



3.1 常用坐标系

为了分析问题方便,研究作用在运动体上的力、力矩以及运动体的运动时,采用不同的坐标系。还要说明的是,尽管我们规定了各个坐标系的符号,但由于各类运动体在其所在的研究领域有不同的习惯表示和规定,而且这种习惯表示和规定在相应的研究领域和同行者之间有广泛的使用基础。因此在建立各类运动体运动方程时,在保证使用相同右手定则外,允许坐标系坐标轴的指向及符号规定稍有不同。

选取坐标系的原则,既要对所研究问题方便,又要使被描述的运动方程简单明了,清晰易懂。常用的坐标系有以下几种。

1. 地面(固连)参考坐标系 $O_g-x_g y_g z_g$

地面(固连)参考坐标系简称地面坐标系。

坐标原点 O_g 取在地面上某一点处,比如导弹的发射点,飞机起飞点,舰船起航点,等等; x_g 轴在坐标原点 O_g 处的当地水平面内,指向任一相对地面固定的方位,对于导弹而言,一般取指向目标所在的方位; y_g 轴垂直当地水平面,向上为正; z_g 轴和 $O_g-x_g y_g$ 平面垂直,构成右手坐标系。显然,地面坐标系固连于地球表面,随地球一起转动,如图 3.1 所示。

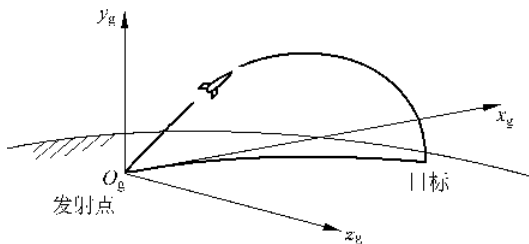


图 3.1 地面坐标系

对于运动距离比较近,运动时间比较短的运动体,可把地球看作静止的(实际上地球是运动的),并且把地球表面看作平面。这样,就把地面坐标系看作惯性坐标系。引进这个坐标系的目的,在于决定运动体质心移动的规律(运动轨迹或弹道),并决定运动体在空间的姿态及运动速度的方向等。对于运动距离比较近的情况,可认为重力与 y_g 轴平行,方向相反。

2. 航迹固连坐标系(弹道固连坐标系) $O_k-x_k y_k z_k$

航迹固连坐标系简称航迹坐标系。

坐标原点 O_k 取在运动体瞬时惯性中心上,如图 3.2 所示。

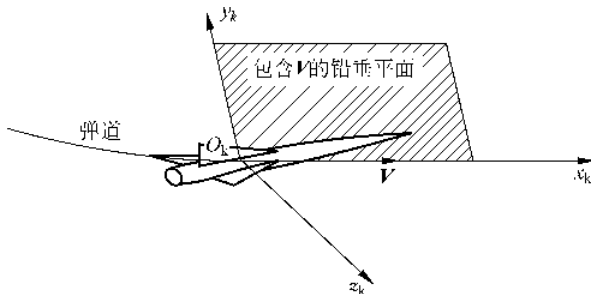


图 3.2 航迹坐标系

x_k 轴指向运动体的速度方向; y_k 轴位于包含速度向量的垂直平面内垂直于速度向量,向上为正; z_k 轴在水平面内与 $O_k-x_k y_k$ 组成右手坐标系。这个坐标系和理论力学中所讲的自然坐标系有点相似,研究质点的曲线运动时,把动力学方程投影到该坐标轴上去,可使方程式简单清晰。

由定义可知,因速度 V 随时在改变,故 $O_k-x_k y_k z_k$ 是动坐标系。

3. 载体坐标系 $O_b-x_b y_b z_b$

载体坐标系的原点 O_b 取在运动体的瞬时惯性中心上; x_b 轴与运动体纵轴一致,指向头部方向为正; y_b 轴在运动体的纵向对称平面内,垂直于 x_b 轴指向上方(相对地面以正常方式放置运动体时)为正; z_b 轴垂直于纵向对称平面与 $O_b-x_b y_b$ 组成右手坐标系,如图 3.3 所示。

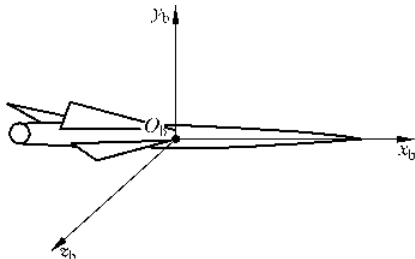


图 3.3 载体坐标系

引进载体坐标系的目的是用它来决定运动体相对于地面坐标系的姿态。把运动体的转动运动方程式投影到该坐标系上去,可使方程式简单清晰。

4. 空气(流体)动力坐标系 $O_a-x_a y_a z_a$

空气(流体)动力坐标系 $O_a-x_a y_a z_a$ 的原点 O_a 取在运动体的瞬时惯性中心上; x_a 轴与运动体的速度方向一致; y_a 轴取在运动体的纵向对称平面内,与 x_a 轴垂直,向上为正; z_a 轴和 $O_a-x_a y_a$ 组成右手坐标系,如图 3.4 所示。

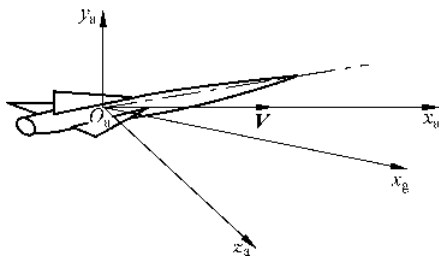


图 3.4 空气(流体)动力坐标系

气动力(流体动力)是以沿此坐标系的三个分量形式给出的,因此,引进空气(流体)动力坐标系。

该坐标系在导弹控制系统方面的教材中常称为速度坐标系。

上面定义了几个常用坐标系。在此特别要注意的是各坐标系的共同点和特殊点。

这些坐标系的共同点是,都是右手直角坐标系,除地面坐标系之外,原点均取在运动体的惯性中心上;特殊点是各坐标轴的指向是不同的。

有时,在仅考虑运动体的转动运动而不考虑其质心平时,也将地面坐标系随运动体一起平移,即将地面坐标系的原点固定在运动体质心处,而其各轴指向相对地面保持不变。

3.2 飞行力学变量

3.2.1 飞行器相对地面姿态的确定

为了描述飞行器在空间的姿态,或者为了用载体坐标系表示作用在垂直于地平面方向的重力矢量,需要做一系列欧拉角变换^[32],如图 3.5 所示。欧拉角的名称和符号为

Ψ ——偏航角(又称方位角,航向角),转动轴为 y_g ;

θ ——俯仰角,转动轴为 z_g' ;

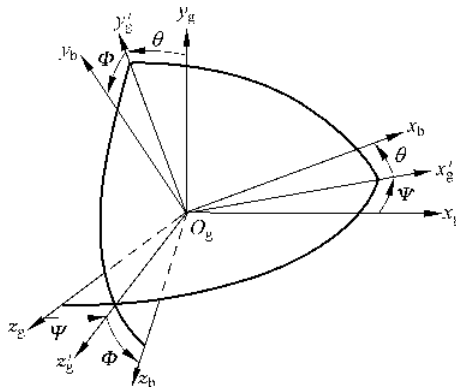


图 3.5 飞行器姿态角的定义

Φ ——滚转角,转动轴为 x_b 。

用这些角能得到定义欧拉角的各个平面。按 Ψ, θ, Φ 顺序从地面坐标系 $O_g-x_g y_g z_g$ 转到载体坐标系 $O_b-x_b y_b z_b$ 的过程为

$$O_g-x_g y_g z_g \xrightarrow{T(\Psi)} O_g-x'_g y_g z'_g \xrightarrow{T(\theta)} O_g-x_b y'_g z'_g \xrightarrow{T(\Phi)} O_b-x_b y_b z_b$$

为了清楚起见,也为了导出坐标系之间坐标变换阵,将上面的三次转动分解,对应 Ψ, θ 角度的转动如图 3.6 所示,其中图 3.6(a)对应 Ψ 角,图 3.6(b)对应 θ 角。

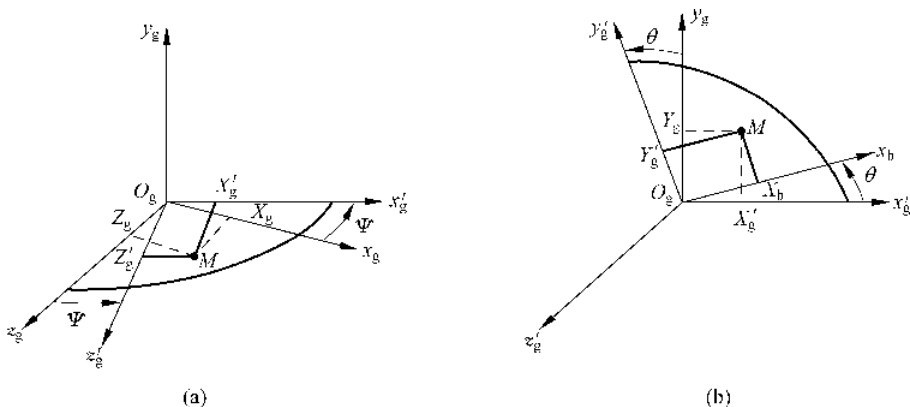


图 3.6 转动的分解

首先绕 $O_g-x_g y_g z_g$ 坐标系的 y_g 轴转动 Ψ 角,转到新坐标系 $O_g-x'_g y_g z'_g$,设点 M 位于 $O_g-x_g z_g$ 平面内,也即 $O_g-x'_g z'_g$ 平面内,点 M 在两坐标系内的坐标分别为

在 $O_g-x_g y_g z_g$ 内: $[X_g \ 0 \ Z_g]^T$

在 $O_g-x'_g y_g z'_g$ 内: $[X'_g \ 0 \ Z'_g]^T$

由图 3.6(a)可以得到

$$\begin{cases} X'_g = X_g \cos \Psi - Z_g \sin \Psi \\ Y_g = Y_g (= 0) \\ Z'_g = X_g \sin \Psi + Z_g \cos \Psi \end{cases} \quad (3.2.1)$$

或写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X'_g \\ Y_g \\ Z'_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi & 0 & -\sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\Psi) \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix}$$

第二次绕 $O_g-x'_g y_g z'_g$ 坐标系的 z'_g 轴旋转 θ 角, 转到新坐标系 $O_g-x_b y'_g z'_g$, 设点 M 位于 $O_g-x'_g y_g$ 平面内, 也即 $O_g-x_b y'_g$ 平面内, 点 M 在两坐标系内的坐标分别为

$$\text{在 } O_g-x'_g y_g z'_g \text{ 内: } [X'_g \quad Y_g \quad 0]^T$$

$$\text{在 } O_g-x_b y'_g z'_g \text{ 内: } [X_b \quad Y'_g \quad 0]^T$$

由图 3.6(b) 可以得到

$$\begin{cases} X_b = X'_g \cos \theta + Y_g \sin \theta \\ Y'_g = -X'_g \sin \theta + Y_g \cos \theta \\ Z'_g = Z'_g (= 0) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y'_g \\ Z'_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_g \\ Y_g \\ Z'_g \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{bmatrix} X'_g \\ Y_g \\ Z'_g \end{bmatrix}$$

同理在第三次转动 Φ 角后可得

$$\begin{cases} X_b = X_b \\ Y_b = Y'_g \cos \Phi + Z'_g \sin \Phi \\ Z_b = -Y'_g \sin \Phi + Z'_g \cos \Phi \end{cases} \quad (3.2.3)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y'_g \\ Z'_g \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\Phi) \begin{bmatrix} X_b \\ Y'_g \\ Z'_g \end{bmatrix}$$

用 $\mathbf{T}(\Psi)$, $\mathbf{T}(\theta)$, $\mathbf{T}(\Phi)$ 代表对应于三个欧拉角的变换矩阵, 则

$$\mathbf{T}(\Psi) = \begin{bmatrix} \cos \Psi & 0 & -\sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix}$$

总的变换矩阵 T_{bg} 为

$$\begin{aligned}
 T_{bg} &= T(\Phi)T(\theta)T(\Psi) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Psi & 0 & -\sin\Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Psi & 0 & \cos\Psi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi & \sin\theta & -\cos\theta\sin\Psi \\ -\sin\theta\cos\Psi\cos\Phi + \sin\Psi\sin\Phi & \cos\theta\cos\Phi & \sin\theta\sin\Psi\cos\Phi + \cos\Psi\sin\Phi \\ \sin\theta\cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\cos\Phi & -\cos\theta\sin\Phi & -\sin\theta\sin\Psi\sin\Phi + \cos\Psi\cos\Phi \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

在载体坐标系上,重力矢量可表示为

$$\mathbf{G}_b = T_{bg} \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta\cos\Phi \\ \cos\theta\sin\Phi \end{bmatrix} mg \tag{3.2.5}$$

3.2.2 航迹速度矢量的确定

飞行器航迹速度矢量 $\mathbf{V}_k$ 是相对于地面由下列角度确定的:

χ ——航迹方位角,转动轴为 y_g ;

γ ——航迹倾角,转动轴为 z_k 。

图 3.7 所示的航迹坐标系是按 x_k 轴取 $\mathbf{V}_k$ 方向来定位的,其 z_k 轴在水平面内。

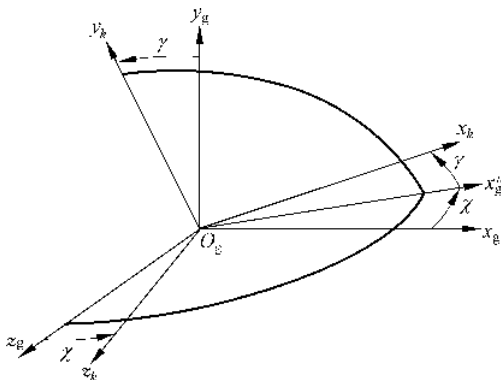


图 3.7 航迹角的定义

从地面坐标系 $O_g-x_g y_g z_g$ 到航迹坐标系 $O_k-x_k y_k z_k$ 的变换矩阵只涉及两次转动,转动顺序为先 χ 后 γ ,转动过程为

$$O_g-x_g y_g z_g \xrightarrow{T(\chi)} O_g-x''_g y_g z_k \xrightarrow{T(\gamma)} O_k-x_k y_k z_k$$

$T(\chi)$, $T(\gamma)$ 为对应两次转动的变换阵, 分别为

$$T(\chi) = \begin{bmatrix} \cos\chi & 0 & -\sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\chi & 0 & \cos\chi \end{bmatrix}$$

$$T(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

总的变换阵 T_{kg} 为

$$T_{kg} = T(\gamma)T(\chi)$$

因而, 在地面坐标系中的航迹速度矢量为

$$\mathbf{V}_{Kg} = \mathbf{T}_{gk} \mathbf{V}_{Kk} = \mathbf{T}_{kg}^T \begin{bmatrix} \mathbf{V}_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\chi \\ \sin\gamma \\ -\cos\gamma\sin\chi \end{bmatrix} \mathbf{V}_K \quad (3.2.6)$$

为了在载体坐标系中确定 $\mathbf{V}_K$, 须经如下变换:

$$\mathbf{V}_{Kb} = \mathbf{T}_{bk} \mathbf{V}_{Kk} = \mathbf{T}_{bg} \mathbf{T}_{gk} \mathbf{V}_{Kk} = \mathbf{T}_{bg} \mathbf{T}_{kg}^T \mathbf{V}_{Kk} \quad (3.2.7)$$

3.2.3 空气动力学变量的确定

作用在飞行器上的总的空气动力 $\mathbf{R}^A$, 在空气动力坐标系中分解成 3 个互相垂直的分量, 如图 3.8 所示。

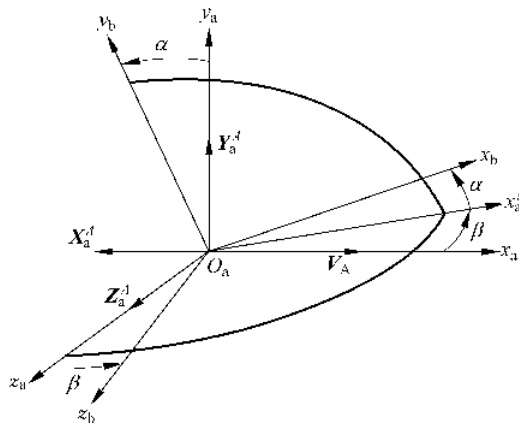


图 3.8 迎角和侧滑角的定义

这 3 个空气动力分量定义如下:

$\mathbf{Y}_a^A$ ——升力, 垂直于 $\mathbf{V}_A$, 在飞行器纵向对称平面内;

$\mathbf{X}_a^A$ ——阻力, 在 $\mathbf{V}_A$ 的反方向, 在 x_a 轴的负方向;

$\mathbf{Z}_a^A$ ——侧力,在 z_a 轴方向。

空气动力坐标系与载体坐标系构成以下角度:

α ——迎角,转动轴为 z_b ;

β ——侧滑角,转动轴为 y_a 。

从空气动力坐标系到载体坐标系的转动顺序为先 β 后 α ,转动过程为

$$O_a - x_a y_a z_a \xrightarrow{T(\beta)} O_a - x'_a y_a z_b \xrightarrow{T(\alpha)} O_b - x_b y_b z_b$$

其中

$$\mathbf{T}(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

总的变换阵 $\mathbf{T}_{ba}$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ba} &= \mathbf{T}(\alpha)\mathbf{T}(\beta) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha \sin\beta \\ -\sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha \sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中, α, β 在正常飞行范围内可视为小量,所以

$$\mathbf{T}_{ba} \approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在载体坐标系中的飞行速度矢量的分量为

$$\mathbf{V}_{Ab} = \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix}_b = \mathbf{T}_{ba} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta \\ -\sin\alpha \cos\beta \\ \sin\beta \end{bmatrix} \mathbf{V}_A \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mathbf{V}_A \quad (3.2.8)$$

各量之间的关系为

$$|\mathbf{V}_A| = \sqrt{u_{Ab}^2 + v_{Ab}^2 + w_{Ab}^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-v_{Ab}}{u_{Ab}}\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{w_{Ab}}{|\mathbf{V}_A|}\right)$$

习惯上,空气动力矩是在载体坐标系上分解,它们的定义是:

L_b^A ——空气动力滚转力矩(绕 x_b 轴);

M_b^A ——空气动力俯仰力矩(绕 z_b 轴);

N_b^A ——空气动力偏航力矩(绕 y_b 轴)。

空气动力坐标系相对地面坐标系的转动用 3 个角度来确定,如图 3.9 所示。

其中, χ_A ——气流方位角,转动轴是 y_g ;

γ_A ——气流俯仰角,转动轴是 z_g' ;

μ_A ——气流倾斜角,转动轴是 x_a 。

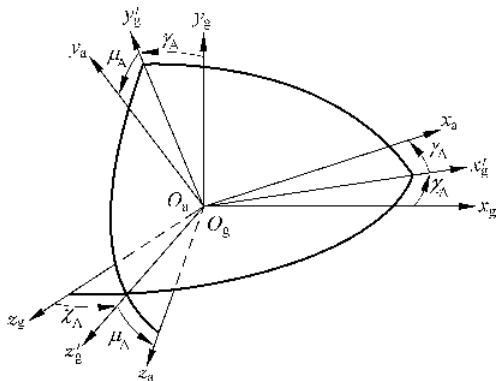


图 3.9 气流角的定义

从地面坐标系到空气动力坐标系的转动顺序为 χ_A, γ_A, μ_A , 转动过程及变换阵与 3.2.1 节中从地面坐标系到载体坐标系的情况相似, 只需用 χ_A, γ_A, μ_A 分别代替 Ψ, θ, Φ 可得

$$T(\chi_A) = \begin{bmatrix} \cos\chi_A & 0 & -\sin\chi_A \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\chi_A & 0 & \cos\chi_A \end{bmatrix}$$

$$T(\gamma_A) = \begin{bmatrix} \cos\gamma_A & \sin\gamma_A & 0 \\ -\sin\gamma_A & \cos\gamma_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\mu_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu_A & \sin\mu_A \\ 0 & -\sin\mu_A & \cos\mu_A \end{bmatrix}$$

总的变换阵为

$$T_{ag} = T(\mu_A)T(\gamma_A)T(\chi_A)$$

3.2.4 描述风影响的角度

一般讲, 飞行器和周围大气场之间的相对速度(飞行速度 V_A)等于飞行器对地

的速度(航迹速度 $\mathbf{V}_K$)与风速 $\mathbf{V}_W$ 之差,这对所有坐标系均适用,写成矢量形式

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_K - \mathbf{V}_W \quad (3.2.9)$$

可以看出,风速决定了飞行速度和航迹速度之差。为了描述风对空气动力量的影响,需进行空气动力坐标系和航迹坐标系之间的坐标变换,即从 $\mathbf{V}_A$ 到 $\mathbf{V}_K$ 的转动,相应的转换矩阵为

$$\mathbf{T}_{ka} = \mathbf{T}_{kg} \mathbf{T}_{gb} \mathbf{T}_{ba} \quad (3.2.10)$$

展开之后关系比较复杂。为了简单且直观地描述风的影响,按图 3.10 的定义,采用如下欧拉角:

β_W ——风侧滑角,转动轴为 y_a ;

α_W ——风迎角,转动轴为 z'_a ;

μ_W ——风倾侧角,转动轴为 x_k 。

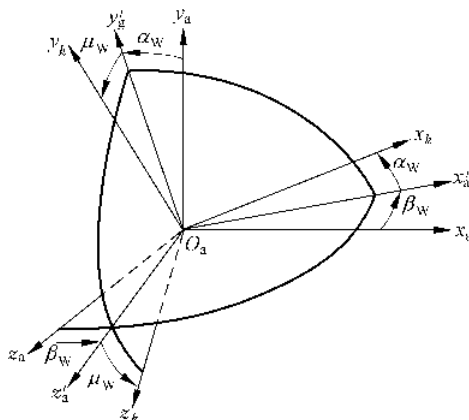


图 3.10 描述风影响的角度

按 β_W, α_W, μ_W 的顺序,变换阵为

$$\mathbf{T}_{ka} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu_W & \sin\mu_W \\ 0 & -\sin\mu_W & \cos\mu_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha_W & \sin\alpha_W & 0 \\ -\sin\alpha_W & \cos\alpha_W & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta_W & 0 & -\sin\beta_W \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta_W & 0 & \cos\beta_W \end{bmatrix}$$

在小角度 α_W 和 β_W 假设下,有

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{ka} &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\mu_W & \sin\mu_W \\ 0 & -\sin\mu_W & \cos\mu_W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_W & 0 \\ -\alpha_W & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta_W \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_W & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha_W & -\beta_W \\ -\alpha_W \cos\mu_W + \beta_W \sin\mu_W & \cos\mu_W & \sin\mu_W \\ \alpha_W \sin\mu_W + \beta_W \cos\mu_W & -\sin\mu_W & \cos\mu_W \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在角度 $(\theta - \gamma)$, $(\chi - \Psi)$ 皆为小角度且 $\Phi = 0$ 时, 将式(3.2.10)与上式比较得

$$\theta \approx \gamma + \alpha + \alpha_w$$

$$\Psi \approx \chi + \beta + \beta_w$$

对称直线飞行时, 滚转角 $\Phi = 0$, 侧滑角 $\beta = 0$, 所有力矢量和速度矢量在 $x_g y_g$ 平面内, 则 $x_g y_g$ 平面内角度之间的关系为(见图 3.11)

$$\theta = \gamma + \alpha + \alpha_w$$

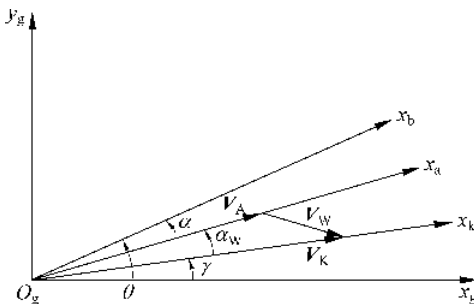


图 3.11 $x_g y_g$ 平面内角度之间的关系

3.2.5 速度方程

设风速矢量在地面坐标系中的分量为

$$\mathbf{V}_{Wg} = \begin{bmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{bmatrix}$$

在航迹坐标系上有

$$\mathbf{T}_{ka} \mathbf{V}_{Aa} = \mathbf{V}_{Kk} - \mathbf{T}_{kg} \mathbf{V}_{Wg}$$

当角度 α_w, β_w 为小量时, 有

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_w \cos \mu_w + \beta_w \sin \mu_w \\ \alpha_w \sin \mu_w + \beta_w \cos \mu_w \end{bmatrix} \mathbf{V}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{kg} \begin{bmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{bmatrix}$$

3.2.6 转动角速度方程

飞行器相对惯性空间(近似情况下可认为是地球)的转动角速度矢量在载体坐标系上定义为

$$\boldsymbol{\Omega}_I = [p_I \quad q_I \quad r_I]^T$$

这里角标“ I ”表示相对惯性空间。