第 1 章 数学语言与证明方法

1.1 内容提要

1. 常用的数学符号

- **集合符号；**
- **运算符号；**
- **逻辑符号.**

2. 集合及其运算

集合与元素：

$x \in A$（x 是 A 的元素）、$x \notin A$（x 不是 A 的元素）.

特殊数的集合：

$\mathbf{N}$（自然数集合）；$\mathbf{Z}$（整数集合）；

$\mathbf{Z}^+$（正整数集合）；$\mathbf{Q}$（有理数集合）；

$\mathbf{Q}^*$（非 0 有理数集合）；$\mathbf{R}$（实数集合）；

$\mathbf{R}^*$（非 0 实数集合）.

集合之间的关系：

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \land x \notin B)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow A \nsubseteq B \lor A = B$$

$\varnothing$（空集）：

定理 1.1 空集是一切集合的子集.

推论 空集是惟一的.

全集 全集不是惟一的.

集合的幂集：

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$$

定理 1.2 n 元集的幂集有 2^n 个元素.

集合的运算：

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$$

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$$

$$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

$$\sim A=\{x \mid x\notin A\}=E-A\text{（}E\text{ 为全集）}$$

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

注意 （1）以上有些运算可以推广到多个集合；

（2）可以用文氏图直观表示运算结果；

（3）若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是不交的.

基本集合恒等式：

幂等律 $A\cup A=A$；$A\cap A=A$.

交换律 $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律绝对形式 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$；

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$.

德摩根律相对形式 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$；$A\cap(A\cup B)=A$.

零律 $A\cup E=E$；$A\cap\varnothing=\varnothing$.

同一律 $A\cup\varnothing=A$；$A\cap E=A$.

排中律 $A\cup\sim A=E$.

矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$.

余补律 $\sim\varnothing=E$；$\sim E=\varnothing$.

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$.

补交转换律 $A-B=A\cap\sim B$.

对称差$\oplus$运算满足：

交换律 $A\oplus B=B\oplus A$.

结合律 $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$.

$\cap$对$\oplus$分配律　$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

$A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus E=\sim A$；

$A\oplus A=\varnothing$；$A\oplus\sim A=E$.

3. 证明方法概述

推理的形式结构

从前提 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 推结论 B 的形式结构

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\to B(\text{简记为 } A\to B).$$

上述推理正确，记为

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\Rightarrow B(\text{简记为 } A\Rightarrow B).$$

证明推理正确的方法：

直接证明法　由 A 为真，证明 B 为真.

间接证明法　证明 $\neg B\to\neg A$ 为真(从而 $A\to B$ 为真).

归谬法(也称**反证法**)　欲证 B 为真. 若 $\neg B$ 为真，能推出矛盾，从而证明 B 为真. 间接证明法也是特殊的归谬法.

分情况证明法(穷举法)　欲证 $(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k)\to B$ 为真，只需证明 $(A_1\to B)$，$(A_2\to B)$，$\cdots$，$(A_k\to B)$ 均为真.

构造性证明法　若 A 为真，能构造出 B 来，从而证明了 $A\to B$ 为真.

前件假证明法　若能证明 A 为假，从而证明了 $A\to B$ 为真.

后件真证明法(平凡证明法)　若能证明 B 为真，从而证明了 $A\to B$ 为真.

谬误的证明方法　举反例.

数学归纳法

第一数学归纳法的步骤：

(1) 归纳基础：证明 $P(n_0(n_0\geqslant 1))$ 为真；

(2) 归纳步骤(或归纳推导)：若 $\forall n(n\in\mathbf{N}\wedge n\geqslant n_0)$，有 $P(n)$ 为真，能证明出 $P(n+1)$ 为真.

第二数学归纳法的步骤：

(1) 归纳基础：证明 $P(n_0)$ 为真；

(2) 归纳步骤：若 $\forall n(n\in\mathbf{N}\wedge n\geqslant n_0)$，有 $P(n_0)$，$P(n_0+1)$，$\cdots$，$P(n)$ 均为真，能证明 $P(n+1)$ 为真.

1.2　习　　题

1.1　将下列各集合表示成列举法表示的集合.

(1) $\{x\mid x$ 是方程 $2x^2+3x-2=0$ 的根$\}$.

(2) $\{x \mid x$ 是方程 $x^2-2x+5=0$ 的实根$\}$.

(3) $\{x \mid x$ 是完全数 $\wedge 5 \leqslant x \leqslant 10\}$.

(4) $\{x \mid x$ 是整数 $\wedge x^2=3\}$.

(5) $\{x \mid x$ 是空集$\}$.

1.2 将下列各集合用谓词描述法表示.

(1) $\{x, y, z\}$.

(2) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(4) $\varnothing$.

1.3 判断下列每组的两个集合是否相等.

(1) $A=\{3,1,1,5,5\}, B=\{1,3,5\}$.

(2) $A=\varnothing, B=\{\varnothing\}$.

(3) $A=\varnothing, B=\{x \mid x$ 是有理数并且是无理数$\}$.

(4) $A=\{1,2,\varnothing\}, B=\{\{\varnothing\},2,1\}$.

1.4 判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$.

(2) $\varnothing \subset \varnothing$.

(3) $\varnothing \in \varnothing$.

(4) $\varnothing \in\{\varnothing\}$.

(5) $\varnothing \subseteq\{\varnothing\}$.

(6) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$.

(7) $\{\varnothing\} \in\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$.

1.5 设 A 为任意集合,判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing \in P(A)$.

(2) $\varnothing \subseteq P(A)$.

(3) $\{\varnothing\} \in P(A)$.

(4) $\{\varnothing\} \subseteq P(A)$.

(5) $\{\varnothing\} \in P P(A)$.

(6) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \subseteq P P(A)$.

1.6 求下列集合中的元素个数.

(1) $\{x \mid x \in \mathbf{Z} \wedge-3 \leqslant x<2\}$.

(2) $\{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x$ 是偶素数$\}$.

(3) $\{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x$ 是奇数 $\wedge x$ 是偶数$\}$.

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

(5) $\{\{\{\varnothing\}\}\}$.

(6) $P(A)$, $A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

1.7　设 $A=\{a,2,\{3\},4\}$, $B=\{\{a\},4,3,1\}$. 判断下列命题是否为真.

(1) $a\in A$.

(2) $a\in B$.

(3) $\{a\}\in A$.

(4) $\{a\}\in B$.

(5) $\{a\}\subseteq A$.

(6) $\{a\}\subseteq B$.

(7) $\{a,\{3\},4\}\subseteq A$.

(8) $\{a,\{3\},4\}\subseteq B$.

(9) $\varnothing\subseteq A$.

(10) $\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq B$.

1.8　已知 A,B 为两个集合,且 $A\subseteq B$,则 $A\notin B$ 一定为真吗?

1.9　设 $A=\{1,2,3,4\}$,试求出 A 的全部 2 元子集.

1.10　设 $A=\{\varnothing,a\}$,求出 A 的全部子集.

1.11　求下列集合的幂集.

(1) $\varnothing$.

(2) $\{1,\{a,b\}\}$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(4) $\{2,2,2,3\}$.

1.12　设全集 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$,其子集 $A=\{1,4\}$, $B=\{1,2,5\}$, $C=\{2,4\}$. 求下列集合.

(1) $A\cap\sim B$.

(2) $(A\cap B)\cup\sim C$.

(3) $\sim(A\cap B)$.

(4) $P(A)\cap P(B)$.

(5) $P(A)\cap\sim P(B)$.

1.13　画出下列集合的文氏图.

(1) $A\cap(B\cup C)$.

(2) $\sim A\cap\sim B\cap\sim C$.

(3) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$.

1.14　设 $A=\{\varnothing\}$, $B=\{1,2\}$,求 $P(A)\oplus P(B)$.

1.15　设 $A\subseteq B\wedge C\subseteq D$,证明 $A\cup C\subseteq B\cup D$.

1.16　设 $A\subset B\wedge C\subset D$，$A\cup C\subset B\cup D$ 一定为真吗？

1.17　设 A,B 为两个集合，已知 $A\subseteq B$，$B\in A$ 可能吗？为什么？

1.18　试确定下列集合之间的包含或属于关系.

$A=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x>0\wedge x^2=4\}$

$B=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2-5x+6=0\}$

$C=\{\{x\}\mid x\in\mathbf{N}\wedge x$ 为偶数$\}$

$D=\{\{2\},\{4\},\{3\},2,3\}$

1.19　对于题 1.18 中的 A,B,C,D，计算：

(1) $A\cup B\cup D$.

(2) $A\cap B\cap D$.

(3) $A\oplus B$.

(4) $(A\cap B)\oplus A$.

(5) $A\oplus C$.

1.20　设 $A=\{x\mid x$ 是北大文科学生$\}$；

$B=\{x\mid x$ 是北大理科学生$\}$；

$C=\{x\mid x$ 喜欢看小说$\}$；

$D=\{x\mid x$ 喜欢数学$\}$.

已知：北大文科学生都爱看小说，北大理科学生都喜欢数学，试确定 A,B,C,D 之间的包含关系.

1.21　若 $A\oplus C=B\oplus C$，一定有 $A=B$ 吗？证明之.

1.22　设 $A_i=\{1,2,\cdots,i\}$，$i=1,2,\cdots$，求：

(1) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

1.23　设 $A_i=\{i,i+1,i+2,\cdots\}$，$i=1,2,\cdots$，求：

(1) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

1.24　下列集合中，哪些是彼此相等的？

$A=\{3,4\}$；　$B=\{3,4\}\cup\varnothing$；　$C=\{3,4\}\cup\{\varnothing\}$；

$D=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2-7x+12=0\}$；　$E=\{\varnothing,3,4\}$；

$F=\{3,4,4\}$；　$G=\{4,\varnothing,\varnothing,3\}$.

1.25　设 A,B,C 为 3 个集合，证明：

(1) 若 $A\subseteq B \land B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(2) 若 $A\in B \land B\subseteq C$，则 $A\in C$.

1.26　设 A,B,C 为 3 个集合，已知 $(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$，$(A\cap\sim C)\subseteq(B\cap\sim C)$，证明：$A\subseteq B$.

1.27　设全集是某中学全体学生集合，它的子集为：

$A=\{x\mid x$ 是男生$\}$；

$B=\{x\mid x$ 是初三学生$\}$；

$C=\{x\mid x$ 是科普队的$\}$.

用谓词描述法表示下面集合：

(1) $\sim C$.

(2) $A\cap B\cap\sim C$.

(3) $\sim A\cap\sim B\cap C$.

1.28　设 A 为任一集合，证明：$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in PPP(A)$.

1.29　设 A,B 为集合，用归谬法证明：$A\cap(B-A)=\varnothing$.

1.30　设 A,B 为集合，证明：$(A\cap B)\cup(A-B)=A$(方法不限).

1.31　用间接证明法证明：若存在集合 A，对于任意的集合 B，均有 $A\cup B=B$，则 $A=\varnothing$.

1.32　用归谬法证明题 1.31 中的命题.

1.33　定理 1.1 的推论改写为："若 $\varnothing_1$，$\varnothing_2$ 是任意两个空集，则 $\varnothing_1=\varnothing_2$"，试用直接证明法与间接证明法证明之.

1.34　用数学归纳法证明：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为某全集的子集，则：

$$\sim\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(\sim A_i)$$

1.35　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 为集合，用数学归纳法证明：

$$(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\cup B=(A_1\cup B)\cap(A_2\cup B)\cap\cdots\cap(A_n\cup B)$$

1.36　用数学归纳法证明：前 n 个正奇数之和为 n^2.

1.37　用数学归纳法证明：对于 $\forall n\in\mathbf{N}^+$，则有：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.38　用数学归纳法证明：对 $\forall n\in\mathbf{N}^+$，则有：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.39　用数学归纳法证明：$\forall n\in\mathbf{N}^+$，$3\mid(n^3-n)$.

1.40　用数学归纳法证明：$\forall n \in \mathbf{N}^{+}$，$n! \geqslant 2^{n-1}$.

1.3　习题解答与分析

1.1　设本题中的 5 个集合分别为 A、B、C、D、E,它们的列举法表示为：

(1) $A=\left\{\frac{1}{2},-2\right\}$. 只需求出给定方程 $2x^2+3x-2=0$ 的两个根$\frac{1}{2}$和-2 即可.

(2) $B=\varnothing$. 只需注意到方程 $x^2-2x+5=0$ 的判别式$(-2)^2-4\times1\times5=-16<0$,因而无实根.

(3) $C=\{6\}$. 只需注意到完全数的定义：自然数 $n(n\geqslant1)$为完全数$\Leftrightarrow n$ 等于除本身以外的所有因子之和. 在 1～10 中,只有 $6=1+2+3$,所以 6 是完全数,其他 9 个数都不是完全数.

(4) $D=\varnothing$.

(5) $E=\{\varnothing\}$.

注意　本题中 $B=D=\varnothing$,这正说明空集有不同的描述方法,但空集是惟一的.

1.2　设本题中的 4 个集合分别为 A、B、C、D,则：

(1) $A=\{x|x$ 是最后 3 个英文字母之一$\}$.

(2) $B=\{x|x\in\mathbf{Z}\wedge|x|\leqslant3\}$,$\mathbf{Z}$ 为整数集.

(3) $C=\{x|x$ 为空集或以空集为元素的单元集$\}$.

(4) $D=\{x\in\mathbf{Z}\wedge x^2+2=0\}$.

注意　A、B、C、D 的表示法都不是惟一的,特别是 D 可以有多种不同的表示法.

1.3　(1) $A=B$. 只需注意在朴素集合论中,集合中的元素互不相同,并且不讲顺序.

(2) $A\neq B$. 注意到 A 中无元素,而 B 中有一个元素$\varnothing$.

(3) $A=B$. 注意,B 也是$\varnothing$.

(4) $A\neq B$. 注意,A 中的元素$\varnothing\notin B$, B 中的元素$\{\varnothing\}\notin A$.

1.4　(1)、(4)、(5)为真,其余的均为假.

分析　解本题要注意以下两点：

① 空集$\varnothing$是一切集合的子集,并且$\varnothing$是惟一的；

② 严格区分集合之间的包含关系以及元素与集合的属于关系.

由①可知(1)、(5)为真,而(2)为假. 由②可知(4)为真,而(3)、(6)、(7)为假.

1.5　只有(3)为假,其余的全为真.

分析　解本题主要应用以下定理或定义：

① 空集$\varnothing$是任何集合的子集；

② 集合幂集的定义：$P(A)=\{x|x\subseteq A\}$, $PP(A)=\{x|x\subseteq P(A)\}$；

③ 子集的定义：$A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$.

由①与②可知，$\varnothing\subseteq A\Leftrightarrow\varnothing\in P(A)$，因而(1)为真；

因为 $P(A)$ 为集合和①可知，$\varnothing\subseteq P(A)$，因而(2)为真；

因为 $\varnothing\in P(A)$ 和③可知，$\{\varnothing\}\subseteq P(A)$，因而(4)为真；

由于 $\varnothing\in P(A)$ 和②可知，$\{\varnothing\}$ 为 $PP(A)$ 的 1 元子集，所以 $\{\varnothing\}\in PP(A)$，故(5)为真；

由①和(5)可知，$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq PP(A)$，所以，(6)为真.

对于(3)，不是对任何集合都真. 当 A 中含元素 $\varnothing$ 时，(3)为真，例如 $A=\{\varnothing,a\}$，则 $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\varnothing,a\}\}$，所以，$\{\varnothing\}\in P(A)$. 而当 A 中不含 $\varnothing$ 时，如 $A=\{a,b\}$ 时，$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，此时 $\{\varnothing\}\notin P(A)$，因而 $\{\varnothing\}\in P(A)$ 为假. 由以上讨论可知，(3)中命题为假.

1.6　记(1)～(6)中集合分别为 A、B、C、D、E、F，只需将它们中的元素均写出来即可得到答案.

$$A=\{-3,-2,-1,0,1\},\ |A|=5;$$
$$B=\{2\},\ |B|=1;$$
$$C=\varnothing,\ |C|=0;$$
$$D=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\ |D|=2;$$
$$E=\{\{\{\varnothing\}\}\},\ |E|=1;$$
$$F=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\ |F|=4.$$

1.7　(1)、(4)、(5)、(7)、(9)、(10)为真，(2)、(3)、(6)、(8)为假.

1.8　$A\subseteq B$ 时，$A\notin B$ 不一定为真.

当 A 中元素都在 B 中，并且 A 也在 B 中时，$A\subseteq B$ 与 $A\in B$ 同为真. 例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c,d,\{a,b\}\}$，此时 $A\subseteq B$ 与 $A\in B$ 同真，$A\notin B$ 为假.

当 A 中元素都在 B 中，但 A 不在 B 中时，$A\subseteq B$ 为真，而 $A\in B$ 为假，即 $A\notin B$ 为真. 例如，$A=\{\varnothing,a,b,c\}$，$B=\{\{\varnothing\},\varnothing,a,b,c,d,e\}$，此时，$A\subseteq B$ 为真，$A\in B$ 为假，即 $A\notin B$ 为真.

1.9　由于 $|A|=4$，所以 A 的 2 元子集共有 C_4^2 个，它们是 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$、$\{2,3\}$、$\{2,4\}$、$\{3,4\}$.

1.10　$A=\{\varnothing,a\}$ 为 2 元集，因而 A 共有 $2^2=4$ 个子集：

0 元子集 1 个：$\varnothing$；

1 元子集 2 个：$\{\varnothing\}$，$\{a\}$；

2 元子集 1 个：$\{\varnothing,a\}=A$.

1.11　设(1)～(4)中集合分别为 A、B、C、D，注意 $D=\{2,2,2,3\}=\{2,3\}$，则：

$$P(A)=\{\varnothing\};$$
$$P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\{a,b\}\},\{1,\{a,b\}\}\};$$
$$P(C)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\};$$
$$P(D)=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}.$$

1.12 严格按定义求解本题.

(1) $\sim B=\{3,4,6\}$，$A\cap\sim B=\{4\}$.

(2) $\sim C=\{1,3,5,6\}$，$A\cap B=\{1\}$；

$(A\cap B)\cup\sim C=\{1,3,5,6\}$.

(3) $A\cap B=\{1\}$，所以，$\sim(A\cap B)=\{2,3,4,5,6\}$.

(4) $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$；

$P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2,5\}\}$；

$P(A)\cap P(B)=\{\varnothing,\{1\}\}$.

(5) $\sim P(B)=P(E)-P(B)$，而$|P(E)|=2^6=64$，$|P(B)|=2^3=8$，于是$|\sim P(B)|=64-8=56$，因而求$\sim P(B)$工作量太大了，但也可以不求$\sim P(B)$，就能求出$P(A)\cap\sim P(B)$.

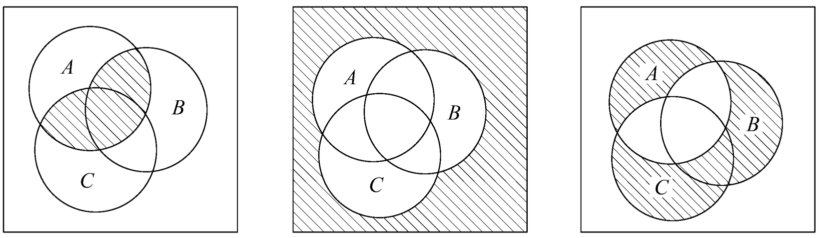
因为$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$，所以$P(A)\cap\sim P(B)$中至多有4个元素，但因$P(B)$中含$\varnothing$和$\{1\}$，所以$\sim P(B)$中不含$\varnothing$和$\{1\}$，因而$P(A)\cap\sim P(B)$不可能含$\varnothing$和$\{1\}$，又因为$4\notin B$，所以$\{4\}$，$\{1,4\}$都$\notin P(B)$，故$\{4\}\in\sim P(B)$，$\{1,4\}\in\sim P(B)$，所以，

$$P(A)\cap\sim P(B)=\{\{4\},\{1,4\}\}.$$

1.13 (1) $A\cap(B\cup C)$的文氏图为图1.1(a)中的阴影部分所示.

(2) $\sim A\cap\sim B\cap\sim C=\sim(A\cup B\cup C)$，其文氏图为图1.1(b)中的阴影部分所示.

(3) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)=A\oplus(B\cup C)$，其文氏图为图1.1(c)中的阴影部分所示.



(a) (b) (c)

图 1.1

观察图1.1，不难发现，图1.1(a)与图1.1(c)图中阴影部分所表示的集合之并为$A\cup B\cup C$. 又图1.1(a)、图1.1(b)和图1.1(c)图中阴影部分之并为全集E. 以上的观察结果