第一章　线性规划及单纯形法

【本章学习要求】

1．掌握线性规划的图解法及其几何意义。

2．理解线性规划的标准型和规范型。

3．掌握单纯形法原理。

4．掌握运用单纯形表计算线性规划问题的步骤及解法。

5．能运用二阶段法和大 M 法求解线性规划问题，以及运用人工变量法求解非规范型的线性规划问题。

6．掌握任何基可行解原表及单纯形表的对应关系。

【主要概念及算法】

1．线性规划问题的数学模型

目标函数：
$$\max(\text{或 }\min) z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

约束条件：
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_{ij} \geqslant 0, & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

其中，$x_j(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$为工艺系数；$b_i(i=1,2,\cdots,m)$为资源系数；$c_j(j=1,2,\cdots,n)$为价值系数。

其标准型为：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0, & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

2．图解法

对于只含两个变量的线性规划问题，可通过在平面上作图的方法求解。

图解法的步骤如下：

① 建立平面直角坐标系；

② 图示约束条件，找出可行域；

③ 图示目标函数，即为一条直线；

④ 将目标函数直线沿其法线方向在可行域内向可行域边界平移直至目标函数达到最优值为止，目标函数达到最优值的点就为最优点。

3. 线性规划问题的解的概念

线性规划问题：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad ①$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & (i = 1,2,\cdots,m) \qquad ② \\ x_j \geqslant 0, & (j = 1,2,\cdots,n) \qquad ③ \end{cases}$$

（1）可行解：满足约束条件②和③的解 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$。

（2）最优解：使目标函数①达到最大值的可行解。

（3）基：设 $\boldsymbol{A}$ 为约束方程组②的 $m\times n$ 阶系数矩阵，设 $n>m$，其秩为 m，$\boldsymbol{B}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的一个 $m\times m$ 阶的满秩子矩阵，则称 $\boldsymbol{B}$ 为线性规划问题的一个基。不失一般性，设

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$$

$\boldsymbol{B}$ 中每一个列向量 $\boldsymbol{P}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 称为基向量 j，与基向量 $\boldsymbol{P}_j$ 对应的变量 x_j 称为基变量。除基变量以外的变量为非基变量。

（4）基本解：在约束方程组②中，令所有非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，此时方程组②有唯一解 $\boldsymbol{X}_B=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，将此解加上非基变量取 0 的值有 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，称 $\boldsymbol{X}$ 为线性规划问题的基本解。

（5）基本可行解：满足非负条件③的基本解。

（6）可行基：对应于基本可行解的基。

4. 单纯形法迭代原理

（1）数学模型化为标准型

具备以下条件的数学模型称为单纯形法标准型：

① 等式约束条件；

② 右边常数非负；

③ 变量非负；

④ 目标函数为 max 型。

（2）数学模型化为规范型

具备以下条件的数学模型称为单纯形法规范型：

① 标准型；

② 约束条件系数矩阵中至少含有一个单位子矩阵，对应的变量为基变量；

③ 目标函数中不含基变量。

（3）确定初始基本可行解

在规范型数学模型中，令非基变量 $x_j=0$，求出基变量 x_i，即得初始基本可行解。

（4）最优性检验

在得到初始基本可行解后，要检验一下是否为最优解。若是，则停止迭代，否则，则继续迭代，但每次迭代后都要检验一下当前解是否为最优解。有如下的判别准则：

① 最优解判别定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解，且对于一切 $j=m+1,m+2,\cdots,n$ 有 $\sigma_j\leqslant 0$，则 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 为最优解，其中，σ_j 为检验数，$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{n}c_i a_{ij}'$。

② 无穷多最优解判别定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基可行解对于一切 $j=m+1,m+2,\cdots,n$，有 $\sigma_j\leqslant 0$，又存在某个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}=0$，则线性规划问题有无穷多最优解。

③ 无界解判别定理：若 $\boldsymbol{X}^{(0)}=(b_1',b_2',\cdots,b_m',0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 为一基可行解，有一个非基变量的检验数 $\sigma_{m+k}>0$，并且对 $i=1,2,\cdots,m$，有 $a_{i,m+k}\leqslant 0$，那么该线性规划问题为无界解。

5. 单纯形法的计算步骤

（1）单纯形表

将目标函数与约束条件一起组成 $n+1$ 个变量，$m+1$ 个方程的方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\qquad + a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad x_2 \qquad\qquad + a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ -m+c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_mx_m+c_{m+1}x_{m+1}+\cdots+c_nx_n=0 \end{cases} \tag{④}$$

将上述④式写成增广矩阵形式

$$\left[\begin{array}{cccccccc:c} -2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_m & c_{m+1} & \cdots & c_n & 0 \end{array}\right] \tag{⑤}$$

将 z 看作不参与基变换的基变量，它的系数与 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的系数构成一个基，这时可用初等行变换将 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 变为零，使其对应的系数矩阵为单位矩阵，得

$$\begin{bmatrix} -z & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & x_{m+1} & \cdots & x_n & b \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} & b_{1n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{m+1}-\sum\limits_{i=1}^{m}c_i a_{i,m+1} & \cdots & c_n-\sum\limits_{i=1}^{m}c_i a_{in} & -\sum\limits_{i=1}^{m}c_i b_i \end{bmatrix} \tag{⑥}$$

可根据式⑥的增广矩阵，设计一种计算表，即单纯形表，如表 1-1 所示。

表 1-1

$c_j \rightarrow$			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
c_2	x_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
$-z$		$-\sum_{i=1}^{m} c_i b_i$	0	0	$\cdots$	0	$c_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i,m+1}$	$\cdots$	$c_n-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}$	

对于表 1-1：

$\boldsymbol{X}_B$ 列中填入基变量，这里是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；

$\boldsymbol{C}_B$ 列中填入基变量的价值系数，它们是与基变量相对应的，这里是 $c_1, c_2, \cdots, c_m$；

$\boldsymbol{b}$ 列中填入约束方程组右端的常数。

c_j 行中填入各变量的价值系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$；θ_i 列的数字是在确定换入变量后，按 θ 规则计算后填入，最后一行是检验数行，对应各变量 x_j 的检验数 σ_j 是

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

表 1-1 称为初始单纯形表，以它为起点进行迭代，每迭代一次就得到一个新的单纯形表。

（2）单纯形法的计算步骤

① 找出初始可行基，确定初始基可行解，建立初始单纯形表；

② 检验各非基变量 x_j 的检验数 $\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$，若

$$\sigma_j \leqslant 0, \quad (j = m+1, m+2, \cdots, n)$$

则已得到最优解，停止计算。否则转入下一步；

③ 在 $\sigma_j > 0, j = m+1, m+2, \cdots, n$ 中，若有某个 σ_k 对应 x_k 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k \leqslant 0$，则此问题为无界解，停止计算。否则转入下一步；

④ 根据 $\max\limits_{j}(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定 x_k 为换入变量，按 θ 规则计算

$$\theta = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

由此确定 x_1 为换出变量，转入下一步。

⑤ 以 a_{lk} 为主元素进行迭代，把 x_k 所对应的列向量

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \text{变换为} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ l \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{第 } l \text{ 个分量}$$

将 $\boldsymbol{X}_B$ 列中的 x_1 换为 x_k，得到新的单纯形表，重复步骤②～步骤⑤直到终止。

注意：

Ⅰ）当进行迭代后，在 b 列中出现 0，此时为退化情况；

Ⅱ）当在计算中遇到两个或更多的相同 θ 值时，则从相同 θ 所对应的基变量中，选择下标最大的那个基变量为换出变量。

6. 单纯形法的进一步讨论

人工变量法

当规划模型化为标准型后，当其约束条件的系数矩阵中不存在单位矩阵时，须再添加新的变量，使其含有单位矩阵，此时的新加变量为人工变量，这种化为标准型的方法称为人工变量法。

对于解决有人工变量的线性规划问题，有以下两种方法：

① 大 M 法：在一个线性规划问题的约束条件中加入人工变量后，要求人工变量对目标函数取值不受影响，假定人工变量在目标函数中的系数为$(-M)$（M 为任意大的正数），这样目标函数要实现最大化时，必须把人工变量换出，否则目标函数不可能实现最大化。

② 两阶段法

第一阶段：求解一个目标函数仅含人工变量，且为最小化的线性规划问题，其有两种可能结果：

Ⅰ）目标函数最优值为 0，则去掉人工变量转入第二阶段；

Ⅱ）目标函数最优值不为 0，则原问题无可行解，停止计算。

第二阶段：去掉第一阶段中的人工变量，将第一阶段得到的最优解作为初始基可行解，利用单纯形法继续进行迭代，直至终止。

7. 单纯形法小结

如何化为规范型及如何选取初始基变量，见表 1-2。

表　1-2

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>线性规划模型</th><th>化为规范型式</th></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">变量</td><td>$x_j \geqslant 0$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td>$x_j \leqslant 0$</td><td>令 $x_j' = -x_j$ 则 $x_j' \geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>x_j 无约束</td><td>令 $x_j = x_j' - x_j''$，且 $x_j', x_j'' \geqslant 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">约束条件</td><td rowspan="2">右端项</td><td>$b_i \geqslant 0$</td><td>不变</td></tr>
<tr><td>$b_i \leqslant 0$</td><td>约束条件两端乘以-1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">形式</td><td>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$</td><td>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$</td><td>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{ai} = b_i$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i$</td><td>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{si} + x_{ai} = b_i$</td></tr>
</table>

续表

		线性规划模型	化为规范型式
目标函数	极大或极小	$\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$	不变
		$\min z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$	令 $z'=-z$,则 $\max z'=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j$
	变量前的系数	加松弛变量 x_s 时	$\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j+0\cdot x_{sj}$
		加人工变量 x_a 时	$\max z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j-Mx_{ai}$

【课后习题全解】

1.1 用图解法求解下列线性规划问题,并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解?

(1) $\max z=x_1+3x_2$

$$\begin{cases}5x_1+10x_2\leqslant 50\\ x_1+x_2\geqslant 1\\ x_2\leqslant 4\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(2) $\min z=x_1+1.5x_2$

$$\begin{cases}x_1+3x_2\geqslant 3\\ x_1+x_2\geqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(3) $\max z=2x_1+2x_2$

$$\begin{cases}x_1-x_2\geqslant -1\\ -0.5x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(4) $\max z=x_1+x_2$

$$\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 0\\ 3x_1-x_2\leqslant -3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 (1)图 1-1 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域,目标函数 $z=x_1+3x_2$,即 $x_2=-\frac{1}{3}x_1+\frac{z}{3}$是斜率为$-\frac{1}{3}$的一族平行线,易知 $x_1=3,x_2=0$ 为可行解,由线性规划的性质知,其最值在可行域的顶点取得,将直线 $x_1+3x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向上平移,直至 A 点,A 点坐标为(2,4)。

所以
$$\max z=2+3\times 4=14$$
此线性规划问题有唯一最优解。

(2)图 1-2 中的阴影部分为此线性规划问题的可行域,目标函数 $z=x_1+1.5x_2$,即 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}z$ 是斜率为$-\frac{2}{3}$的一族平行线,易知 $x_1=3,x_2=0$ 为可行解,由线性规划的性质知,其最值在可行域的顶点取得。

将直线 $x_1+1.5x_2=3$ 沿其法线方向逐渐向下平移,直至 B 点,B 点坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$。

所以
$$\min z=\frac{3}{2}+1.5\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

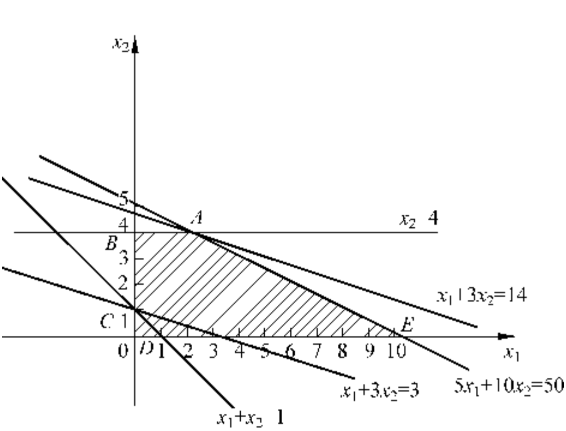

图　1-1

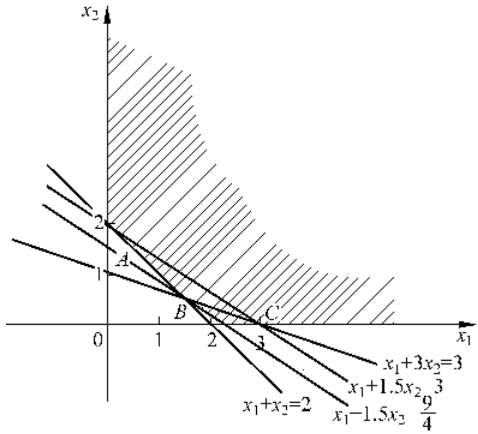

图　1-2

此线性规划问题有唯一最优解。

(3) 图 1-3 中阴影部分为此线性规划问题的可行域，目标函数 $z=2x_1+2x_2$，即 $x_2=-x_1+\frac{z}{2}$是斜率为-1 的一族平行线，易知 $x_1=0, x_2=0$ 为可行解。在将直线 $2x_1+2x_2=0$ 沿其法线方向逐渐向上平移的过程中发现：目标函数的值可以增加到无穷大，故此线性规划问题为无界解。

(4) 如图 1-4 所示，此问题的可行域为空集，故此线性规划问题无可行解。

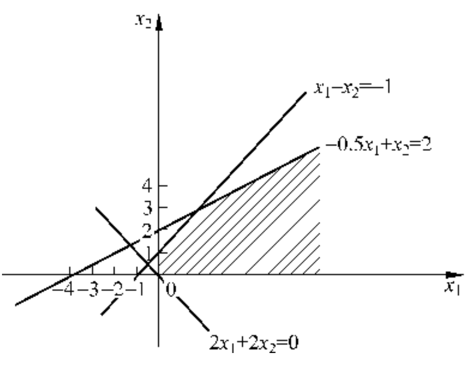

图　1-3

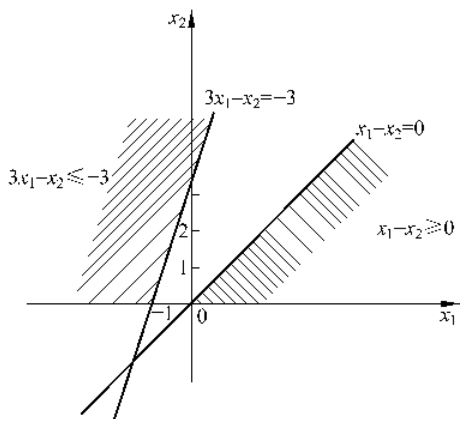

图　1-4

1.2　将下列线性规划问题变换成标准型，并列出初始单纯形表。

(1) $\min z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$

$$\begin{cases}4x_1-x_2+2x_3-x_4=-2\\ x_1+x_2+3x_3-x_4\leqslant 14\\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4\geqslant 2\\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0,x_4\ \text{无约束}\end{cases}$$

（2）$\max s=z_k/p_k$

$$\begin{cases} z_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}x_{ik} \\ \sum_{k=1}^{m} -x_{ik} = -1, \quad (i=1,\cdots,n) \\ x_{ik} \geqslant 0, \quad (i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m) \end{cases}$$

解　（1）将此线性规划问题化为标准型。

令 $x_4=x_5-x_6$，$z'=-z$。其中，$x_5,x_6\geqslant 0$。

所以 $$\max z'=-\min(-z')=-\min z$$

则得到标准型为

$$\max z' = 3x_1-4x_2+2x_3-5(x_5-x_6)+0\cdot x_7+0\cdot x_8-Mx_9-Mx_{10}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} -4x_1+x_2-2x_3+x_5-x_6+x_{10}=2 \\ x_1+x_2+3x_3-x_5+x_6+x_7=14 \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_5-2x_6-x_8+x_9=2 \\ x_1,x_2,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\geqslant 0 \end{cases}$$

其中，M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 1-3。

表　1-3

$c_j\to$			3	-4	2	-5	5	0	0	$-M$	$-M$	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
$-M$	x_{10}	2	-4	1	-2	1	-1	0	0	0	1	2
0	x_7	14	1	1	3	-1	1	1	0	0	0	14
$-M$	x_9	2	-2	[3]	-1	2	-2	0	-1	1	0	$\frac{2}{3}$
$-z'$		$4M$	$3-6M$	$4M-4$	$2-3M$	$3M-5$	$5-3M$	0	$-M$	0	0	

（2）在上述问题的约束条件中加入人工变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，得

$$\max s = \frac{1}{p_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}x_{ik}-Mx_1-Mx_2-\cdots-Mx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} x_i+\sum_{k=1}^{m}x_{ik}=1, \quad (i=1,2,\cdots,n) \\ x_{ik}\geqslant 0, x_i\geqslant 0, \quad (i=1,2,\cdots,n;\quad k=1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

其中，M 是一个任意大的正数。

初始单纯形表见表 1-4。

表　1-4

c_j			$-M$	$-M$	$\cdots$	$-M$	$\frac{a_{11}}{p_k}$	$\frac{a_{12}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{a_{1m}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{a_{n1}}{p_k}$	$\frac{a_{n2}}{p_k}$	$\cdots$	$\frac{a_{mn}}{p_k}$	θ_i
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1m}	$\cdots$	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{mn}	
$-M$	x_1	1	1	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	
$-M$	x_2	1	0	1	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$-M$	x_n	1	0	0	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	1	$\cdots$	1	
$-s$		nM	0	0	$\cdots$	0	$\frac{a_{11}}{p_k}+M$	$\frac{a_{12}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{a_{1m}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{a_{n1}}{p_k}+M$	$\frac{a_{n2}}{p_k}+M$	$\cdots$	$\frac{a_{mn}}{p_k}+M$	

1.3　在下面的线性规划问题中找出满足约束条件的所有基本解，指出哪些是基本可行解，并代入目标函数，确定哪一个是最优解。

（1）$\max z=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-4x_4=8\\x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

（2）$\min z=5x_1-2x_2+3x_3-6x_4$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\x_1,x_2,x_3,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

解　（1）此线性规划问题的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & -4\\1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)$$

则
$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix}-4\\-7\end{pmatrix}$$

① 因为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$ 线性无关，所以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 为基，x_1,x_2 为基变量。

所以
$$\begin{cases}2x_1+3x_2=8+x_3+4x_4\\x_1-2x_2=-3-6x_3+7x_4\end{cases}$$

令非基变量 $x_3,x_4=0$，得

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=8\\x_1-2x_2=-3\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases}$$

基解 $\boldsymbol{X}^{(1)}=(1,2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为可行解。

$$z_1=2\times1+3\times2+4\times0+7\times0=8$$

② 因为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3$ 线性无关，所以 $(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3)$ 为基，x_1,x_3 为基变量。

所以
$$\begin{cases}2x_1-x_3=8-3x_2+4x_4\\x_1+6x_3=-3+2x_2+7x_4\end{cases}$$
令非基变量 $x_2,x_4=0$，得
$$\begin{cases}2x_1-x_3=8\\x_1+6x_3=-3\end{cases}$$
解得
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{45}{13}\\x_3=-\dfrac{14}{13}\end{cases}$$
基解 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\left(\dfrac{45}{13},0,-\dfrac{14}{13},0\right)^{\mathrm{T}}$ 是非可行解。

③ 因为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_4$ 线性无关，所以$(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_4)$为基，$x_1,x_4$ 为基变量。

所以
$$\begin{cases}2x_1-4x_4=8-3x_2+x_3\\x_1-7x_4=-3+2x_2-6x_3\end{cases}$$
令非基变量 $x_2,x_3=0$，得
$$\begin{cases}2x_1-4x_4=8\\x_1-7x_4=-3\end{cases}$$
解得
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{34}{5}\\x_4=\dfrac{7}{5}\end{cases}$$
基解 $\boldsymbol{X}^{(3)}=\left(\dfrac{34}{5},0,0,\dfrac{7}{5}\right)^{\mathrm{T}}$ 为可行解。
$$z_3=2\times\frac{34}{5}+3\times0+4\times0+7\times\frac{7}{5}=\frac{117}{5}$$
④ 因为 $\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$ 线性无关，所以$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3)$为基，$x_2,x_3$ 为基变量。

所以
$$\begin{cases}3x_2-x_3=8-2x_1+4x_4\\-2x_2+6x_3=-3-x_1+7x_4\end{cases}$$
令非基变量 $x_1,x_4=0$，得
$$\begin{cases}3x_2-x_3=8\\-2x_2+6x_3=-3\end{cases}$$
解得
$$\begin{cases}x_2=\dfrac{45}{16}\\x_3=\dfrac{7}{16}\end{cases}$$
基解 $\boldsymbol{X}^{(4)}=\left(0,\dfrac{45}{16},\dfrac{7}{16},0\right)^{\mathrm{T}}$ 为可行解。
$$z_4=2\times0+3\times\frac{45}{16}+4\times\frac{7}{16}+7\times0=\frac{163}{16}$$
⑤ 因为 $\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_4$ 线性无关，所以$(\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_4)$为基，$x_2,x_4$ 为基变量。