方程来描述动态特性的系统，称为一阶测量系统。

在实用中常将式(1-17)中的三个系数 a_1、a_0、b_0 合并成两个基本系数，即用 a_0 除方程两边并进行拉氏变换，由此得

$$TSY(S)+Y(S) = KX(S) \tag{1-18}$$

式中，$T=a_1/a_0$ 为时间常数；$K=b_0/a_0$ 为静态灵敏度或放大系数。时间常数 T 具有时间的量纲，它反映测量系统惯性的大小。静态灵敏度则说明系统的静态特性。热电偶测温和水银温度计测温，以及测量线路中常采用的阻容滤波器都是典型的一阶系统，一阶系统又称为惯性系统。

一阶测量系统的传递函数为

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{K}{TS+1} \tag{1-19}$$

3. 二阶测量系统

二阶测量系统的数学模型为

$$a_2\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t) = b_0x(t) \tag{1-20}$$

将式(1-20)两边同时除以 a_0，并引入新的参数，描述二阶测量系统的微分方程可写成

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t) = Kx(t) \tag{1-21}$$

式中，$K=b_0/a_0$ 为系统的静态灵敏度或放大系数；$\omega_n=\sqrt{a_0/a_2}$ 为系统的固有频率或无阻

尼自然振荡频率；$\zeta = a_1/2\sqrt{a_0 a_2}$，为系统的阻尼系数。

由式(1-21)可得二阶测量系统的传递函数为

$$W(S) = \frac{K\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2} \tag{1-22}$$

根据二阶微分方程特征方程根的性质不同，二阶测量系统又可分为：

(1) 二阶惯性测量系统。其特点是特征方程的根为两个负实根，它相当于两个一阶测量系统串联。

(2) 二阶振荡系统。其特点是特征方程的根为一对带负实部的共轭复根。当输入信号为一个阶跃信号时，输出信号是一条衰减的正弦曲线；如果阻尼系数等于零，则输出信号是一条等幅的振荡曲线。

除了上述的基本测量系统外还有两种典型的测量系统，即微分测量系统和纯延迟测量系统。

理想微分测量系统的特点是，输出信号和输入信号的一阶导数成正比例。它的动态特性为

$$y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt} \tag{1-23}$$

式中，T_d 为理想微分测量系统的微分时间常数。

实际微分测量系统的动态特性为

$$T_C \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_D \frac{dx(t)}{dt} \tag{1-24}$$

式中，T_D 为实际微分测量系统的微分时间常数。

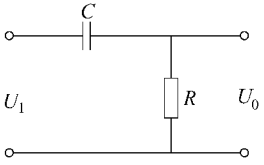

图 1-6 *RC* 微分电路

如图 1-6 所示的 RC 微分电路，其输入电压 U_1 与输出电压 U_0 之间有如下关系：

$$RC\frac{dU_0}{dt} + U_0 = RC\frac{dU_1}{dt} \tag{1-25}$$

由此可见，RC 微分电路具有实际微分系统的动态特性。

纯延迟测量系统的特征是，输出信号的大小、波形与输入信号的大小、波形完全相同，只是滞后一段时间。其动态特性为

$$y(t) = x(t - \tau_0) \tag{1-26}$$

式中，τ_0 为纯延迟时间。

1.3 测量系统的动态性能指标及其计算方法

系统的动态性能指标有两类：一类是时间域指标，另一类是频率域指标，下面分别加以介绍。

1.3.1 时间域动态性能指标及其计算

时间域动态性能指标通常用阶跃响应曲线上的特性参数来表示，主要有以下几个。

(1) 时间常数 T：响应曲线上输出值达到稳态值的63%所需的时间，称为系统的时间常数。

(2) 响应时间 T_5 和 T_2：输出值达到稳态值的95%或98%所需的时间，称为响应时间。

(3) 上升时间 T_r：输出从某一个小值(如：稳态值的5%或10%)上升到稳态值的90%所需的时间，称为上升时间。

(4) 半值时间 $T_{0.5}$：输出值达到稳态值的50%所需的时间，称为半值时间。

半值时间与时间常数的关系为：$t_{0.5}=0.7T$。

上述特征时间指标中，上升时间 T_r 的定义，在二阶系统中要分几种情况：①对于欠阻尼状态，通常采用0～100%稳态值作为上升时间；②对于过阻尼状态，采用10%～90%稳态值作为上升时间。

对于二阶系统，除了上述几个特性指标外，还有以下指标。

(5) 峰值时间 t_p：到达超调量的第一个峰值所需的时间称为峰值时间。

(6) 衰减率 d 和对数衰减率 D：系统响应曲线上相差一个周期的两个峰值 A_1 与 A_2 之比，称为衰减率，即

$$d=\frac{A_1}{A_2}=\frac{a\mathrm{e}^{-at}}{a\mathrm{e}^{-a(t+T)}}=\mathrm{e}^{aT} \tag{1-27}$$

$$D=\ln d=aT \tag{1-28}$$

式中，a 为减幅系数，$a=\zeta\omega_n$；T 为振荡周期，$T=\frac{2\pi}{\omega_d}$，其中 ω_d 为振荡频率，且有 $\omega_n=\frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$。因此有

$$D=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-29}$$

(7) 最大超调量 σ：衰减振荡曲线上第二个峰值与第一个峰值之比的平方根值，称为最大超调量，它用百分比表示。即

$$\sigma=\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \tag{1-30}$$

显然，σ、d 和 D 之间的关系为

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{d}} = e^{-\frac{aT}{2}} = e^{-\frac{D}{2}} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{1-31}$$

$$\ln\sigma = -\frac{D}{2} = -\frac{aT}{2} = -\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-32}$$

振荡周期与响应时间 T_5（达到稳态值的 95%所需的时间）及 T_2（达到稳态值的 98%所需的时间）的关系为

$$T_5 = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3T}{D} \tag{1-33}$$

$$T_2 = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4T}{D} \tag{1-34}$$

峰值时间与振荡频率的关系为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{T}{2} \tag{1-35}$$

式中，T 为振荡曲线的周期；ω_d 为振荡频率，$\omega_d = \frac{2\pi}{T}$。

上升时间 t_1 与振荡频率的关系为

$$t_1 = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{1-36}$$

式中

$$\cos\beta = \zeta \tag{1-37}$$

从而可得到系统的固有频率 ω_n 与响应曲线的振荡频率 ω_d 之间的关系为

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-38}$$

图 1-7 为二阶系统的单位阶跃响应曲线及各种特性指标。

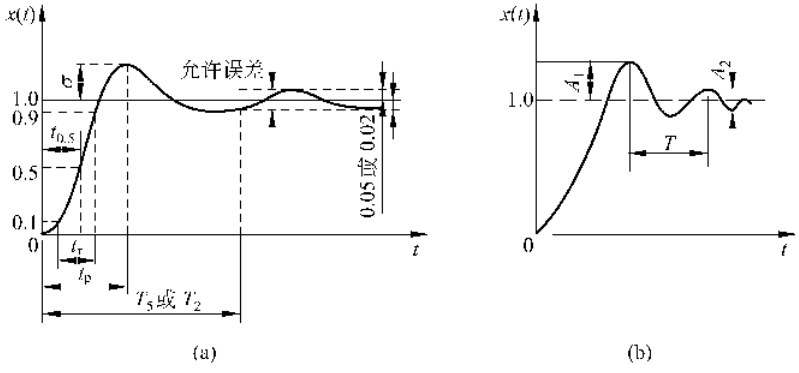

图 1-7 二阶系统阶跃响应曲线及各种时间域性能指标