

第 3 章 数字滤波器设计

3.1 学习提示

对本章中基本概念的理解和把握是最重要的,尤其要注意不同的滤波器设计方法之间的联系,避免死记硬背,可以用适当的推导帮助理解和记忆。

模拟低通滤波器的设计是数字滤波器设计的基础,对学习设计数字滤波器有着重要意义,务必熟练掌握。一方面模拟低通滤波器的设计比较成熟,有大量现成的公式和参数;另一方面,数字滤波器的设计可以从模拟低通滤波器的设计转化而来,其关键是把握好 s 平面与 z 平面的对应关系。

3.1.1 IIR 数字滤波器的设计

(1) 脉冲响应不变法。

脉冲响应不变法下的 s 平面和 z 平面的映射关系: $z=e^{sT}$, $\omega=\Omega T$ (线性关系)。先根据给定的各项指标求出符合要求的模拟低通滤波器的 $H_a(s)$,将 $H_a(s)$ 部分分式展开

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

再直接把 s 平面的极点 s_k 映射成 z 平面极点 $e^{s_k T}$ 得到离散滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

(2) 双线性变换法。

克服 s 平面到 z 平面的多值映射关系,建立一一对应的单值关系。先将 s 平面压缩到 s_1 平面 $(-\pi/T, \pi/T)$ 段,映射关系为

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}$$

将 $z=e^{j\omega}$ 和 $\omega=\Omega T$ 代入上式,可以化简为

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

显然这是一种非线性关系。由于仅仅进行了压缩,没有旋转,所以仍保留原来的因果性。设计时,可以先根据所要求的各项指标求得 $H_a(s)$,再把 $s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$ 代入得到 $H(z)$ 。

双线性变换法有以下特点:

① s 平面与 z 平面一一对应。

② 不会出现由于高频部分超过折叠频率而混叠到低频部分的现象。

- ③ 频率具有非线性,在设计时必须进行频率的预畸变处理。
- ④ IIR 滤波器的差分方程是递归的。
- ⑤ 最常见的滤波器原型是巴特沃思、切比雪夫 I 型和切比雪夫 II 型以及椭圆型。

3.1.2 FIR 数字滤波器的设计

- (1) FIR 滤波器差分方程是非递归的。
- (2) FIR 滤波器能够做到严格的线性相位关系,保证信号通过滤波后没有相位失真。
- (3) 一种最常用的 FIR 滤波器设计方法是对理想滤波器进行加窗处理。加窗之后滤波器具有有限的过渡带带宽,并且在通带和阻带内有波纹。窗函数的阶数越高,滤波器形状越接近理想情况。常用的窗函数包括矩形窗、汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗和凯泽窗。每种窗函数都提供了典型的阻带衰减和过渡带宽。
- (4) 等波纹滤波器的实质是切比雪夫多项式逼近,满足交错点定理。

3.1.3 有限字长效应

大多数时候我们都是以离散时间信号为讨论对象的,但数字信号处理方法讨论的对象是数字信号。模拟信号要经过 A/D 转换成有限字长的信号,才能用计算机软件或专用数字信号处理器件进行处理。然而,模拟信号经过 A/D 变换,会存在误差。

此外,在进行滤波和傅里叶变换时均认为数据是无限精度的,而实际的数字信号处理算法的实现是通过计算机或专用数字信号处理器件实现的,其存储单元都是有限位的,如信号序列的值、滤波器系数及运算结果只能存储在有限位的存储单元中,因此,数字信号处理算法的实现必然会带来误差。

需要分析和估算三种量化引起的误差:

- (1) A/D 变化的量化效应。
- (2) 系数的量化效应。
- (3) 数字运算过程中的有限字长效应。

3.2 拓展例题

【3-1】 模拟滤波器有低通、高通、带通和带阻等类型,而实际应用中的数字滤波器也有低通、高通、带通、带阻等类型。问通过模拟滤波器来设计各种类型数字滤波器可以有哪些方法?

解 可使用如下 3 种方法,如图 3-1 所示。

【3-2】 考虑一个脉冲响应为 $h_c(t)$ 的因果连续时间系统,其系统函数为

$$H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$$

- ① 用脉冲响应不变法求离散时间系统的 $H_1(z)$,使得 $h_1(n) = h_c(nt)$

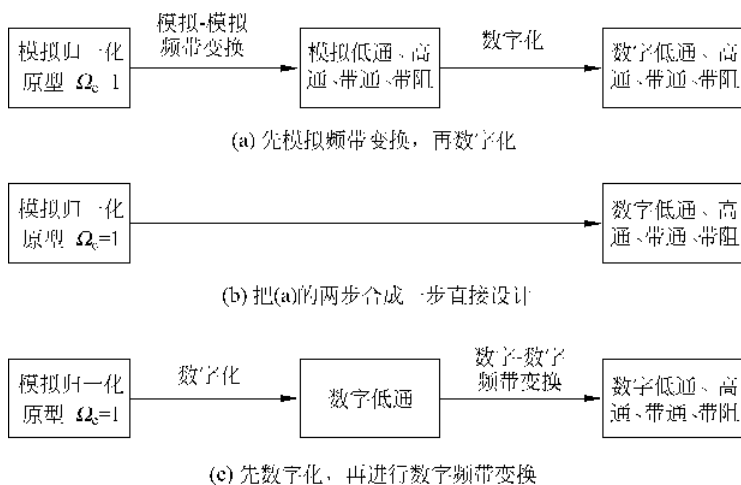


图 3-1

② 用阶跃响应不变法求离散时间系统的 $H_2(z)$, 使得 $s_2(n) = s_c(nt)$, 其中

$$s_2(n) = \sum_{k=-\infty}^n h_2(k) \quad \text{和} \quad s_c(t) = \int_{-\infty}^t h_c(\tau) d\tau$$

解 (1) 因为连续时间因果系统的系统函数为 $H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$, 可得

$$h_c(t) = e^{-at} \cdot \cos bt \cdot u(t)$$

故可得到

$$\begin{aligned} h_1(n) &= h_c(t) \Big|_{t=nT} = e^{-anT} \cdot \cos bnT \cdot u(nT) \\ &= (e^{-aT})^n \cdot \cos(bT)n \cdot u(n) \end{aligned}$$

有

$$H_1(z) = Z\{h_1(n)\} = \frac{1 - e^{-aT}(\cos bT)z^{-1}}{1 - 2e^{-aT}(\cos bT)z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2}}$$

(2) 因为

$$s_c(t) = \int_{-\infty}^t h_c(\tau) d\tau$$

所以

$$\begin{aligned} s_c(s) &= \frac{1}{s} H_c(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{-a + jb}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1}{s + a + jb} + \frac{-a - jb}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1}{s + a - jb} \end{aligned}$$

即有

$$s_c(t) = \frac{a \cdot u(t)}{a^2 + b^2} + \frac{-a + jb}{2(a^2 + b^2)} e^{-(a+jb)t} u(t) + \frac{-a - jb}{2(a^2 + b^2)} e^{-(a-jb)t} u(t)$$

按照阶跃响应不变法的定义, 可以得到

$$s_2(n) = s_c(nT) = \frac{a \cdot u(nT)}{a^2 + b^2} + \frac{-a + jb}{2(a^2 + b^2)} e^{-(a+jb)nT} u(nT) + \frac{-a - jb}{2(a^2 + b^2)} e^{-(a-jb)nT} u(nT)$$

这样便可求出

$$s_2(z) = \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{-a + jb}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(a+jb)T} z^{-1}} + \frac{-a - jb}{2(a^2 + b^2)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-(a-jb)T} z^{-1}}$$

$$H_2(z) = (1 - z^{-1}) s_2(z)$$

$$= \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \left[2a + \frac{(-a + jb)(1 - z^{-1})}{1 - e^{-aT} e^{-jbT} z^{-1}} + \frac{(-a - jb)(1 - z^{-1})}{1 - e^{-aT} e^{jbT} z^{-1}} \right]$$

【3-3】 判断命题是否正确,并说明原因? 如果利用双线性变换法将一个连续时间全通系统变换成一个离散时间系统,所得的离散时间系统也是一个全通系统。

解 该命题是正确的。

设 $H_c(s) = \frac{s+a^*}{s-a}$, 根据双线性变换公式有

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a^*}{\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - a} = \frac{\left(1 + \frac{T}{2} a^*\right) - z^{-1} \left(1 - \frac{T}{2} a^*\right)}{\left(1 - \frac{T}{2} a\right) - z^{-1} \left(1 + \frac{T}{2} a\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{T}{2} a^*}{1 - \frac{T}{2} a} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{T}{2} a^*\right) - z^{-1}}{\left(1 - \frac{T}{2} a^*\right) - z^{-1}} \right\} \left/ \left\{ \frac{1 + \frac{T}{2} a}{1 - \frac{T}{2} a} z^{-1} \right\} \right\}$$

显然 $|H(z)| = 1$ 。这样所得的离散时间系统也是全通系统。

【3-4】 考虑一个连续时间系统,其系统函数为: $H_c(s) = \frac{1}{s}$ 。由于输出 $y_c(t)$ 与输入 $x_c(t)$ 之间满足: $y_c(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau$, 故称该系统为积分器。假设某一离散时间系统是将双线性变换法用于 $H_c(s)$ 而得到的,

(1) 求该离散时间系统 $H(z)$ 和其脉冲响应 $h(n)$?

(2) 如果 $x(n)$ 为输入, $y(n)$ 为该离散时间系统的输出, 试用差分方程表示该系统。

(3) 求出该系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的表达式, 画出当 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时该离散时间系统的幅度与相位, 将它们与连续时间积分器之频率响应 $H_c(j\Omega)$ 的幅度与相位比较, 问在什么条件下可以认为该离散时间“积分器”是连续时间积分器的良好逼近?

假设一个连续时间系统,其系统函数为

$$G_c(s) = s$$

因为这个系统的输出是输入的导数, 所以称为微分器。假设某一离散时间系统是将双线性变换用 $G_c(s)$ 而得到的。

(4) 求出该离散时间系统的系统函数 $G(z)$ 和脉冲响应 $g(n)$ 是什么?

(5) 求出该系统频率响应 $G(e^{j\omega})$ 的表达式, 画出当 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时该离散时间系统的幅度与相位, 将它们与连续时间微分器之频率响应 $G_c(j\omega)$ 的幅度与相位比较, 问在什么条件下可以认为该离散时间“微分器”是连续时间微分器的良好逼近?

(6) 连续时间积分器与微分器完全是互为可逆的, 对于它们的离散时间逼近也同样正确吗?

解 (1) 由双线性变换的概念有

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_d} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{d}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

为了讨论问题方便,不妨取 $T_d=2$,则

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$h(n) = z^{-1} \{H(z)\} = u(n) + u(n-1)$$

(2) 输入与输出差分方程为

$$y(n] = x(n) + y(n-1) + x(n-1)$$

由于该系统在单位圆上出现了一个极点,在实现该差分方程时会遇到稳定性的问题。

$$(3) \text{ 频率响应 } H(e^{j\omega}) = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} = -j \times \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}$$

这样便可画出其在 $0 \leq |\omega| \leq \pi$ 内的频率响应特性,如图 3-2 和图 3-3 所示。

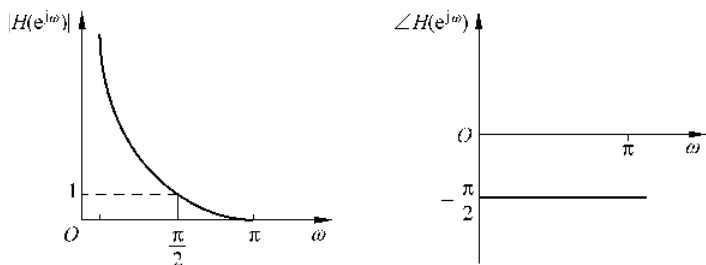


图 3-2

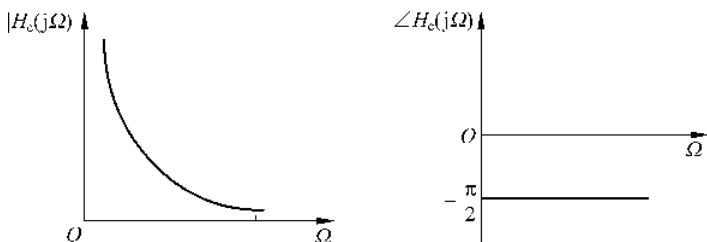


图 3-3

显然,若输入信号是充分带限信号的,这种逼近是良好的。

(4) 该离散时间“微分器”的系统函数为(取 $T_d=2$)

$$G(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

脉冲响应为 $g(n) = z^{-1} \{G(z)\} = (-1)^n u(n) + (-1)^{n-1} u(n-1)$

$$(5) \text{ 同样 } G(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} = j \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

这样便可画出其在 $0 \leq |\omega| \leq \pi$ 内的频率响应特性如图 3-4 和图 3-5 所示。

同样,在输入信号是严格带限的情况下,这种逼近也是良好的。

(6) 这两个离散时间系统也互为逆系统。

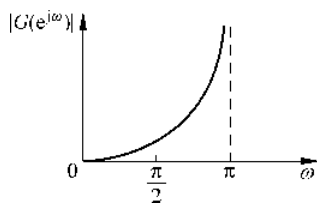


图 3-4

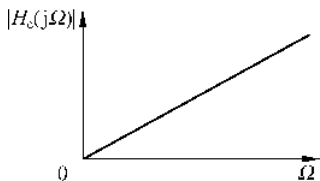


图 3-5

【3-5】 脉冲响应不变法和双线性变换法都可用来设计离散时间滤波器,这两种方法都是将一个连续时间系统函数 $H_c(s)$ 变换成一个离散时间系统函数 $H(z)$ 。

(1) 最小相位连续时间系统的所有极点与零点均在左半 s 平面上。如果将一个最小相位连续时间系统变换成一个离散时间系统,上述两种方法是否可得出最小相位离散时间系统?

(2) 如果连续时间系统是一个全通系统,则它的极点将在左半平面 s_k 处,而它的零点将在所对应的右半平面的 $-s_k$ 处。上述两种方法是否可得出全通离散时间系统?

(3) 哪一种设计方法可以获得:

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega) \Big|_{\Omega=0}$$

(4) 如果连续时间系统是一个带阻滤波器,上述两种方法是否可得出离散时间带阻滤波器?

(5) 假设 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 与 $H(z)$ 分别是 $H_{c1}(s)$ 、 $H_{c2}(s)$ 和 $H_c(s)$ 的变换形式。上述两种方法是否可得出:只要当 $H_c(s) = H_{c1}(s) \cdot H_{c2}(s)$ 时就有 $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$?

(6) 假设 $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ 与 $H(z)$ 分别是 $H_{c1}(s)$ 、 $H_{c2}(s)$ 和 $H_c(s)$ 的变换形式。上述两种方法是否可得出:只要当 $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$ 时就有 $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$?

(7) 假设两个连续时间系统满足条件:

$$\frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & \Omega > 0 \\ e^{j\pi/2}, & \Omega < 0 \end{cases}$$

如果 $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 分别是 $H_{c1}(s)$ 与 $H_{c2}(s)$ 的变换形式,上述两种方法是否可设计出满足下式的离散时间系统

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

解 (1)

① 对于脉冲响应不变法而言, s 平面中在 $s = s_k$ 处的极点将变换成 z 平面中在 $e^{s_k T_d}$ 处的极点,对于极点而言,当 s_k 的实部小于 0 时, $e^{s_k T_d}$ 显然位于单位内的极点,但是其零点却不按这样的规则来进行映射,例如,若

$$H_c(s) = \frac{s+100}{(s+1)(s+2)} = \frac{99}{s+1} + \frac{-98}{s+2}$$

取 $T_d=1$,则对应的离散时间系统为

$$H(z) = \frac{99}{1-e^{-1}z^{-1}} + \frac{-98}{1-e^{-2}z^{-1}} = \frac{1+(98e^{-1}-99e^{-2})z^{-1}}{(1-e^{-1}z^{-1})(1-e^{-2}z^{-1})} = \frac{1+22z^{-1}}{(1-e^{-1}z^{-1})(1-e^{-2}z^{-1})}$$

显然, $s=-100$ 的零点被映射成了 $z=-22$ 处的零点。

这样,脉冲响应不变法不能确保最小相位连续时间系统变换成最小相位离散时间系统。

② 再来考察双线性变换法:取 $T_d=2$,则有

$$z = \frac{1+s}{1-s} = \frac{1+\sigma+j\Omega}{1-\sigma+j\Omega}$$

若 $\sigma < 0$, 则 $|z| < 1$; 若 $\sigma > 0$, 则 $|z| > 1$

因此,双线性变换法可以保证将最小相位连续时间系统变换成最小相位离散时间系统。

(2) ① 对于脉冲响应不变法,因为它不保证零点与极点间会得到一致映射关系,故脉冲响应不变法不能确保一个连续时间全通系统一定被变换成一个离散时间全通系统。

② 对于双线性变换法而言,

设
$$H_c(s) = \frac{s+a^*}{s-a}$$

则有
$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$= \frac{1 - \frac{T}{2}a^*}{1 - \frac{T}{2}a} \left\{ \frac{1 + \frac{T}{2}a^*}{1 - \frac{T}{2}a^*} - z^{-1} \right\} \Bigg/ \left\{ 1 - \frac{1 + \frac{T}{2}a}{1 - \frac{T}{2}a} z^{-1} \right\}$$

显然它还是一个全通系统。

(3) ① 对于脉冲响应不变法,若原型连续时间系统 $H_c(s)$ 是带限的,则转换成离散时间系统时,可忽略其混叠效应;若 $H_c(s)$ 不是带限的话,则不一定能保证

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega) \Big|_{\Omega=0}$$

② 对于双线性变换法而言

$$H(z) = H_c\left(\frac{2}{T_d} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right)$$

即

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (T_d/2)s}$$

当 $s=0, z=0$ 时,显然有

$$H(e^{j0}) = H(1) = H_c(j\Omega) \Big|_{\Omega=0}$$

(4) 如果连续时间系统是一个带阻滤波器,那么,采用频率畸变可设计具有分段恒定幅频特性的高通、低通、带通、带阻滤波器,双线性变换可以将其变换成一个离散时间带阻滤波器。但是,脉冲响应不变法不能将连续时间带阻滤波器变换成离散时间带阻滤波器,因为带阻连续时间滤波器不是带限的。

(5) 当 $H_c(s)$ 是全通的,即 $H_{c1}(s)$ 和 $H_{c2}(s)$ 互为逆系统时,脉冲响应不变法不能保证。 $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$,若 $H_c(s)$ 是低通的,则脉冲响应不变法可以保证

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

而对于双线性变换法来说,若 $H_c(s) = H_{c1}(s) \cdot H_{c2}(s)$

则有
$$H_c\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = H_{c1}\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \cdot H_{c2}\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

即有
$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

(6) 脉冲响应不变法和双线性变换法均可满足若 $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$

则有 $H(z) = H_{c1}(z) + H_{c2}(z)$

(7) 原题若设 $H_c(j\Omega) = \frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)}$, 则 $H(z) = \frac{H_1(z)}{H_2(z)}$

显然, $H_c(s)$ 是一个全通系统, 而脉冲响应不变法是不能设计全通滤波器的, 故脉冲响应不变法不能确保这一点, 而双线性变换法则可以得证这一点。

即 $H_c(j\Omega) = \frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \Omega > 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & \Omega < 0 \end{cases}$

又 $\omega = 2\arctan(\Omega T_d/2)$, 故 $\Omega > 0$ 被映射成 $0 < \omega < \pi$ 。

则有 $H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & 0 < \omega < \pi \\ e^{j\frac{\pi}{2}}, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$

【3-6】 考虑一个第一类线性相位 FIR 低通滤波器, 其脉冲响应为 $h_{LP}(n)$, 长度为 $(M+1)$, 频响为: $H_{LP}(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$, 系统幅度函数 $A_e(e^{j\omega})$, 如图 3-6 所示。

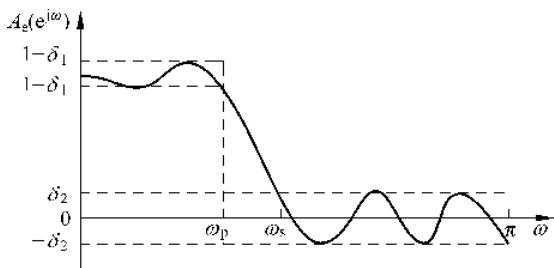


图 3-6

这个幅度函数在频带 $0 \leq \omega \leq \omega_p$ 中 (其中 $\omega_p = 0.27\pi$) (在 Parks-McClellam 意义上) 逼近 1, 而在频带 $\omega_s \leq \omega \leq \pi$ 中 (其中 $\omega_s = 0.4\pi$) 逼近于 0。

(1) M 值为多少? 假设高通滤波器是由以下定义的低通滤波器获得的

$$h_{HP}(n) = (-1)^{n+1} h_{LP}(n) = -e^{-j\pi n} h_{LP}(n)$$

(2) 证明所得频率响应的表达式为 $H_{HP}(e^{j\omega}) = B_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$ 。

(3) 画出当 $0 \leq \omega \leq \pi$ 时 $B_e(e^{j\omega})$ 的草图。

(4) 现有一结论认为, 对于给定的 M 值 (如 (1) 中所求), 所得高通滤波器在频带 $0 \leq \omega \leq 0.6\pi$ 中最佳逼近于 0; 在频带 $0.73\pi \leq \omega \leq \pi$ 上是最佳逼近于 1, 这一结论是否正确? 并说明理由。

解 (1) $A_e(e^{j\omega})$ 在通带与阻带一共有 9 个交错点, 故 $\frac{M}{2} = 7$, 即有 $M = 14$ 。

(2) 因为 $H_{LP}(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$, 所以有

$$\begin{aligned} H_{HP}(e^{j\omega}) &= -A_e(e^{j(\omega+\pi)}) \cdot e^{-j(\omega+\pi)M/2} \\ &= A_e(e^{j(\omega+\pi)}) \cdot e^{-j\omega M/2} \\ &= B_e(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega M/2} \end{aligned}$$

其中

$$B_e(e^{j\omega}) = A_e(e^{j(\omega+\pi)})$$

(3) 由(2)中所推得的结论和如图 3-6 所示之 $A_e(e^{j\omega})$ 可知, $B_e(e^{j\omega})$ 如图 3-7 所示。

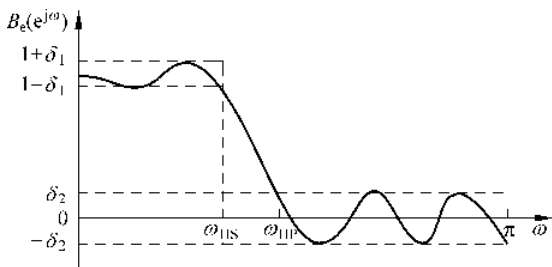


图 3-7

(4) 显然

$$\omega_{HP} = \pi - \omega_P = \pi - 0.27\pi = 0.73\pi$$

$$\omega_{HS} = \pi - \omega_S = \pi - 0.4\pi = 0.6\pi$$

可见(4)中所述之结论是正确的。

【3-7】 滤波器 C 是一个稳定的连续时间 IIR 滤波器, 其系统函数为 $H_c(s)$ 和脉冲响应为 $h_c(t)$, 通过双线性变换, 得一个稳定的离散时间滤波器 B, 其系统函数为 $H_b(z)$ 和脉冲响应为 $h_b(n)$, 试问滤波器 B 必定不是 FIR 滤波器吗?

解 滤波器 B 有可能是 FIR 滤波器。

例如: 设 $H_c(s) = \frac{s}{s+1}$, 取 $T_d = 2$

$$\begin{aligned} \text{则 } H(z) &= H_c(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1}{2}(1-z^{-1}) \end{aligned}$$

显然 $H(z)$ 是一个 FIR 系统。

【3-8】 如果一个 LTI 连续时间系统具有有理系统函数, 则它的输入和输出满足常规的常系数线性微分方程。在模拟这类系统时的一个简单方法是用有限差分来逼近微分方程中的导数, 因为对于连续可微函数 $y_c(t)$,

$$\frac{dy_c(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{y_c(t) - y_c(t-T)}{T} \right]$$

如果 T “足够小”, 可用 $\frac{y_c(t) - y_c(t-T)}{T}$ 来代替 $\frac{dy_c(t)}{dt}$ 。但是在滤波器的应用中, 这种方法并不是总是一种设计离散时间系统的有效方法, 为了了解用差分方程逼近微分方程的影响, 下面研究一个具体的例子。假设一个连续时间系统的系统函数是

$$H_c(s) = \frac{A}{S+C}$$

其中 A 和 C 是常数。

(1) 证明该系统的输入 $x_c(t)$ 输出 $y_c(t)$ 满足微分方程

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + Cy_c(t) = Ax_c(t)$$

(2) 计算当 $t=nT$ 时的微分方程, 并且进行代替。

$$\left. \frac{dy_c(t)}{dt} \right|_{t=nT} = \frac{y_c(nT) - y_c(nT - T)}{T}$$

也就是用一阶后向差分来代替一阶导数。

(3) 定义 $x(n) = x_c(nT)$ 和 $y(n) = y_c(nT)$, 用这一定义和(2)的结果求联立 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的差分方程, 并求所得离散系统的系统函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$ 。

(4) 对于这个例子, 试证明

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T}$$

即 $H(z)$ 可用如下映射由 $H_c(s)$ 直接求得

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

利用(4)的映射, 求出由 s 平面的 $j\Omega$ 轴映射到 z 平面的围线, 并求左半 s 平面相对应的 z 平面区域, 若具有系统函数 $H_c(s)$ 的连续时间系统是稳定的, 则用一阶后向差分逼近所得出的离散时间系统也是稳定的吗? 该离散时间系统的频率响应是原连续时间系统频率响应的准确表现吗? T 的选择对稳定性与频率响应有何影响?

(5) 假设用一阶前向差分逼近一阶微分, 即

$$\left. \frac{dy_c(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT + T) - y_c(nT)}{T}$$

求由 s 平面到 z 平面所对应的映射, 并且用这一映射重复(5)。

解 (1) 由 $H_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A}{s+C}$ 可知

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + Cy_c(t) = Ax_c(t)$$

(2) 用一阶后向差分方程来代替一阶导数有

$$y_c(nT) - y_c(nT - T) + TCy_c(nT) = TAx_c(nT)$$

即

$$y_c(nT) - \frac{1}{1+TC}y_c(nT - T) = \frac{AT}{1+TC}x_c(nT)$$

(3) 联系 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的差分方程为

$$y(n) - \frac{1}{1+TC}y(n-1) = \frac{AT}{1+TC}x(n)$$

其对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{AT}{1+TC}}{1 - \frac{z^{-1}}{1+TC}}$$

$$(4) H_c(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{A}{\frac{1-z^{-1}}{T} + C} = \frac{AT}{1+TC-z^{-1}} = \frac{AT/1+TC}{1-z^{-1}/1+TC} = H(z)$$

(5) 由 $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ 可知

$$z = \frac{1}{1 - T_s} = \frac{1}{1 - T_\sigma - jT\Omega}$$

又当 $\sigma < 0$ 时, 对于任意的 Ω 值有

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1 - T_\sigma)^2 + (T\Omega)^2}} < 1$$

即若原具有系统函数为 $H_c(s)$ 的连续时间系统是稳定的话, 该一阶后向差分逼近所得之离散时间系统也是稳定的。

当 $\sigma = 0$ 时,

$$z = \frac{1}{1 - jT\Omega} = \frac{1 + jT\Omega}{1 + T^2\Omega^2}$$

令 $z = re^{j\omega}$ 则有

$$r\cos\omega + jr\sin\omega = \frac{1}{1 + T^2\Omega^2} + j\frac{T\Omega}{1 + T^2\Omega^2}$$

故有

$$\Omega = \frac{r(1 + T^2\Omega^2)}{T} \cdot \sin\omega$$

由 Ω 与 ω 之间的这种非线性映射关系可见, 该离散时间系统的频率响应不是原连续时间系统频率响应的准确表现, T 的选择对稳定性没有影响, 但是对频域逼近的效果影响极大, T 越小越好。

(6) 若用一阶前向差分方程来代替一阶后向差分方程去逼近一阶微分, 则这一映射关系变为

$$s = \frac{z - 1}{T}$$

则

$$z = 1 + ST = 1 + T\sigma + jT\Omega$$

当 $\sigma < 0$ 时

$$|z| = (1 + \sigma T)^2 + T^2\Omega^2$$

显然它不能保证 S 平面内的稳定系统映射到 Z 平面后还是稳定系统。

当 $\sigma = 0$, 则有

$$z = 1 + j\Omega T$$

故 S 平面上的 $j\Omega$ 轴在 Z 平面上是横坐标为 1 且平行于纵轴的直线。同样, 这种映射关系也不能在 ω 域准确表现 Ω 域的频率响应特性, 当 T 越小, 逼近效果越好。

【3-9】 设计一个长度 $N=4$ 的 FIR 滤波器, 该滤波器用于测量信号的样本值的平均值。

- (1) 写出该滤波器差分方程、系统函数, 并分析零、极点。
- (2) 画出线性相位(对称结构的)滤波器网络结构图。
- (3) 根据零、极点分布画出大致的幅频特性($|H(e^{j\omega})| \sim \omega$)曲线。

解 (1) $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(n-i) = \frac{1}{4} [x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)]$

$$H(z) = \frac{1}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^4 - 1}{4z^3(z - 1)}$$

极点: $z_p = 0$ (三阶)

零点: $z_{01} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j, z_{02} = e^{j\pi} = -1, z_{03} = e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j$

$z_p = 1$ 处零极点抵消。