第1章 函数与极限

函数是变量之间相互联系、相互制约关系的抽象表示，是事物运动、变化及相互影响的复杂关系在数量方面的反映；极限刻画了变量的变化趋势，是研究函数的重要方法. 本章内容主要包括变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及 们的一些性 .

1.1 函数的概念

一、变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，常常会遇到各种不同的量，这些量一般可分为两种：一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为**常量**；还有一种是在这一过程中发生变化的量，这种量称为**变量**.

一个量是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体过程和具体条件来确定. 即使同一个量，在某一过程或条件下可以认为是常量；而在另一过程或条件下就可能是变量. 例如人的身高，在研究少儿发育成长的过程中是变量，而在研究成人的健康状况时通常是常量.

通常用字母 $a, b, c, \cdots$ 表示常量，用字母 $x, y, z\cdots$ 表示变量.

在观察各种运动过程时，我们发现，有些变量具有一定的变化范围，例如自由落体的下降时间和距离只有在落体落到地面以前才有意义.

变量的变化范围，也就是变量的取值范围，在取实数值

的时候，通常用区间表示. 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体组成一个闭区间，记为$[a,b]$；满足不等式 $a<x<b$ 的 x 的全体组成开区间(a,b)；而满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的 x 的全体组成半开半闭的区间$(a,b]$或$[a,b)$. 如果变量 x 能够取实数轴上所有的数，记为$\mathbb{R}$ 或$(-\infty,+\infty)$，这里"∞"只是一个记号，并不表示数量，前面的"$+$"、"$-$"表示方向. 有时候，在并不一定要指明是开的或闭的情况下，也常用 X、Y 等表示区间.

以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域，记作$\cup(x_0,\delta)$.

二、函数

一般在同一问题中的各个变量间不是孤立的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 现在我们先举几个例子.

例 1.1 自由落体运动，设物体下落的时间为 t，落下的距离为 s. 若开始下落时刻为 $t=0$，则 s 与 t 之间的相互依赖关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

例 1.2 用一块边长为 a 的正方形铁皮做一个高为 x 的无盖小盒(图 1.1). 盒的容种 V 和高 x 存在着依赖关系

$$V=x(a-2x)^2.$$

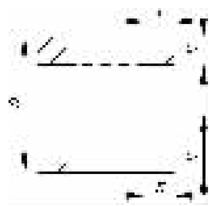

图 1.1

例 1.3 在出生 1～6 个月期间内，正常婴儿的体重近似满足

$$y=3+0.6x.$$

其中 x 表示婴儿的月龄，y 表示其体重(kg).

抽去上面几个例子中量的具体意义，它们都表达了量与量之间的相互依赖关系，把这种特征抽象出来，便得到函数的概念.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的规律 f 有惟一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，D 叫做这函数的**定义域**.

当 x 取某一定值 x_0 时，若函数 $f(x)$有对应值 $f(x_0)$存在，则称 $f(x_0)$为 x 在 x_0 处的**函数值**，记作 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$，并认为在 $x=x_0$ 处 $f(x)$有定义. 当 x 取遍定义域 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{f(x):x\in D\}$称为函数的**值域**.

在实际问题中，函数的定义域是根据具体的实际意义确定的. 如例 1.1

中,假设物体着地时刻为 T,则此函数的定义域 $D=[0,T]$;例 1.2 中,定义域 $D=\left(0,\frac{1}{2}a\right)$;例 1.3 中,定义域 $D=[0,6]$. 从抽象的函数来说,函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值,例如函数 $y=3+0.6x$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$.

自变量和因变量采用什么字母表示并不是关键,重要的是函数的定义域和变量之间的对应法则 f. 函数的定义域和对应法则是函数的两要素. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的,例如,函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=\frac{x\sin x}{x}$ 是不同的函数.

解析法、列表法、图示法是三种常用的函数表示法. 它们具有不同的特点,用于不同的情况,可根据具体的需要和可能选取它们中的一种或多种来表示. 医学上研究变量间的关系时,主要应用解析法.

例 1.4 当函数关系由等式 $y^2=x$ 表示时,函数的定义域为 $x>0$,但是,与每一个可取的 x 值对应的 y 值有两个:$y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$,例如,当 $x=4$ 时,$y=2$ 和 $y=-2$,等等.

根据函数的定义,$y=f(x)$ 对定义域内每一确定的 x 值,只有惟一的 y 值与其对应,称此函数为**单值函数**,否则称为**多值函数**,如例 1.1,例 1.2 和例 1.3 都是单值函数,例 1.4 中的函数就是多值函数. 以后若无特别说明,所用的函数都指单值函数.

在实际问题的研究中,有时需要对一个函数在自变量的不同范围内用不同的解析式表示,这样的函数叫做**分段函数**. 对于分段函数求函数值时,要根据自变量所在范围代入相应的解析式计算.

例 1.5 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,如图 1.2 所示. 对于任何实数 x,$|x|=x\operatorname{sgn}x$ 如图 1.3 所示.

例 1.6 根据实验测得血液中胰岛素浓度为 $c(t)$(unit/ml)随时间 t(min)的变化数据,可建立如下经验公式

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, & t>5.\end{cases}$$

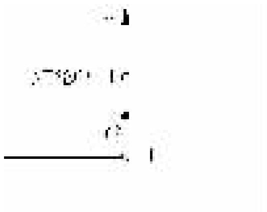

图 1.2

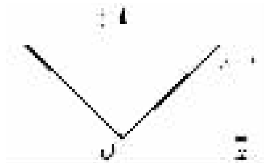

图 1.3

其中 $k=\frac{\ln 2}{20}$，$\ln 2=\log_e 2$，以 e 为底的对数称为**自然对数**.

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. 若存在正数 M，使得对任意 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内**有界**，如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内**无界**.

例如，对任意 $x\in\mathbb{R}$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1=M$，故函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界；而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，在 $[1,+\infty)$ 内有界.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义. x_1 和 x_2 为 (a,b) 内任意两点，若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调递增**的(图 1.4)；若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**单调递减**的(图 1.5). 单调递增和单调递减的函数统称为**单调函数**.

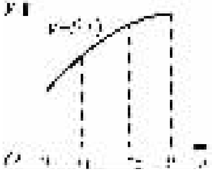

图 1.4

图 1.5

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递增的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调递减的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$ 总有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**；若对任意 $x\in D$ 总有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是**奇函数**. 若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点不对称，则函数 $f(x)$ 一定是非奇非偶函数.

由定义知，偶函数图形关于 y 轴对称，如图 1.6 所示；奇函数图形关于原点对称，如图 1.7 所示.

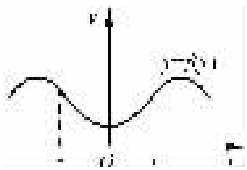

图 1.6

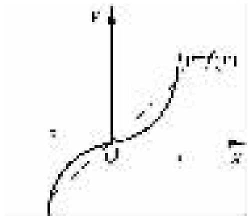

图 1.7

例如，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 都是偶函数；$y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数；而在 $x\in[-1,1)$ 上函数 $y=x^2$ 是非奇非偶函数.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在不为零的常数 T，使它对任意 $x\in D$ 有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 总成立，则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $f(x)$ 的周期，周期函数的周期不是惟一的，通常所说的周期是指它的最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

四、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 因为 W 是函数值组成的数集，所以对于任意 $y_0\in W$，必定有 $x_0\in D$ 使得 $f(x_0)=y_0$ 成立，这样的 x_0 可能不止一个. 一般地，对于任意数值 $y\in W$，D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，这个数值 x 适合关系 $f(x)=y$，这里如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按函数概念，就得到一个新的函数. 这个新的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=\varphi(y)$. 这个函数的定义域为 W，值域为 D，相对于反函数 $x=$

$\varphi(y)$，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

例 1.7 函数 $y=f(x)=2x+1$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它的反函数 $x=\varphi(y)=\frac{1}{2}(y-1)$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 1.8 函数 $y=x^2$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，在 $[0,+\infty)$ 上任取数值 $y\neq 0$，则适合 $x^2=y$ 的数值 x 有两个：$x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$，所以 $y=f(x)=x^2$ 的反函数是多值函数，如果把这个函数的定义域缩小了，使它定义域在 $[0,+\infty)$. 这时它的反函数 $x=\sqrt{y}$ 就是单值函数了(图 1.8).

习惯上自变量用 x 表示. 因变量用 y 表示. 只要对应规律不变，自变量和因变量的字母表示无关紧要. 故如果函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，例如 $y=2x+1$ 的反函数可写成 $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1.9). 这是因为：如果点 $M(x,y)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一点，将 x 和 y 对调，点 $M'(y,x)$ 就在曲线 $y=\varphi(x)$ 上了，而 M' 和 M 是关于直线 $y=x$ 对称的(这点可以通过初等的方法加以证明)，这就说明了曲线 $y=f(x)$ 和 $y=\varphi(x)$ 关于直线 $y=x$ 互相对称.

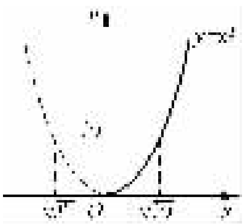

图 1.8

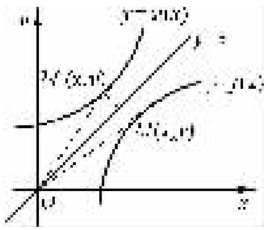

图 1.9

习题 1.1

1. 已知 $f(x)$ 的定义域是 $[1,2]$，求 $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ 的定义域.

2. 判断下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x, g(x)=e^{\ln x}$； (2) $f(x)=|x|, u(t)=\sqrt{t^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}, g(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}}$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(a>1)$; (2) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$;

(3) $y=x^3+\cos x$.

4. 函数 $y=\sin^2 x$ 是否为周期函数,如果是求其周期;如果不是,说明理由?

5. 设 $f(x)$与 $g(x)$互为反函数,求 $f\left(-\dfrac{1}{2}x\right)$的反函数.

1.2 初等函数

一、基本初等函数

1. 常数函数 $y=c$(c 为常数)

(1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{c\}$.

(2) 图形为平行于 x 轴,在 y 轴上的截距等于 c 的直线.

2. 指数函数 $y=a^x$($a>0$,$a\neq1$)

(1) 指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$.

(2) 指数函数的图形(图 1.10)

当 $a>1$ 时函数为严格单调递增;

当 $0<a<1$ 时函数为严格单调递减.

无论 a 为何值($a>0$,$a\neq1$),函数图形都过点$(0,1)$.

函数 a^x 与$\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称.

3. 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$,$a\neq1$)

(1) 对数函数定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 对数函数图形(图 1.11)

当 $a>1$ 时函数为严格单调递增;

当 $0<a<1$ 时函数为严格单调递减.

无论 a 为何值($a>0$,$a\neq1$). 函数图形都过点$(1,0)$.

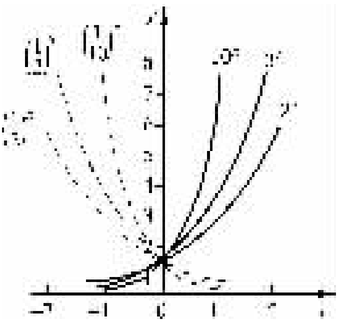

图 1.10

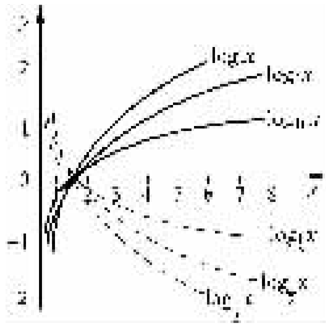

图 1.11

(3) 对数函数和指数函数互为反函数

常用的对数有以10为底和以e为底的.前者称为常用对数,后者称为自然对数.自然对数 $\log_e x$ 简记为 $\ln x$($e=2.71828\cdots$).

4. 幂函数 $y=x^{\alpha}$

(1) 幂函数的定义域:要视幂指数取值而定.

当 α 为正整数时定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

当 α 为负整数时定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

当 α 为既约正分数,且分母为偶数时,定义域为 $[0,+\infty)$;分母为奇数时,定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

当 α 为既约负分数,且分母为偶数时,定义域为 $(0,+\infty)$;分母为奇数时,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

当 α 为零时,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(2) 幂函数在第一象限内的图像(图1.12)

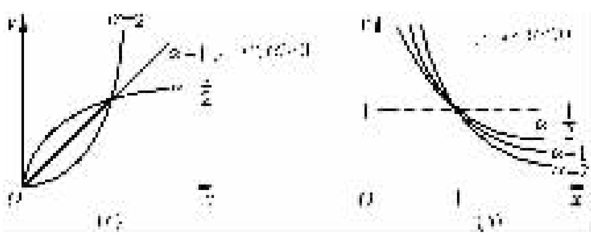

图 1.12

当 $\alpha>0$ 时函数是严格单调递增的;

当 $\alpha<0$ 时函数是严格单调递减的;

不论 α 为何值，函数图形都过点(1,1).

5. 三角函数

常用的三角函数有：正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$（图 1.13）；正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$（图 1.14）等. 正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，值域都是 $[-1,1]$. 正切函数和余切函数都是以 π 为周期的周期函数，正切函数 $\tan x$ 的定义域 $D=\left\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$，余切函数 $y=\cot x$ 的定义域 $D=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z}\}$，它们的值域都是 $(-\infty,+\infty)$.

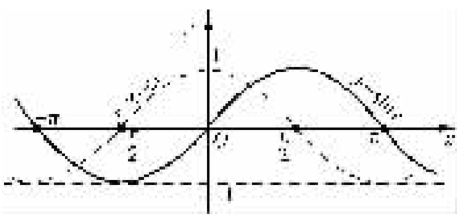

图 1.13

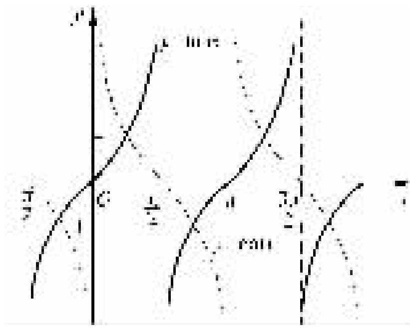

图 1.14

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 的反函数依次为 $y=\arcsin x$（图 1.15），$y=\arccos x$，$y=\arctan x$（图 1.16），$y=\operatorname{arccot} x$. 其中实线表示它们的主值.

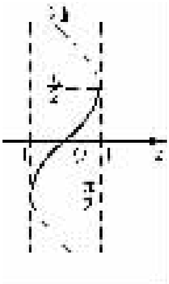

图 1.15

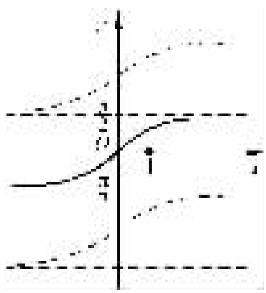

图 1.16

以上介绍的函数统称为**基本初等函数**.

二、复合函数

我们先看一个例子.为了求出竖直上抛物体的动能 E 对于时间 t 的函数,应用公式 $E=\frac{1}{2}mv^2$,其中 m 为物体的质量,v 为竖直上抛物体在时间 t 的速度,若上抛时的初速度为 v_0,则物体在时间 t 的速度 $v=v_0-gt$,于是动能 E 通过 v 而成为 t 的函数 $E=\frac{1}{2}m(v_0-gt)^2$,这时称 E 是 t 的复合函数.

又例如由 $y=\mathrm{e}^u$,而 $u=-x^2$ 组成的函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 也叫做 x 的复合函数.

在高等数学中存在着大量这类函数.

一般地,若函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1,而函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 D_2,值域为 W_2,且 $W_2\subseteq D_1$,那么,对任意 $x\in D_2$,通过函数 $u=\varphi(x)$有确定的 $u\in W_2$ 与之对应,由于 $W_2\subseteq D_1$,因此对于这个 u 值,通过函数 $y=f(u)$有确定的 y 值与之对应,这样,对任意 $x\in D_2$,通过 u 有确定的 y 值与之对应,从而得到一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数,这个函数称为由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,u 称为中间变量.

复合函数不仅可由两个函数复合,也可以由更多个函数复合.

例如,设 $y=u^2$,$u=\arctan v$,$v=\mathrm{e}^x$,则复合函数 $y=(\arctan \mathrm{e}^x)^2$.同样可以将一个复合函数分解为一串简单的函数.例如,$y=\ln\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$可看作由 $y=\ln u$,$u=\sin v$,$v=2x-\frac{\pi}{4}$复合而成的.

必须注意,不是任何两个函数都能够复合成一个复合函数.例如,$y=\arcsin u$,$u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 2),都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合而成的且仅用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如 $y=\ln(1+\sqrt{1+x^2})$,$y=\arctan\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$,$y=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$都是初等函数.在本课程中所讨论的函数绝大部分是初等函数.