



### 1.1 引言

自动控制理论是人类长期与外部世界和谐发展的产物。自古以来,人类为了更好地适应自然环境,尝试制造各种工具以及具有不同自动化程度的机器,并利用它们来完成艰巨的任务。

自古代开始,各种朴素的控制思想与技术就在人类社会得到了应用。传说远古时期,黄帝就发明了铜壶滴漏以区分昼夜的不同时刻,到了春秋时期,这种壶的使用已经相当普遍。在这种计时装置中,放置在壶中的木箭随着水位的降低而不断下沉,人们通过读出木箭上的刻度便可以知道当时的时间。在这种计时器中,水的滴出速度会随着容器内水面的降低而减慢,从而造成计时的不准确。东汉时期,著名科学家张衡设计了二级刻漏计时器,他通过采用补偿壶来解决由于水面降低而导致的计时差别。

西方是现代科学文明的主要发源地,控制理论在“工业革命”时期受到了极大的重视,并在实际应用中得到了飞速发展。1788年,瓦特在改进蒸汽机时,发明了一种离心式调速装置来改变蒸汽流,它能使引擎匀速工作,这是当时反馈控制思想最为成功的应用之一。E. J. Routh 和 A. Hurwitz 分别于 1877 年和 1895 年提出了可以用于分析系统稳定性的劳斯判据和赫尔维茨判据,为分析线性系统的稳定性奠定了理论基础。1892 年,俄国科学家李雅普诺夫 Lyapunov 提出了李雅普诺夫直接方法,这种方法一直沿用至今,现在仍然是非线性系统设计与分析的主要工具之一。在建立了系统稳定性分析的理论体系之后,科学家们又陆续提出了控制系统分析与设计的一些具体方法。其中,奈奎斯特 Nyquist 于 1932 年发表了奈奎斯特判据,H. Bode 在 1940—1945 年间完成了频率特性绘制的伯德图方法。1942 年,H. Harris 在拉普拉斯变换的基础之上,提出应用传递函数来描述系统的输入输出关系。1945—1950 年间,美国电信工程师 W. R. Evans 发表了根轨迹方法的基本理论。

美国数学家维纳于 1948 年提出了控制论,标志着自动控制理论进入了一个崭新的发展时期。1954 年,钱学森在美国发表了著名的《工程控制

论》一书,系统地揭示了控制论对自动化、航空、航天等科学技术的意义与深远影响。除了不断完善有关理论之外,反馈控制等方法逐渐渗透到国民经济的各个领域,为许多产业实现自动化操作奠定了理论基础。

自 20 世纪中期人类开始尝试太空探索,其中,苏联在 1957 年发射了第一颗人造地球卫星,美国的阿波罗飞船于 1968 年成功登上月球。在这些举世瞩目的成功中,自动控制理论发挥着巨大的作用。同时,人类在航空航天等领域的研究也直接促使现代控制理论在 20 世纪 60 年代的巨大发展,许多控制理论和方法,如动态规划理论、极大值原理、最优控制理论、卡尔曼滤波方法以及系统的状态空间方法等都逐渐发展成熟。

毫无疑问,自动控制现在已经渗透到国民经济的各个领域。在 2001 年美国控制年会上,美国波士顿大学(Boston University)的 Christos Cassandras 教授做了题为“Let's Control Everything”的大会报告,总结了自动控制系统在多个领域的广泛应用,并对其未来的发展前景进行了预测。值得指出的是,随着计算机、网络和传感器技术的不断发展,人类认识世界的能力不断增强,因此,控制对象也从最初的简单机械系统不断拓展,逐渐延伸到机器人、航天器、工业过程等各个新兴高科技领域。随着人类活动范围不断扩大,控制对象也与日俱增,既包括宇宙飞船等大型复杂系统,又包括现在广泛研究的微纳米领域。与此同时,人类对于控制系统的品质要求,例如系统的快速性、稳定性、准确性等,都不断提高,因此对于控制系统的设计与分析方法也提出了更高的要求。

应该看到,以上提及的各种线性控制理论,如根轨迹方法、频域分析方法等经过过去一个多世纪的发展,已经逐步发展成熟,并在人类社会的实际生产中,如化工过程等,得到了广泛的应用,并且获得了巨大的经济效益。特别是近几十年来,随着数字计算机的发明和功能日益强大,线性控制方法已经在多个领域得到了成功的应用,极大地提高了生产规模和劳动效率,为这些领域的发展带来了革命性的变革。然而,随着现代社会对控制系统品质要求的不断提高,以及控制对象的日益复杂,这种线性控制方法已经很难满足人类的要求。

实际上,人类生产过程中接触到的都是非线性系统。所谓线性系统,只是这些非线性系统在某些条件下的良好近似。对于现有的线性系统设计工具而言,由于在分析过程中,忽略了系统中的非线性因素,因此无法准确衡量系统的输入输出性能。所以,这种基于近似处理的设计方法缩小了系统的正常工作范围,并造成其性能的明显下降,严重时甚至导致控制的失败。由于上述原因,自动控制领域一直在寻求一种能够直接对非线性系统进行设计与处理的工具来取代这些线性近似方法,以获得精确度更高、性能更为优越的控制系统。在控制理论专家的不断努力下,非线性控制理论与应用取得了很大的进展,陆续提出了相平面法、李雅普诺夫法和描述函数法等主要方法。特别是近年来,随着高性能计算机的出现,大规模集成电路以及新型传感器技术的快速发展,各种复杂的非线性控制方法在机器人、航空航天和工业过程等高科技领域得到了越来越多的应用。

## 1.2 非线性系统的复杂性能

对于线性系统而言,它们具有齐次性和叠加性等良好性质,因此可以应用传递函数来表示系统的输入输出特性,或者是通过状态空间方法来描述系统的状态及输出信号的动态特性。由于线性系统的良好性质,它们的稳定性完全取决于系统的结构和参数(例如传递函数的闭环极点或者是状态空间表示方法中的系统矩阵等),而与系统的初始状态没有任何关系。换言之,对于线性系统而言,对于同一个输入函数,只要系统在某个初始条件下保持稳定,那么对于其他任意初始条件,系统都是稳定的。因此,在线性系统中,所有的稳定性都是在全局意义上成立的。线性系统的这些性质为系统设计带来了非常有利的条件,使整个控制系统的设计和分析简单易行,特别是在稳定性分析方面具有非常成熟的理论和方法。

但是,对于非线性系统而言,它们表现出比线性系统复杂得多的动态行为。首先,由于非线性系统不满足齐次性和叠加性原理,因此无法利用传递函数这个数学工具来描述系统的输入输出关系。此外,对于非线性系统而言,其稳定性不但取决于系统的结构和参数,同时也和系统的初始状态有直接关系。一般而言,系统只有在初始状态满足相应的约束条件,即位于某个集合之内时,才能保证其稳定性。因此,对于非线性系统而言,在描述其稳定性时,还必须明确区分系统的稳定性是建立在全局范围上还是局部有效的。

由于非线性系统具有非常复杂的特性,因此,与线性系统相比较,非线性系统还表现出许多独特的行为<sup>[1~6]</sup>。

### 1.2.1 非线性系统的多平衡点特性

对于一个系统而言,我们将其状态维持不变的点称为平衡点。从平衡点的定义可以看出,对于下列  $n$  维线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{x} \in R^n$  为系统的状态,而  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  则是可逆的系统矩阵,显然该系统具有唯一的平衡点  $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ 。但是对于非线性系统而言,系统通常具有多个平衡点,例如,对于如下的一阶非线性系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

其中  $x \in R$  代表系统的状态,而  $f(x)$  则是一个非线性函数。为了计算系统(1.1)的平衡点,根据定义可以得到如下的代数方程

$$f(x) = 0$$

显然,对于非线性函数  $f(\cdot)$  而言,它可能具有若干个零点,由此将导致系统(1.1)具有多个平衡点。

非线性系统一般都存在多个性质有所差异的平衡点,这是其区别于线性系统的

主要标志之一。

**例 1.1** 对于如下非线性系统

$$\dot{x} = -x + x^2$$

运用上述方法可以计算得到系统的两个平衡点分别为

$$x_{s1} = 0, \quad x_{s2} = 1$$

进一步,我们可以分析系统在这两个平衡点附近的稳定性。根据系统的动态方程,可以得知 $\dot{x}(t)$ 具有如下特点

$$\begin{cases} \dot{x} > 0, & x > 1 \\ \dot{x} < 0, & 1 > x > 0 \\ \dot{x} > 0, & x < 0 \end{cases}$$

因此,当系统状态 $x(t)$ 位于平衡点 $x_{s1}=0$ 附近时,它将表现出往原点运动的趋势,因此,该平衡点 $x_{s1}=0$ 是稳定的。反之,在平衡点 $x_{s2}=1$ 附近,经过分析可以得知,系统状态具有偏离该平衡点的趋势,因此,平衡点 $x_{s2}=1$ 是不稳定的。实际上,当系统位于平衡点 $x_{s2}=1$ 上,一旦受到外力作用而发生轻微偏离时,系统状态将不断远离该平衡点,直至最后状态发散或者稳定到另一个平衡点 $x_{s1}=0$ 。对于该系统,当初始状态分别位于 $x_0=0.9999$ 和 $x_0=1.0001$ 时,其状态 $x(t)$ 随时间变化的曲线如图 1.1 所示。从左图可以看出:当初始条件小于 1 时,系统状态 $x(t)$ 随时间不断衰减,直到最终稳定于原点;而右图则表明:当初始状态大于 1 时, $x(t)$ 随时间不断增加,因此系统是不稳定的。

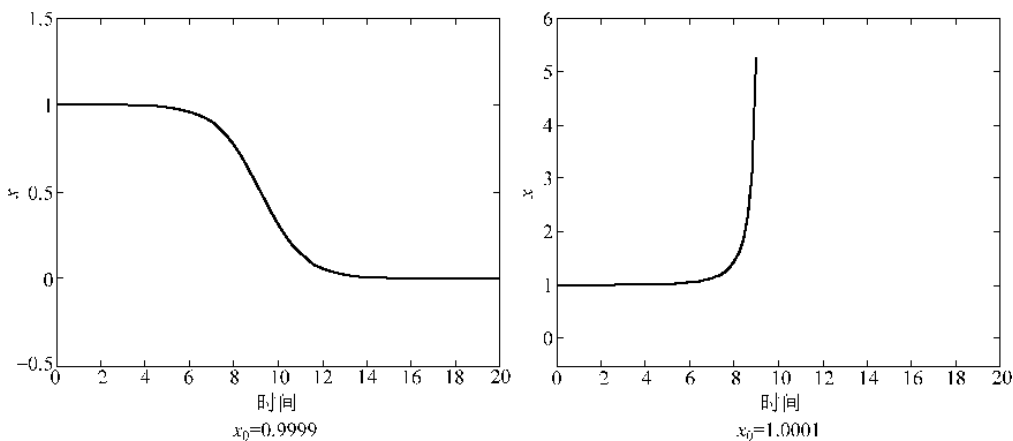


图 1.1 非线性系统多平衡点特性仿真结果

## 1.2.2 极限环

某些非线性系统在无任何外力作用的情况下,呈现出一种固定频率和固定振幅的等幅振荡,这种振荡通常称为极限环<sup>[7]</sup>,它也是非线性系统的一种独特行为。值得

指出的是,与线性系统由于外作用引起的等幅振荡不同,极限环是非线性系统的一种固有特性,它与系统的输入无关。

**例 1.2** 对于下列非线性系统

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

显然,当  $|x| < 1$  时,  $x^2 - 1 < 0$ , 此时振荡环节可以产生能量, 因此导致系统的能量不断增加, 所以  $|x|$  将持续增大最终达到 1; 反之, 如果  $|x| > 1$ , 则有  $x^2 - 1 > 0$ , 此时振荡环节将消耗能量, 因此导致系统能量不断减少, 从而使  $|x|$  逐渐下降到 1。因此, 在这种情况下, 不管系统的初始条件如何, 都将表现出一种固定频率和幅值的振荡, 即体现出极限环的特征。特别地, 当系统的初始条件分别取为

$$x_0 = 5, \quad \dot{x}_0 = 5$$

和

$$x_0 = -1, \quad \dot{x}_0 = -3$$

时, 系统的相平面图如图 1.2 所示。图中 A 点表示起点 (5, 5), 而 B 点则代表起点 (-1, -3)。根据该图可以分析得知: 系统具有一个频率为 6.5Hz, 振幅为 2 个单位的极限环。

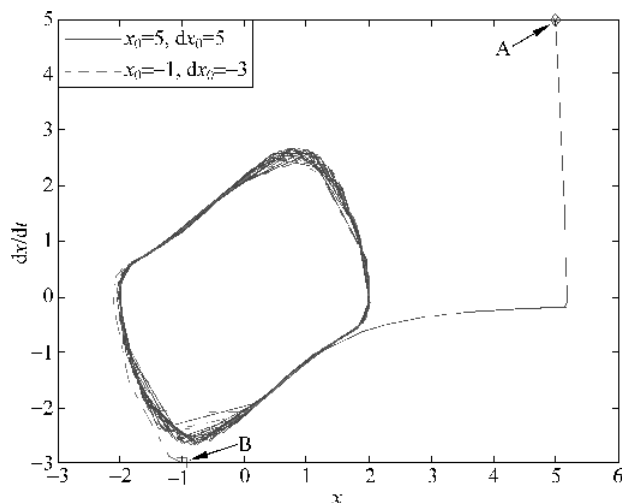


图 1.2 非线性系统极限环仿真结果

### 1.2.3 混沌

对于某些非线性系统而言, 其输出对于初始条件的变化极其敏感, 这种现象通常称为混沌<sup>[8]</sup>。因此, 当一个系统具有混沌特性时, 其初始值的微小变化将可能导致输出量的剧烈改变。这种现象在很多非线性系统中大量存在。一般而言, 系统的非线性越强, 混沌特性可能表现越明显。

**例 1.3** 对于下列非线性系统

$$\ddot{x} + 0.1 \dot{x} + x^5 = 3\sin(t)$$

由于强非线性项  $x^5$  的影响使系统表现出一定的混沌特性。例如,对应于两组具有细微差别的初始状态

$$x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 1.5$$

和

$$x_0 = 1.01, \quad \dot{x}_0 = 1.49$$

经过一段时间以后,系统状态表现出很大的差别,其相平面图见图 1.3。

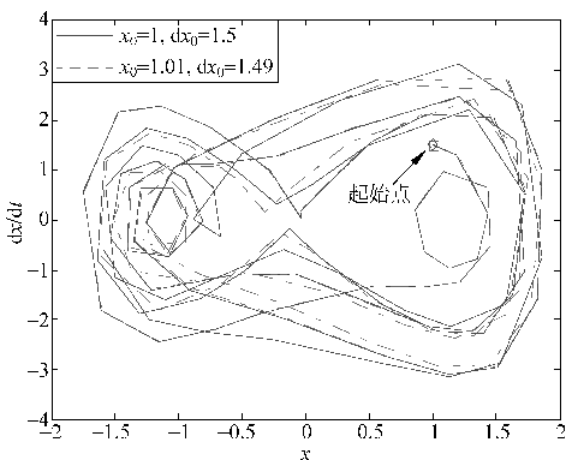


图 1.3 非线性系统混沌特性仿真结果

值得指出的是,近年来,许多科学家合理利用非线性系统的混沌行为来完成预定的任务,如实现数据加密等。

## 1.2.4 其他非线性现象

除了以上所讨论的特性之外,非线性系统还具有其他一些行为。磁滞是一种常见的非线性特性,它具体表现为系统的输出值不仅取决于当前的输入量,同时还和输入量的变化趋势有关<sup>[9,10]</sup>。即在输入值的上升和下降过程中,对于同样的输入值,系统具有不同的输出值,所以系统的输入输出关系将不再是一个简单的一一映射。当系统的输入量做周期性变化时,此时所对应的输入输出关系不是一条直线,而是一条闭合的曲线,通常将其称为磁滞回线。

**例 1.4** 对于原子力显微镜中的压电陶瓷而言,其位移-电压关系具有如图 1.4 所示的磁滞特性。这种特性将为选择合适的控制电压以实现期望的轨迹带来较大的困难。

对于传感装置或者执行机构而言,通常只有在输入值超过一定的阈值以后,系统才会有所响应,这种行为称为死区特性,它是一种常见的非线性行为。死区一般

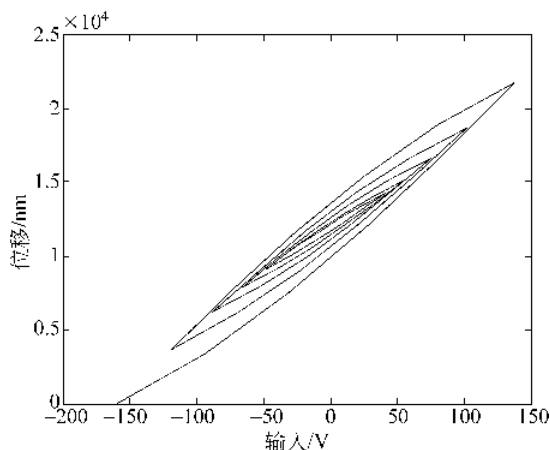


图 1.4 压电陶瓷的磁滞曲线

定义为传感器或者执行机构无法进行响应的区域,其存在严重地限制了传感器的分辨率以及控制的精度。死区特性的示意图如图 1.5 所示,图中 $(-\Delta, +\Delta)$ 表示系统响应的死区。

对于实际的机电系统而言,其工作范围都有一定的限制,输入量与输出量之间的相互关系只有在该工作范围内才有意义。如果输入量过大,由于系统已经达到其极限值,此时输出量将不再随输入量的增加而改变,而是保持在器件的极限值上。这种行为称为饱和,它也是一种常见的非线性行为,其响应曲线如图 1.6 所示,图中  $K$  表示系统响应的饱和值,而  $a$  则为输出到达饱和点时对应的输入量。

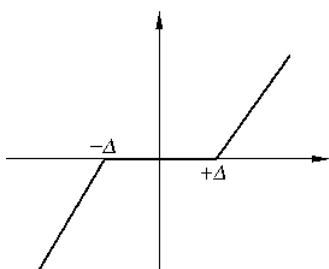


图 1.5 死区特性示意图

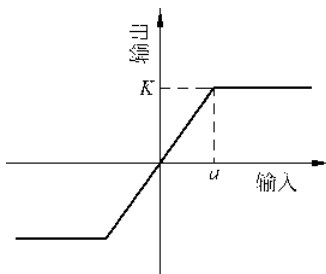


图 1.6 饱和特性示意图

### 1.3 非线性控制的重要意义

综上所述,非线性系统具有许多不同于线性系统的独特行为,因此线性系统的设计与分析方法,如传递函数、根轨迹法、频率响应法等,很难在非线性系统上得到应用。事实上,为了将这些线性控制方法用于非线性系统,通常需要将系统在平衡点附近线性化,然后再针对所得到的近似线性系统进行设计。显然,这种近似将影响系统的准确性,在很多情况下甚至无法使系统正常工作。因此,近年来,许多专家

学者致力于提出新的控制方法来控制各种非线性系统,由此推动了非线性控制成为当今最活跃的研究方向之一。非线性控制之所以日益受到控制领域的广泛重视,其主要原因为:

(1) 提高系统的性能。通常,采用近似方法所设计的线性系统在一定程度上偏离了原系统的特性,因此,系统的性能无法得到保证。这种情况在面对复杂的强非线性系统,如机器人系统、航空航天系统时,局限性更加明显。因此,针对这类控制对象而言,非线性控制是进行系统设计的一种最佳选择。

(2) 在很多情况下,线性控制方法无法使系统正常工作,此时非线性控制便成为系统设计与分析的唯一选择。

**例 1.5** 对于以下系统

$$\dot{x} = [x - \sin(x)]u \quad (1.2)$$

如果将其在零点附近线性化后,可以得到其近似系统为

$$\dot{x} = 0$$

显然,该近似系统是不可控的,因此无法设计控制器使系统回到零点。实际上,对于原系统,如果设计非线性控制器

$$u = -x[x - \sin(x)] \quad (1.3)$$

则有

$$\dot{x} = -x[x - \sin(x)]^2$$

对于上述闭环系统,如果选择一个正定函数

$$V = \frac{1}{2}x^2$$

然后对它求时间的导数可以计算得到

$$\dot{V} = -x^2[x - \sin(x)]^2 \leq 0$$

当且仅当  $x=0$  时,  $\dot{V}=0$ , 因此,  $\dot{V}$  是负定函数。根据以上事实不难证明, 控制器(1.3)可以使系统(1.2)渐近稳定于原点。■

(3) 更好地处理系统中的干扰与未建模特性。在设计控制系统时,通常需要对系统进行建模,然后再根据所获得的模型设计相应的控制方法。但是,由于在建模时,一般都忽略了系统的某些次要因素,因此,模型与实际系统之间具有一定的偏差。此外,实际系统在工作过程中受到各种不确定干扰的影响。为了使系统在这些干扰的影响下仍然能正常工作,可以将这些因素综合处理为不确定动态特性,然后采用非线性设计方法,通过在控制器中嵌入有关项来抵消或者削弱它们对系统性能的影响。

## 1.4 常见的非线性系统设计与分析方法

由于非线性系统具有非常复杂的特性,人类对其性能的认识远未成熟。迄今为止,真正能够有效应用于非线性系统设计和分析的工具并不多。现在,在非线性控

制领域,常见的方法主要有相平面分析法、描述函数法、李雅普诺夫分析法三种。

### 1.4.1 相平面分析法

相平面分析法是法国数学家庞加莱于1885年提出的一种图解方法,它主要适用于二阶非线性系统。这种方法的主要思想就是根据系统的状态构成相平面,然后在相平面上,利用系统的动态方程绘制不同初始条件下系统状态的运动轨迹,并将它们称为相平面图。这种方法的关键环节在于准确地绘制系统的相平面图。常用的方法主要有分析法和等倾线法两种。一旦得到了系统的相平面图,则对于在任意初始条件下的响应特性,可以根据相应的相轨迹直接得到。

相平面分析法简单直观,例如,非线性系统的多平衡点和极限环特性就可以在相平面上直接体现出来,它避免了求解非线性微分方程。因此,这种方法在非线性系统分析中得到了一定程度的应用。不足的是,作为一种近似的图解方法,这种方法一般只适用于二阶系统,现在,借助于计算机图形学等方法,可以将其扩展到三阶系统。但是,对于更高阶的系统而言,相平面法就无能为力了。

### 1.4.2 描述函数法

描述函数法是一种应用于非线性系统的近似分析方法,它是线性系统频率响应方法的一种拓展,可以用来近似分析和预测系统的动态行为。这种方法最早是由丹尼尔(P. J. Daniel)于1940年提出的。其主要思想为:在一定的条件下,当非线性环节在正弦输入信号作用下,其响应的高次谐波分量可以忽略不计,因此系统的响应可以用一次谐波分量来近似,此时可以仿照线性系统的频域特性来定义非线性系统的等效频率特性,并将其称为描述函数。

描述函数方法可以用来分析非线性系统的稳定性和极限环等问题。但是作为一种近似的分析方法,应用时必须考虑其前提条件。此外,这种方法只能研究系统的频率响应特性,而无法进行时域上的分析。

### 1.4.3 李雅普诺夫法

李雅普诺夫法是当前针对非线性系统的一种主要研究方法,它是由俄国科学家李雅普诺夫于1892年提出来的。这种方法包括直接法和间接法两种,最初主要用来分析系统的稳定性。近年来,经过发展,这种方法可以完成非线性系统控制器的设计与分析。李雅普诺夫法是当前几种主要的非线性控制策略,如自适应控制、鲁棒控制等的理论基础。这种分析方法的基本思路是构造一个类似于系统能量的正定函数(通常称之为李雅普诺夫候选函数),然后通过研究该函数随时间的变化趋势来分析系统的稳定性<sup>[11,12]</sup>。

**例 1.6** 对如下非线性系统

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\sin x - x$$

试判断该系统是否稳定。

**解** 为了分析系统的稳定性,构造如下的正定函数

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

经过计算可以得到  $V(x)$  关于时间的导数为

$$\dot{V}(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x\sin x$$

注意到

$$x\sin x \leq x^2$$

可以对  $\dot{V}(x)$  进行放缩得到

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}x^2 = -V$$

求解以上微分不等式得到

$$V(t) \leq V(0)e^{-t}$$

因此

$$|x(t)| \leq |x(0)| e^{-\frac{1}{2}t}$$

所以,系统的状态  $x(t)$  以指数方式收敛于零。 ■

除了用来分析系统的稳定性之外,近年来,李雅普诺夫方法还被广泛应用于构造非线性控制器来控制各类复杂系统。通常,在利用李雅普诺夫方法设计控制器时,采用前馈与反馈相结合的设计方法,通过前馈环节来补偿系统的非线性特性,在此基础上,利用反馈环节来控制补偿后的系统。由于在补偿系统的非线性特性时,需要利用系统的动态模型,因此,这是一种基于模型的控制方法。

**例 1.7** 对于以下的一阶非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

其中,  $x(t)$  是系统的状态,  $u(t)$  代表控制输入,  $f(x)$  和  $g(x)$  均为结构已知的非线性函数,而且,  $g(x)$  具有以下的下界  $g_0$

$$|g(x)| \geq g_0 > 0$$

试设计控制算法将  $x$  调节到零点。

**解** 为了补偿系统的非线性特性  $f(x)$ ,选择控制输入  $u$  为

$$u = -\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{kx}{g(x)}$$

式中,正数  $k \in R^+$  代表反馈控制增益。将上述控制算法代入系统的动态方程可以计算得到闭环方程如下

$$\dot{x} = -kx$$

因此

$$x(t) = x(0)e^{-kt}$$

系统状态  $x(t)$  以指数方式趋近于零。 ■

除了上述三种非线性控制方法之外,自 20 世纪 80 年代以来,基于微分几何的非线性控制方法取得了很大的进展。这种方法从几何的角度来分析非线性系统的许多性质,包括其可控性、可观性、可逆性等。更重要的是,对于满足某些条件的非线性系统,可以通过非线性状态变换等方法,将其转化为线性系统,即实现精确线性化<sup>[13,14]</sup>,在此基础上,可以应用成熟的线性控制理论来对其进行分析与设计,最终实现期望的控制性能。

## 1.5 本书的主要内容安排

针对非线性系统的控制方法有多种,本书将主要以李雅普诺夫方法为工具来介绍常见的非线性控制策略。具体而言,本书的内容可以分为理论基础与实际应用两个部分。其中,第一部分,即第 2~7 章,将对非线性系统的精确线性化、自适应控制、鲁棒控制、自学习控制等方法进行讨论和理论分析。为了适合研究生教材的要求,本书将对这些控制方法的设计思路进行分析,使读者能够理解和掌握其基本原理,而对于它们的一些具体细节,书中将不做过多讨论,感兴趣的读者可以查阅有关专著或者教材来了解其中的具体内容。为了使读者能够更好地了解上述非线性控制方法的具体特点和设计技巧,本书的第二部分,即第 8~10 章,将主要介绍这些方法在一些实际系统,如机器人系统、欠驱动吊车系统、磁悬浮系统上的具体应用。本书共分为 10 章,第 2~10 章的内容安排如下。

第 2 章主要介绍非线性控制的数学背景知识。为了符合工程专业研究生教学的需要,本书尽量减少枯燥的数学理论分析和证明,而只是对后续控制方法中所涉及的数学背景知识进行介绍。主要内容将包括范数及其性质,函数的一致连续及判别方法,函数和矩阵的正定性及判断准则,各种形式的芭芭拉定理,以及部分微分几何基础知识。

第 3 章主要介绍李雅普诺夫基本理论,首先给出各种稳定性定义,如李雅普诺夫意义下的稳定性、渐近稳定性、指数稳定性等,然后介绍李雅普诺夫稳定性定理,包括局部与全局稳定性定理,以及拉塞尔不变性原理等,最后介绍李雅普诺夫候选函数的选择方法。

第 4 章描述当系统模型完全已知时,非线性控制系统的设计方法。主要内容包括非线性系统的精确线性化方法,针对一类非线性系统的反向递推设计方法以及线性滤波降阶设计方法等。

第 5 章介绍自适应控制的设计思想以及它对控制对象的基本要求。具体而言,该章首先介绍线性参数化条件,在此基础上,讨论当系统的不确定动态特性满足线性参数化条件时,自适应控制器的设计过程及其稳定性分析。然后,对于自适应控制中的参数辨识问题展开了讨论,给出了能够实现参数辨识的持续激励条件。最

后,以直流无刷电机系统为例,介绍如何将反向递推设计方法与自适应控制相结合来实现期望的控制目标。

第6章主要讨论滑模与鲁棒控制。在该章中,首先引入滑模控制的前提条件,即系统的不确定动态特性应该具有已知的上界函数。在这种情况下,可以设计一种具有切换机制的滑模算法来实现指数稳定的性能。但是,这种滑模控制方法存在抖振现象,很难在实际系统中得到应用。所以,在该章中,将牺牲滑模控制的部分性能,把它修改为两种鲁棒控制器,分别为高频率反馈鲁棒控制和高增益反馈鲁棒控制。然后从实际应用的角度出发,对于鲁棒控制系统的饱和问题进行了简单讨论。最后,概要介绍近年来将鲁棒控制与自适应控制相结合的两类控制方法,即自适应鲁棒控制与鲁棒自适应控制。

第7章主要讨论学习控制,重点对重复学习控制进行介绍。具体内容包括重复学习控制的意义和前提条件,重复学习控制算法及其性能分析,带有饱和环节的重复学习控制策略,以及周期未知的重复学习控制算法设计等。

第8章主要讨论针对机器人系统,如何选择合适的控制算法来实现具体的控制目标。具体而言,该章首先对机器人对象的动态特性进行分析,在此基础上,针对机器人参数未知的情况,设计一种标准的自适应控制器来实现机器人末端位置与姿态的渐近收敛。为了提高系统的实时性,介绍如何对这种自适应控制系统进行改进,实现基于目标轨迹(DCAL)的机器人自适应控制。最后,针对只包含位移传感器的机器人对象,设计一种带有非线性观测器的输出反馈控制系统,使机器人手臂能够渐近地稳定到目标位置与姿态。

第9章主要讨论对于具有欠驱动特性的桥式吊车,如何通过基于能量的分析方法来构造非线性控制器,以实现台车的准确定位与负载的微摆操作。首先建立吊车系统的数学模型,并对其具有的性质进行分析。在此基础上,考虑到桥式吊车欠驱动的特点,构造一种基于能量分析的非线性控制系统,并提供实验结果来验证系统的控制性能。此外,考虑到吊车运行过程中,受到空气阻力、风力、摩擦力等多种干扰的影响,最后设计一种吊车系统的抗干扰算法,以提高系统的控制精度。

第10章介绍对于开环不稳定的磁悬浮系统,如何设计非线性控制器来实现期望的性能。首先对磁悬浮系统的分类及其意义进行简单介绍,然后针对其中的磁轴承系统,利用反步法设计一种非线性控制器,实现磁轴承零稳态功率损失操作。对于磁悬浮列车系统,介绍一种包含饱和环节的重复学习控制算法,在具有未知周期干扰情况下,使磁悬浮列车这类单向控制系统实现渐近稳定,并通过实验结果验证系统的良好性能。

## 习题

1. 请说明非线性系统与线性系统的本质区别。
2. 请举出五种常见的非线性特性。

3. 试比较相平面分析法、描述函数法以及李雅普诺夫分析方法的优缺点及其适用范围。

4. 已知某非线性系统的动态特性如下

$$\dot{x} = -x + x^3$$

试求出系统的所有平衡点并简略分析其稳定性。

5. 对于如下的非线性系统

$$\dot{x} = -x + x^2$$

请用 MATLAB 仿真其在初始条件分别为  $x_0=0.5$  和  $x_0=2$  时的响应曲线。

6. 对于如下动态系统

$$\dot{x} = [x - \sin(x)]u$$

设计非线性控制器为

$$u = -x[x - \sin(x)]$$

试用 MATLAB 仿真闭环系统在初始条件  $x_0=1$  下的响应特性。

## 参 考 文 献

1. 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京: 科学出版社, 1988
2. 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用. 北京: 国防工业出版社, 2002
3. 冯纯伯等. 非线性控制系统分析与设计(第二版). 北京: 电子工业出版社, 1998
4. 王丰尧. 滑模变结构控制. 北京: 机械工业出版社, 1998
5. 戴先中. 自动化科学与技术科学的内容、地位与体系. 北京: 高等教育出版社, 2003
6. 国家自然科学基金委员会. 自动化科学与技术. 北京: 科学出版社, 1995
7. Slotine J and Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Clis, New Jersey: Prentice Hall, 1991
8. Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovi P. Nonlinear and Adaptive Control Design, New York, NY: John Wiley Sons, 1995
9. Dawson D, Hu J and Burg T. Nonlinear Control of Electric Machinery. New York: Marcel Dekker, 1998
10. Dixon W, Dawson D, Behal A and Nagarkatti S. Nonlinear Control of Engineering Systems: A Lyapunov-Based Approach. Boston: Birkhauser, 2003
11. Queiroz M de, etc. Lyapunov-Based Control of Mechanical Systems. Boston: Birkhauser, 2000
12. Khalil H K. Nonlinear Systems(3rd edition). New Jersey: Prentice-Hall, 2002
13. Marino R, Tomei P. Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust. London: Prentice-Hall, 1995
14. Alberto Isidori. Nonlinear Control Systems II. London: Springer, 1999



## 2.1 范数及其性质

在几何学中,通常用长度来描述线段的长短。对于向量空间  $R^n$  中的任意一点  $x=[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \in R^n$ ,显然存在唯一的矢量与之相对应。对于该矢量,可以参照几何学中长度的概念,定义范数来作为向量  $x$  的一种度量<sup>[1,2]</sup>,并用它来描述该向量的整体大小。

**定义 2.1(范数)** 对于向量空间  $R^n$  中任意一点  $x \in R^n$ ,如果存在映射  $\rho(x):R^n \rightarrow R^+$  满足如下条件:

(1) 正定性,即  $\rho(x) \geq 0$ ,且  $\rho(x)=0$  当且仅当  $x=0$  时成立,其中,  $0 \in R^n$  表示该向量空间中的零向量;

(2) 齐次性,即对任意实数  $\alpha \in R$ ,有  $\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$ ;

(3) 三角不等式,即对任意  $y \in R^n$ ,有  $\rho(x+y) \leq \rho(x)+\rho(y)$ 。

则将映射  $\rho(x)$  称为  $x$  的范数,一般简记为  $\|x\|$ 。

**例 2.1** 在一维实数空间上,试判断绝对值函数  $|x|$  和平方函数  $x^2$  是否为该空间上的范数。

**解** 对于一维实数空间而言,容易验证  $|x|$  满足定义 2.1 中的正定性、齐次性、三角不等式三个条件,因此它是该空间上的范数。反之,  $x^2$  尽管满足正定性的要求,但是由于齐次性与三角不等式不成立,因此,它不是该空间上的范数。 ■

显然,对于向量空间  $R^n$  而言,它可以定义无穷多种范数。事实上,如果映射  $\rho(x)$  是该空间上的一种范数,不难证明,对于映射  $k\rho(x)$  而言,其中  $k \in R^+$  为正实数,它同时满足正定性、齐次性与三角不等式条件,因此该映射  $k\rho(x)$  定义了空间  $R^n$  上的另外一种范数。既然对于同一个向量空间,存在有无穷多种不同的范数,那么这些范数之间到底存在什么关系呢? 当我们分析该空间中某个向量的属性时,采用不同的范数是否会得到不同的结论? 实际上,在有限维复空间  $C^n$  中,所有不同的范数之间是等价的。

**定理 2.1(范数等价性定理)**  $n$  维复空间  $C^n$  中的两种范数  $\|\cdot\|_m$  和  $\|\cdot\|_k$  之间具有以下等价关系

$$\alpha \|x\|_m \leq \|x\|_k \leq \beta \|x\|_m, \quad \forall x \in C^n$$

其中,  $\alpha, \beta \in R^+$  代表正的常数。

**证明** 对于该定理的证明, 请参见本章参考文献[2]。

上述范数等价性定理给我们分析信号的性质带来了极大的方便。例如, 在设计和分析控制系统时, 通常需要讨论信号是否有界并要分析其收敛性。根据等价性定理容易看出, 一旦对于某种特定的范数, 证明了信号是有界或者收敛的, 那么对于其他任意一种范数, 结论同样成立。因此, 在设计和分析控制系统时, 只需要选择最为方便的一种范数来进行讨论即可。在控制系统中, 经常使用的主要有 2-范数  $\|\cdot\|_2$  和  $\infty$ -范数  $\|\cdot\|_\infty$  两种, 下面给出其具体定义。

**定义 2.2(2-范数)** 对于定义在时间域  $[0, \infty)$  上的函数  $f(t) \in R$ , 其 2-范数定义为

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty f^2(\tau) d\tau}$$

如果  $\|f\|_2 < \infty$ , 则称函数  $f(t)$  是平方可积的, 或者  $f(t)$  属于  $L_2$  空间, 即  $f(t) \in L_2$ 。

**定义 2.3( $\infty$ -范数)** 对于定义在时间域  $[0, \infty)$  上的函数  $f(t) \in R$ , 其  $\infty$ -范数定义为

$$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$$

如果  $\|f\|_\infty < \infty$ , 则称函数  $f(t)$  是有界的, 或者  $f(t)$  属于  $L_\infty$  空间, 即  $f(t) \in L_\infty$ 。

**例 2.2** 对于如下函数

$$f(t) = \frac{1}{t+1}, \quad t \in [0, \infty)$$

可以计算得到其 2-范数为

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \frac{1}{(\tau+1)^2} d\tau} = 1$$

因此,  $f(t) \in L_2$ 。由于函数  $f(t)$  是单调递减的, 它的  $\infty$ -范数为

$$\|f\|_\infty = 1$$

所以,  $f(t) \in L_\infty$ 。 ■

**定义 2.4( $k$ -范数)** 对于定义在时间域  $[0, \infty)$  上的函数  $f(t) \in R$ , 其  $k$ -范数定义为

$$\|f\|_k = \sqrt[k]{\int_0^\infty f^k(\tau) d\tau}$$

考虑到范数的等价性特性, 我们在分析与设计控制系统时, 通常采用具有明确的物理意义的两种范数, 即 2-范数  $\|\cdot\|_2$  和  $\infty$ -范数  $\|\cdot\|_\infty$ 。

在分析控制系统的性能时, 除了向量的范数之外, 还经常需要利用线性映射或者矩阵的范数。在数学上, 通常根据与其维数相对应的向量的范数来定义线性映射或者矩阵的范数, 并将这种范数称为诱导范数。

**定义 2.5(线性映射或矩阵的诱导范数)** 对于线性映射  $A: R^n \rightarrow R^n$ , 其诱导范数定义为

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \left( \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$$

或者等价地定义为

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

## 2.2 函数的连续性

在设计控制系统时,通常要求控制器以及闭环系统中的状态变量都是连续变化的,为此,需要对信号的连续性以及判别准则给出严格的数学描述。

**定义 2.6(连续性)** 若对于任意正数  $\epsilon \in R^+$ , 存在与之相对应的正数  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) \in R^+$ , 使得当  $|t - t_0| \leq \delta$  时, 有

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon$$

则称函数  $f(t)$  在点  $t_0$  连续。若函数  $f(t)$  在区间  $I$  上任意一点都连续, 则称  $f(t)$  为区间  $I$  上的连续函数。

**定义 2.7(一致连续性)** 对于定义在区间  $I$  上的函数  $f(t)$ , 若对于任意正数  $\epsilon \in R^+$ , 存在正数  $\delta = \delta(\epsilon) \in R^+$ , 使得当  $t_1, t_2 \in I$  且  $|t_1 - t_2| \leq \delta$  时, 有

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \epsilon \quad (2.1)$$

则称函数  $f(t)$  在区间  $I$  上一致连续。

根据上述定义可以看出, 函数在区间上连续与一致连续在概念上具有非常重要的区别。函数  $f(t)$  在区间  $I$  上连续是指对于区间上任意一点  $t \in I$  都满足连续性的定义, 即对于任意正数  $\epsilon \in R^+$ , 总可以找到相应的正数  $\delta(\epsilon, t) \in R^+$ , 只要  $\bar{t} \in I$  且  $|t - \bar{t}| \leq \delta$ , 就有  $|f(t) - f(\bar{t})| \leq \epsilon$ 。需要指出的是, 一般来说, 正数  $\delta$  既依赖于  $\epsilon$ , 又与当前所讨论的点  $t$  有关。因此, 对于区间  $I$  上不同的点, 就分别存在不同的  $\delta$  与之相对应。进一步, 如果能找到一个公共的  $\delta$ , 使之对于区间  $I$  上所有的点都满足连续性的要求(在这种情况下, 正数  $\delta$  只依赖于  $\epsilon$ , 而与区间  $I$  上具体点的选择无关), 这时我们说函数  $f(t)$  在区间  $I$  上是一致连续的。因此, 一致连续反映了函数在区间上的整体性质, 而区间上的连续则表明了函数在该区间上逐点的局部性质<sup>[3,4]</sup>。如果一个函数在区间上是一致连续的, 则它必定在该区间上连续。反之则不一定成立。

**例 2.3** 证明函数  $f(t) = \frac{1}{t}, t > 0$  在定义域上连续但非一致连续。

**证明** 连续性分析: 对于定义域上任意一点  $t_1 > 0$ , 对于  $\forall \epsilon \in R^+$ , 取  $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon t_1^2}{2}, \frac{t_1}{2}\right\} > 0$ , 则对于  $\forall t > 0$  且  $|t - t_1| < \delta$ , 有  $t > \frac{t_1}{2}$ , 因此

$$\left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t} \right| = \frac{|t - t_1|}{|t t_1|} \leq \frac{2\delta}{t_1^2} \leq \epsilon$$

所以, 函数  $f(t)$  在区间  $(0, +\infty)$  上连续。

一致连续性分析: 为了证明  $f(t)$  在区间  $(0, +\infty)$  上不是一致连续的, 需要找到某个确定的正数  $\epsilon_0$ , 并证明对于任意  $\delta \in R^+$ , 原定义中的式(2.1)不成立。为此, 取

正数  $\varepsilon_0 = 1$ , 则对任意的正数  $\delta$ , 选择  $t_1 = \min\{\delta, 1\}$  和  $t_2 = \frac{t_1}{2}$ , 则有

$$|t_1 - t_2| = \frac{t_1}{2} \leq \frac{\delta}{2} < \delta$$

但是

$$\left| \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right| = \frac{1}{t_1} > 1$$

所以, 函数  $f(t)$  在区间  $(0, +\infty)$  上不是一致连续的。■

对于闭区间上的连续函数而言, 在闭区间上的点点连续等价于该区间上的一致连续, 即存在如下的一致连续性定理。

**定理 2.2 (一致连续性定理)** 若函数  $f(\cdot)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则它在该区间上一致连续。该定理通常也称为康托尔定理 (Cantor 定理)。

**证明** 一致连续性定理是实数完备性理论体系中的六大定理之一, 可以通过其他五个定理来进行论证, 具体证明过程见本章参考文献[3, 4]。

应用定义来判断函数的一致连续性需要进行较为复杂的分析, 因此直接利用它来分析信号的连续性具有一定的困难。在本书中, 当讨论控制系统中信号的连续性时, 我们更多地采用以下的一致连续性判别定理来进行分析。

**定理 2.3 (一致连续性判别定理)** 若函数  $f(t)$  在区间  $I$  上可导且其导函数  $f'(t)$  有界, 则该函数在区间  $I$  上一致连续。

**证明** 由于  $f'(t)$  在区间  $I$  上有界, 不妨设

$$|f'(t)| \leq \alpha, \quad \forall t \in I \quad (2.2)$$

其中,  $\alpha \in R^+$  为正的常数。对于  $\forall \varepsilon \in R^+$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ , 则对于任意  $t_1, t_2 \in I$  且  $|t_1 - t_2| \leq \delta$ ,

运用拉格朗日中值定理可以得到

$$|f(t_1) - f(t_2)| = |f'(\xi)| |t_1 - t_2|$$

其中,  $\xi \in (t_1, t_2) \subseteq I$ 。利用式(2.2)将上式放缩后得到

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \alpha |t_1 - t_2| \leq \alpha \delta = \varepsilon$$

所以, 函数  $f(t)$  在区间  $I$  上一致连续。

**定义 2.8 (分段连续)** 若函数  $f(t)$  在区间  $[a, b]$  上仅有有限个可去间断点和跳跃间断点 (注意函数在这些间断点上的左右极限都存在), 则称函数  $f(t)$  在  $[a, b]$  上分段连续。

## 2.3 函数的正定性分析

李雅普诺夫方法通过分析系统的能量来判断系统的稳定性, 为此, 需要预先构造一个类似于能量表达式的非负函数并分析其随时间变化的规律。为了保证系统的稳定性, 通常要求该函数在时间轴上单调递减, 因此要求它关于时间的导数为非正函数。为了对此进行判别, 需要研究函数的正定性。在本节中, 将讨论函数正定

性的定义和常见的判别方法。

**定义 2.9(正定函数)** 对于定义在  $n$  维向量空间上的任意函数  $V(\mathbf{x}):R^n \rightarrow R$ , 如果满足如下条件

- (1)  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ;
- (2) 当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  时,  $V(\mathbf{x}) = 0$  成立;

则称函数  $V(\mathbf{x})$  为正定函数。如果上述条件只在某个包含零点的域  $\mathbf{x} \in B_R \subseteq R^n$  时成立, 则称函数  $V(\mathbf{x})$  为域  $B_R$  上的局部正定函数。

**定义 2.10(半正定函数)** 如果函数  $V(\mathbf{x}):R^n \rightarrow R$  满足如下条件

- (1)  $V(\mathbf{x}) \geq 0$ ;
- (2) 存在非零向量  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ , 使得  $V(\mathbf{x}_0) = 0$ ;

则称函数  $V(\mathbf{x})$  为半正定函数。如果上述条件只在某个包含零点的域  $\mathbf{x} \in B_R \subseteq R^n$  时成立, 则称函数  $V(\mathbf{x})$  为域  $B_R$  上的局部半正定函数。

**定义 2.11(负定函数)** 如果  $-V(\mathbf{x})$  为正定函数, 则称函数  $V(\mathbf{x})$  为负定函数。如果  $-V(\mathbf{x})$  为域  $B_R$  上的局部正定函数, 则称函数  $V(\mathbf{x})$  为域  $B_R$  上的局部负定函数。

**定义 2.12(半负定函数)** 如果  $-V(\mathbf{x})$  为半正定函数, 则称函数  $V(\mathbf{x})$  为半负定函数。如果  $-V(\mathbf{x})$  为域  $B_R$  上的局部半正定函数, 则称函数  $V(\mathbf{x})$  为域  $B_R$  上的局部半负定函数。

在设计与分析控制系统时, 通常需要判别二次型函数, 以及与之相对应的对称矩阵的正定性, 以下给出方阵的正定性定义及其常用的判别准则。

**定义 2.13(对称方阵的正定性)** 如果二次型函数  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  是正定函数, 且方阵  $\mathbf{A}$  对称, 则称  $\mathbf{A}$  为正定对称矩阵。

**定理 2.4** 实系数对称方阵  $\mathbf{A}$  正定的充分必要条件是其特征值都大于零。

**定理 2.5** 实系数对称方阵  $\mathbf{A}$  正定的充分必要条件是顺序主子式都大于零。

定理 2.4 和定理 2.5 的具体证明请参考线性代数或者矩阵论的教材<sup>[1]</sup>。

**定理 2.6** 实系数对称方阵  $\mathbf{A}$  正定的充分必要条件是存在可逆方阵  $\mathbf{Q}$ , 使得  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ 。

**证明** 充分性: 对于任意向量  $\mathbf{x} \in R^n$ , 由方阵  $\mathbf{A}$  可以得到如下的二次型函数

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

将  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$  代入上式并整理后得到

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{Q}\mathbf{x})^T \mathbf{Q}\mathbf{x} \geq 0$$

显然, 对于以上不等式, 当且仅当  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  时, 等号成立。另一方面, 由于  $\mathbf{Q}$  为可逆方阵, 因此  $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  存在唯一解:  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。综上所述, 当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  时,  $f(\mathbf{x}) = 0$ 。所以  $\mathbf{A}$  为正定矩阵。

必要性: 从略, 留给读者自行练习。

**例 2.4** 对于如下函数, 请判别其正定性。

- (1) 函数  $V_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$
- (2) 函数  $V_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$

(3) 函数  $V_3(x_1, x_2) = 1 - \cos x_1 + x_2^2$

(4) 函数  $V_4(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

**解** 对于各个函数正定性的分析如下。

(1) 经过配方可以将  $V_1(\bullet)$  改写为

$$V_1(x_1, x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \geq 0$$

只有当  $[x_1 \ x_2] = [0 \ 0]$  时, 才有  $V_1(x_1, x_2) = 0$ , 因此,  $V_1(x_1, x_2)$  是正定函数。

(2) 显然  $V_2(\bullet) \geq 0$ , 而且  $V_2(0, 0, x_3) = 0$ , 对于任意  $x_3 \in R$  均成立, 所以  $V_2(x_1, x_2, x_3)$  是半正定函数。

(3) 显然,  $V_3(\bullet) \geq 0$ , 且  $V_3(2k\pi, 0) = 0$ , 其中  $k$  为整数。因此, 如果从全局性质考虑,  $V_3(x_1, x_2)$  是半正定函数。但是, 如果考虑区间  $(-2\pi, 2\pi) \times R$ , 则  $V_3(x_1, x_2)$  为该区间上的局部正定函数。

(4) 将函数  $V_4(x_1, x_2)$  改写成如下二次型形式

$$V_4(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

其中, 对称方阵  $\mathbf{P}$  的具体形式如下

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

经过计算可以得知, 矩阵  $\mathbf{P}$  的所有顺序主子式都为正, 因此,  $\mathbf{P}$  为正定矩阵, 函数  $V_4(x_1, x_2)$  是正定函数。■

**定义 2.14 (K 类函数)** 对于定义在非负实数域上的函数  $f(x)$ , 如果它是连续和严格递增的, 且  $f(0) = 0$ , 则称函数  $f(x)$  为 K 类函数。

**定义 2.15 (KR 类函数)** 对于定义在非负实数域上的 K 类函数  $f(x)$ , 如果当自变量  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow \infty$ , 则称函数  $f(x)$  为 KR 类函数。

**例 2.5** 试判别下列函数是否为 K 类函数和 KR 类函数。

(1) 定义在非负实数域上的函数  $\arctan x$ ;

(2) 定义在非负实数域上的函数  $f(x) = 2x + \sin x$ 。

**解** 对于各个函数的分析如下。

(1) 由于  $\arctan 0 = 0$ , 且  $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} > 0$ , 因此  $\arctan x$  函数单调递增,

$\arctan x$  为 K 类函数; 但是由于  $\arctan x < \frac{\pi}{2}$ , 因此它不是 KR 类函数。

(2) 显然,  $f(0) = 0$ , 且  $f'(x) = 2 + \cos x > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, 因此它是 K 类函数; 进一步容易看出, 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x) \rightarrow \infty$ , 所以  $f(x)$  是 KR 类函数。■

## 2.4 信号分析基本定理

在这一节中, 将介绍非线性系统设计与分析中经常用到的几个基本定理, 例如芭芭拉定理及其推论等<sup>[5,6]</sup>, 为以后学习和分析自适应控制等方法奠定理论基础。

**定理 2.7(指数衰减定理)** 如果函数  $V(t):R^+ \rightarrow R^+ \geq 0$ , 且满足如下不等式

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t) \quad (2.3)$$

其中,  $\gamma \in R^+$  是一个正的常数, 那么  $V(t)$  以指数方式收敛于零, 即

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}$$

**证明** 定义辅助信号为

$$g(t) = \dot{V}(t) + \gamma V(t)$$

对上述微分方程求解得

$$V(t) = V(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

由不等式(2.3)容易得知  $g(t) \leq 0$ , 因此

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g(\tau) d\tau \leq 0$$

所以式(2.4)可以进行如下放缩

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t}$$

**定理 2.8(有界性定理)** 如果函数  $V(t):R^+ \rightarrow R^+ \geq 0$ , 且满足如下不等式

$$\dot{V}(t) \leq -\gamma V(t) + \varepsilon \quad (2.5)$$

其中,  $\gamma, \varepsilon \in R^+$  代表正的常数, 那么  $V(t)$  满足以下不等式

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} + \frac{\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

**证明** 定义辅助信号为

$$g(t) = \dot{V}(t) + \gamma V(t) - \varepsilon$$

对上述微分方程求解得

$$V(t) = V(0)e^{-\gamma t} + \frac{\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

由不等式(2.5)容易得知  $g(t) \leq 0$ , 因此

$$\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} g(\tau) d\tau \leq 0$$

所以式(2.6)可以进行如下放缩

$$V(t) \leq V(0)e^{-\gamma t} + \frac{\varepsilon}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$$

**定理 2.9(正定矩阵的上下界)** 实数方阵  $A \in R^{n \times n}$  正定对称, 则对于任意  $x \in R^n$ , 有

$$\lambda_{\min}(A)x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)x^T x$$

其中,  $\lambda_{\min}(A) > 0$  和  $\lambda_{\max}(A) > 0$  分别表示方阵  $A$  的最小与最大特征值。

**证明** 请参考矩阵论方面的专著和教材<sup>[7,8]</sup>。

**定理 2.10(非线性衰减定理)** 对于如下函数

$$N_d(x, y) = \Omega(x)xy - k_n \Omega^2(x)x^2 \quad (2.7)$$

其中,  $k_n$  为正的常数,  $\Omega(x)$  为任意与  $y$  无关的函数, 则  $N_d(x, y)$  存在上界函数