

3.1 概述

本章介绍自校正控制器所针对的被控对象的数学模型是参数未知的离散时间随机线性输入输出模型,自校正控制器由参数可调的控制器和自适应控制律组成,其中自适应控制律由模型参数辨识和控制器参数设计组成,其结构如图 3.1.1 所示。

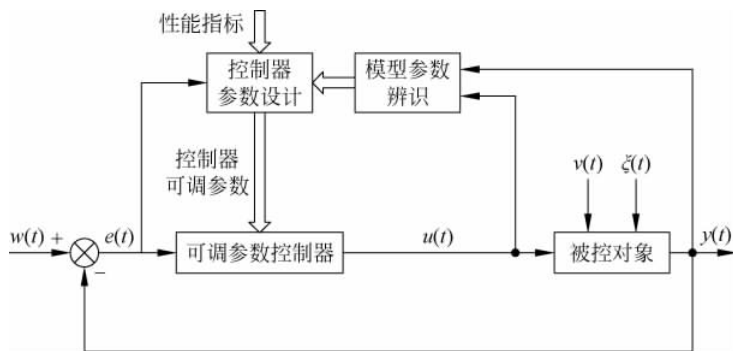


图 3.1.1 自校正控制器结构

模型参数辨识采用被控对象的输入、输出信号辨识模型参数,控制器参数设计使用模型参数的估计值,根据控制器的性能指标,在线计算控制器参数,作为可调整控制器的参数。

自校正控制器使用输入输出数据在线辨识被控对象模型的未知参数,或者可调整控制器的参数,应用参数估计值去调整控制器的参数,从而适应被控对象的不确定性,使被控对象的输出尽可能好地去跟踪理想输出。

不同的辨识算法和不同的控制策略将组成各种自校正控制算法,只有适当的辨识算法和合适的控制策略的结合才能产生既便于在线实施又具有稳定性的自校正控制算法。因此,如何选择控制策略和辨识算法,如何将其有机结合起来是自校正控制的关键问题之一。目前提出了多种自适应控制方案,如自校正调节器^[1,2]、自校正控制器^[3]、自校正前馈控制器^[4]、极点配置自校正控制器^[5]、零极点配置自校正控制器^[6]、广义预测自校正

控制器^[7,8]等。上面介绍的自校正控制算法都采用受控自回归滑动平均模型(CARMA),即输入输出模型,如果采用状态空间模型也可以得到类似的自校正控制算法。由于基于CARMA模型的自校正控制算法简单,应用广泛,所以本章主要介绍几种基于CARMA模型的自校正控制算法。

从自校正控制算法所采用的控制策略来分类,自校正控制器可分为基于最优控制策略的自校正控制器(如最小方差、广义最小方差自校正控制器)、基于经典控制策略的自校正控制器(如零极点配置自校正控制器)和基于最优控制策略与经典控制策略相结合的自校正控制器(如具有极点配置的广义自校正控制器)三类。从自校正控制算法的实现方式来分类,有隐式(直接)和显式(间接)自校正控制算法两类,隐式算法是直接辨识控制器参数,显式算法则首先辨识被控对象的模型参数,然后采用模型参数估计值计算控制器的参数。隐式算法与显式算法相比,由于省去了控制器参数计算这一步,从而可以避免求解矩阵方程,使算法的鲁棒性提高;但当被控对象的时延大时,显式算法可减少辨识参数个数,且容易将保证算法稳定的条件与被控对象的模型参数联系起来。

3.2 自校正调节器

由于参数可调控制器是自校正控制的基础,该控制器可以由以模型参数已知的被控对象模型作为控制器的设计模型而获得,本节介绍的自校正调节器与自校正控制器的参数可调控制器是最小方差调节器和最小方差控制器,为此首先介绍当被控对象模型已知时的最小方差调节器和最小方差控制器设计。

3.2.1 最小方差调节器和最小方差控制器设计

1. 控制问题描述

考虑如下单输入单输出的被控对象

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.1)$$

式中, $y(k)$ 、 $u(k)$ 和 $\xi(k)$ 分别为被控对象的输出、输入和白噪声; z^{-1} 为后移算子; $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 为 z^{-1} 的多项式; d 为被控对象时延,并且 $d \geq 1$ 。

多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 可以表示为

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A} \quad (3.2.2)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B} \quad (3.2.3)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_{n_C} z^{-n_C} \quad (3.2.4)$$

$\xi(k)$ 为独立的随机噪声,满足

$$E[\xi(k)] = 0 \quad (3.2.5)$$

$$E[\xi(i)\xi(j)] = \begin{cases} \sigma^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.2.6)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty \quad (3.2.7)$$

式(3.2.5)~式(3.2.7)表示随机噪声的均值为零,方差为有限正值,方差的采样均方值有界。 $B(z^{-1})$ 为稳定多项式,即被控对象为最小相位。 $C(z^{-1})$ 为稳定多项式,即 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的根全部在 z 平面单位圆内,或当 $|z| \geq 1$ 时, $B(z^{-1}) \neq 0$, $C(z^{-1}) \neq 0$ 。

控制目标是,针对被控对象的数学模型式(3.2.1),设计最小方差调节器和最小方差控制器,使得被控对象 $(k+d)$ 时刻的输出 $y(k+d)$ 与理想输出 $y^*(k+d)$ 的误差的方差极小,即

$$\min J$$

其中

$$J = E\{[y(k+d) - y^*(k+d)]^2\} \quad (3.2.8)$$

式中, $y^*(k+d)$ 为 $(k+d)$ 时刻的理想输出,表示为

$$y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k) \quad (3.2.9)$$

式中, $w(k)$ 为有界参考输入, $R(z^{-1})$ 为加权多项式,也可将其理解为参考模型,这样 $y^*(k+d)$ 可以看成参考模型输出。

对于调节问题,参考输入 $w(k) \equiv 0$,即理想输出 $y^*(k+d) \equiv 0$,即最小方差调节器的性能指标为

$$\min J$$

其中

$$J = E[y^2(k+d)] \quad (3.2.10)$$

由模型式(3.2.1)知被控对象输出 $y(k)$ 是一随机过程,如果将理想输出 $y^*(k+d)$ 看成是被控对象输出 $y(k+d)$ 的均值,那么性能指标式(3.2.8)就表示被控对象输出 $y(k+d)$ 与理想输出 $y^*(k+d)$ 的误差的方差,显然使式(3.2.8)极小的最优控制就能使 $(k+d)$ 时刻被控对象输出 $y(k+d)$ 与理想输出 $y^*(k+d)$ 之间的误差的方差最小。

2. 最小方差调节器和最小方差控制器

1) 最优预报

如果能找到被控对象输出 $y(k+d)$ 的最小方差预报 $y^*(k+d|k)$,那么只要令最小方差预报 $y^*(k+d|k)$ 等于理想输出 $y^*(k+d)$ 就可以求出最优控制 $u(k)$ 。因为这样的 $u(k)$ 可以使 $y(k+d) - y^*(k+d|k)$ 的方差最小,又因 $y^*(k+d|k) = y^*(k+d)$,所以这样的 $u(k)$ 也使 $y(k+d) - y^*(k+d)$ 的方差最小。

最小方差调节律应该为

$$y^*(k+d|k) = 0 \quad (3.2.11)$$

从上述分析中可看出,要求使式(3.2.8)极小的最优控制,必须首先求 $(k+d)$ 时刻输出 $y(k+d)$ 的最优预报 $y^*(k+d|k)$ 。

$y(k+d)$ 的最优预报 $y^*(k+d|k)$ 应该满足如下条件:

(1) 具有最优性,即使预报误差 $\bar{e}(k+d) = y(k+d) - y^*(k+d|k)$ 的方差最小,即

$$\min J_1$$

$$J_1 = E\{[y(k+d) - y^*(k+d|k)]^2\} \quad (3.2.12)$$

(2) 具有可实现性,即应该是 k 时刻和 k 以前时刻 $(k-1, k-2, \dots)$ 的输入输出数据的线性组合。

为此需要将对象模型式(3.2.1)的 $(k+d)$ 时刻的输出表示成最优预报加上预报误差的形式。

引入 Diophantine 方程

$$C(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) \quad (3.2.13)$$

上式中引入 z^{-d} 项可使 $F(z^{-1})$ 的阶次为 $d-1$, 这样可将 $(k+d)$ 时刻的输出 $y(k+d)$ 化成由 $y(k), y(k-1), \dots, u(k), u(k-1), \dots$ 组成的一项和由噪声 $\xi(k+d), \xi(k+d-1), \dots, \xi(k+1)$ 组成的另一项之和, 因这两项不相关, 故可求出 $y(k+d)$ 的最优预报。

方程式(3.2.13)对 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 有解的充要条件是 $A(z^{-1})$ 和 z^{-d} 互质, 显然 $A(z^{-1})$ 和 z^{-d} 互质, 故式(3.2.13)一定有解。确定 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的阶次 n_F 和 n_G 的方法是根据方程两边 z^{-1} 的同次幂系数相等的原则建立一组线性方程, 若 $C(z^{-1})$ 和 $A(z^{-1})$ 的系数已知, $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的系数未知, 则方程组中未知数的个数为 $n_F + n_G + 2$, 且方程式个数为 $n_C + 1$ 或 $n_F + n_A + 1$ 或 $n_G + d + 1$ 。要使式(3.2.13)有唯一解的条件是方程个数等于未知数个数, 即

$$n_F + n_G + 2 = n_G + d + 1 \quad (3.2.14)$$

$$n_F + n_G + 2 = n_F + n_A + 1 \quad (3.2.15)$$

$$n_F + n_G + 2 = n_C + 1 \quad (3.2.16)$$

由上式可确定 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的阶次

$$n_F = d - 1, \quad n_G = \max\{n_A - 1, n_C - d\} \quad (3.2.17)$$

下面求最优预报 $y^*(k+d|k)$, 用 $F(z^{-1})$ 乘式(3.2.1)两边得

$$F(z^{-1})A(z^{-1})y(k+d) = F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) + F(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.2.18)$$

利用式(3.2.13), 上式变为

$$C(z^{-1})y(k+d) = G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})F(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.2.19)$$

或

$$y(k+d) = \frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})} + F(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.2.20)$$

上式左边是 $(k+d)$ 时刻的输出, 右边第一项如果看成是预报, 那么右边第二项就可

以看成是预报误差。

将式(3.2.20)代入预报性能指标式(3.2.12)有

$$\begin{aligned} J_1 &= E\{[y(k+d) - y^*(k+d | k)]^2\} \\ &= E\left\{\left[\frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})} + F(z^{-1})\xi(k+d) - y^*(k+d | k)\right]^2\right\} \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

因为 $\frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})}$ 是 $y(k), y(k-1), \dots$ 以及 $u(k-1), u(k-2), \dots$ 的线性组合, $F(z^{-1})\xi(k+d)$ 是 $\xi(k+d), \xi(k+d-1), \dots, \xi(k+1)$ 的线性组合, 这两项互不相关, 因此式(3.2.21)可以写成

$$\begin{aligned} J_1 &= E\left\{\left[\frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})} - y^*(k+d | k)\right]^2\right\} \\ &\quad + E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} \\ &\geq E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

显然只有当预报值取

$$y^*(k+d | k) = \frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})} \quad (3.2.23)$$

时, 性能指标式(3.2.21)才能达到最小值, 即

$$\min J_1 = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \quad (3.2.24)$$

式中, $\sigma^2 = E[\xi^2(k)]$, 见式(3.2.6)。

2) 最小方差控制律

下面根据最优预报来求最优控制律。

由式(3.2.20)和式(3.2.23)可知

$$y(k+d) = y^*(k+d | k) + F(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.2.25)$$

将式(3.2.25)代入式(3.2.8)

$$\begin{aligned} J &= E[y^*(k+d | k) - y^*(k+d) + F(z^{-1})\xi(k+d)]^2 \\ &= E[y^*(k+d | k) - y^*(k+d)]^2 + E[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2 \\ &\geq E[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

上式中第二项不含有 $u(k)$, 不可控, 欲使 J 最小必须使

$$y^*(k+d | k) = y^*(k+d) \quad (3.2.27)$$

这时性能指标式(3.2.8)的最小值为

$$\min J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \quad (3.2.28)$$

显然, 式(3.2.27)表明, 最优控制律可以通过使 $y(k+d)$ 的最优预报等于理想输出 $y^*(k+d)$ 得到。由式(3.2.23)可得最小方差控制律为

$$\frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})} = y^*(k+d) \quad (3.2.29)$$

即

$$G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) = C(z^{-1})R(z^{-1})w(k) \quad (3.2.30)$$

式中

$$H(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1}) = h_0 + h_1 z^{-1} + \cdots + h_{n_H} z^{-n_H}$$

对于最小方差调节器,理想输出 $y^*(k+d) \equiv 0$, 因而最优预报 $y^*(k+d|k) = 0$, 所以最小方差调节器为

$$G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) = 0 \quad (3.2.31)$$

即

$$G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) = 0 \quad (3.2.32)$$

图 3.2.1 给出了被控对象模型已知时的最小方差控制器的设计原理框图,控制目标是让被控对象输出与理想输出之间的误差的方差最小,从而确定了最小方差控制器的性能指标式(3.2.8)。通过求被控对象 $(k+d)$ 时刻的输出 $y(k+d)$ 的最优预报,使最优预报等于理想输出,使最小方差性能指标极小,求得最小方差控制器的结构和参数。

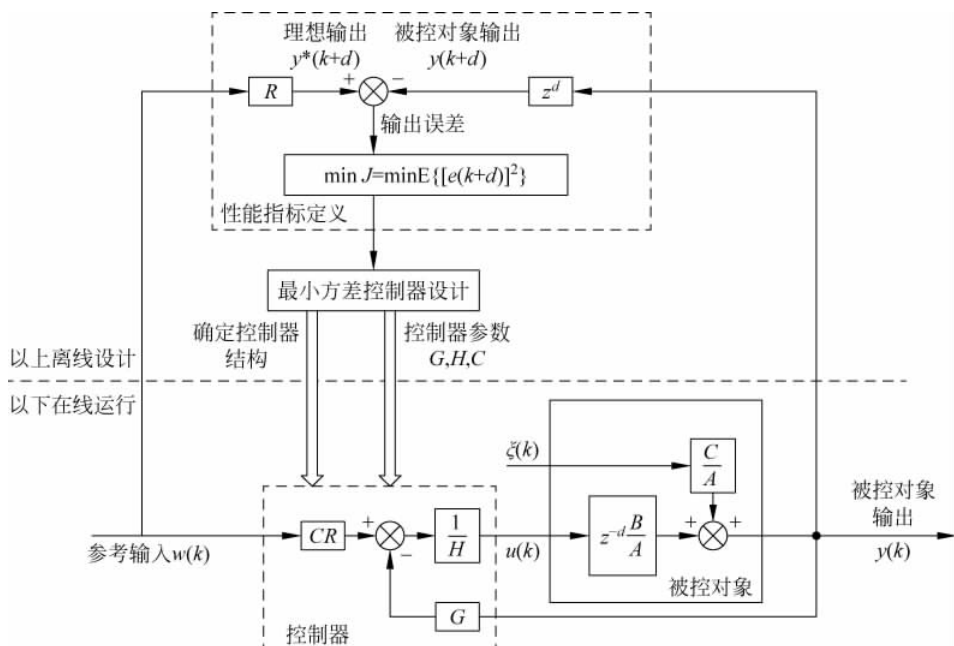


图 3.2.1 被控对象模型已知时的最小方差控制器的设计原理图

最小方差控制律与常规反馈控制器具有相同的结构,如图 3.2.1 所示。只不过最小方差控制器的输入项为 $C(z^{-1})R(z^{-1})$, 反馈项 $G(z^{-1})$ 和控制项 $H(z^{-1})$ 是预先由式(3.2.13)确定的。

例 3.2.1 最小方差调节律设计

被控对象的模型为

$$(1 - 1.6z^{-1} + 0.6z^{-2})y(k) = (1.5 - 0.53z^{-1} + 0.9z^{-2})u(k-1) \\ + (1 - 0.4z^{-1})\xi(k)$$

求最小方差调节律。

解 根据被控对象的模型可知

$$A(z^{-1}) = 1 - 1.6z^{-1} + 0.6z^{-2}, \quad B(z^{-1}) = 1.5 - 0.53z^{-1} + 0.9z^{-2}, \\ C(z^{-1}) = 1 - 0.4z^{-1}, \quad d = 1$$

参考式(3.2.13),引入 Diophantine 方程

$$1 - 0.4z^{-1} = (1 - 1.6z^{-1} + 0.6z^{-2})F(z^{-1}) + z^{-1}G(z^{-1})$$

要使得上述 Diophantine 方程有唯一解,多项式 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的阶次 n_F 和 n_G 分别取 $n_F = d - 1 = 0, n_G = \max\{n_A - 1, n_C - d\} = 1$, 求解 Diophantine 方程可得

$$F(z^{-1}) = 1, \quad G(z^{-1}) = 1.2 - 0.6z^{-1}$$

根据式(3.2.23)可知,最优预报为

$$y^*(k + d | k) = \frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})}$$

即

$$y^*(k + d | k) = (1.2 - 0.6z^{-1})y(k) + (1.5 - 0.53z^{-1} + 0.9z^{-2})u(k) \\ + 0.4y^*(k + d - 1 | k - 1)$$

最优预报的误差为

$$\bar{e}(k + d) = y(k + d) - y^*(k + d | k) = F(z^{-1})\xi(k + d) = \xi(k + d)$$

最优预报误差的方差为

$$J_{\min} = E\{[F(z^{-1})\xi(k + d)]^2\} = E[\xi^2(k)] = \sigma^2$$

由式(3.2.31)可知最小方差调节律为

$$G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) = 0$$

式中, $H(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1})$ 。这样 $H(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1}) = 1.5 - 0.53z^{-1} + 0.9z^{-2}, G(z^{-1}) = 1.2 - 0.6z^{-1}$, 最小方差调节律为

$$(1.5 - 0.53z^{-1} + 0.9z^{-2})u(k) + (1.2 - 0.6z^{-1})y(k) = 0$$

即

$$u(k) = \frac{1}{1.5}[0.53u(k-1) - 0.9u(k-2) - 1.2y(k) + 0.6y(k-1)]$$

3) 仿真实验

为了验证和比较本节最小方差调节律的有效性,我们进行下列的仿真实验。

例 3.2.2 最小方差调节器的仿真实验^[9]

被控对象模型为

$$(1 - 0.8z^{-1})y(k) = z^{-1}u(k) + (1 + 0.98z^{-1})\xi(k)$$

式中, $\xi(k)$ 为均值为 0、方差为 1 的独立随机噪声。

运行时间从 $k=1$ 到 $k=1200$, 在仿真过程的不同阶段采用不同的调节律。

(1) 在 $k=1$ 到 $k=399$ 期间, 被控对象处于开环状态, 即保持

$$u(k) \equiv 0$$

因此有

$$y(k+1) = 0.8y(k) + \xi(k) + 0.98\xi(k+1)$$

(2) 在 $k=400$ 到 $k=799$ 期间, 取非最小方差调节律

$$u(k) = -0.8y(k)$$

那么可得

$$y(k+1) = \xi(k) + 0.98\xi(k+1)$$

被控对象输出 y 的方差为 $\sigma_y = (1+0.98^2) \times 1 > 1$ 。

(3) 在 $k=800$ 到 $k=1200$ 期间, 采用最小方差调节律, 即

$$u(k) = -1.78y(k)$$

此时有

$$y(k+1) = \xi(k+1)$$

被控对象输出 y 的方差为 1。

为了考察和比较被控对象输出偏差的大小, 我们在仿真中定义

$$J_1(k) = \sum_{i=1}^k y^2(i)$$

由于随机信号的作用, $J_1(k)$ 的曲线表现为一条递增的近似直线, 显然, 其斜率越大, 说明被控对象输出的方差越大。

仿真结果如图 3.2.2 所示, 我们可以依次看到被控对象输出、控制输入以及被控对象输出偏差的平方和指标的变化情况。可以看出, 不施加控制作用时, 被控对象输出的偏差波动最大, 当采用最小方差调节律作用于被控对象时, 被控对象输出的方差达到最小, 仿真结果与前面的分析结果一致。

4) 性能分析

最小方差调节器和最小方差控制器必须要保证闭环系统的稳定性, 即被控对象的输入和输出是均方有界的, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.2.33)$$

并且使得性能指标式 (3.2.8) 达到最优, 即使被控对象的输出与理想输出之间的误差的方差达到极小, 即为

$$J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right)\sigma^2 \quad (3.2.34)$$

闭环系统的稳定性和最优性由定理 3.2.1 给出。

定理 3.2.1 如果被控对象模型式 (3.2.1) 满足下列条件:

(1) $B(z^{-1})$ 稳定, $C(z^{-1})$ 稳定, 且时延已知;

(2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \xi^2(k) < \infty$ 。

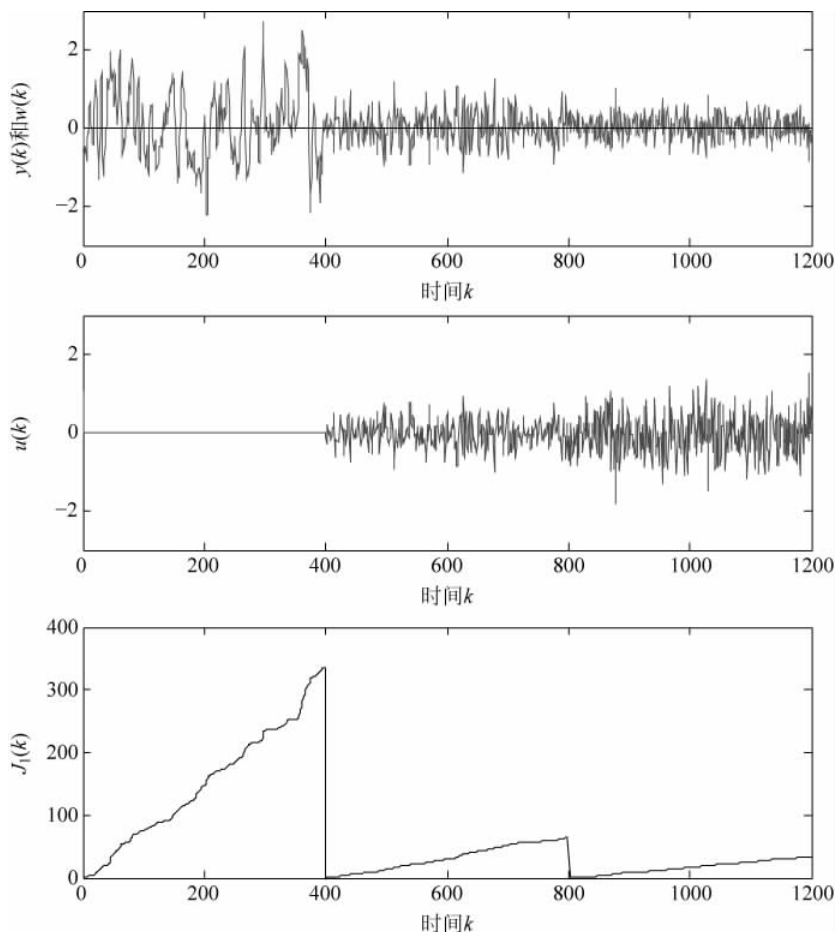


图 3.2.2 被控对象开环运行、采用非最小方差调节器和最小方差调节器的被控对象输出、控制输入以及误差平方和指标

那么以最小方差控制律式(3.2.30)或以最小方差调节律式(3.2.31)作用于被控对象模型式(3.2.1)时,所导致的闭环系统是稳定的,即依概率1有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.2.35)$$

且被控对象的输出与理想输出之间的误差的方差等于

$$\min J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right)\sigma^2 \quad (3.2.36)$$

证明 由被控对象模型式(3.2.1)和控制器方程式(3.2.30)可得闭环系统方程

$$\begin{aligned} & [A(z^{-1})F(z^{-1})B(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})G(z^{-1})]y(k) \\ & = B(z^{-1})C(z^{-1})R(z^{-1})w(k-d) + F(z^{-1})B(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

$$B(z^{-1})u(k) = A(z^{-1})R(z^{-1})w(k) + [A(z^{-1})F(z^{-1}) - C(z^{-1})]\xi(k+d) \quad (3.2.38)$$

式(3.2.37)可以化简为

$$B(z^{-1})C(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})C(z^{-1})R(z^{-1})w(k-d) + F(z^{-1})B(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.39)$$

这样从式(3.2.38)和式(3.2.39)可以看出: 决定闭环系统稳定性的是 $C(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 。

对于调节问题 $w(k) \equiv 0$, 于是闭环系统方程可简化为

$$B(z^{-1})C(z^{-1})y(k) = F(z^{-1})B(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.40)$$

$$B(z^{-1})u(k) = [A(z^{-1})F(z^{-1}) - C(z^{-1})]\xi(k+d) \quad (3.2.41)$$

由于 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 稳定, 且 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \xi^2(k) < \infty$, 使用附录中的引理 A. 1. 2, 则由式(3.2.38)和式(3.2.39)有

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) \leq \frac{K_2}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k+d) + \frac{K_3}{N} < \infty \quad (3.2.42)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \leq \frac{K_5}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_6}{N} < \infty \quad (3.2.43)$$

故式(3.2.35)得证。

由最小方差控制律式(3.2.30)可得

$$G(z^{-1})y(k) = C(z^{-1})R(z^{-1})w(k) - H(z^{-1})u(k) \quad (3.2.44)$$

由 Diophantine 方程式(3.2.13)和式(3.2.44), 可得

$$\begin{aligned} C(z^{-1})y(k+d) &= A(z^{-1})F(z^{-1})y(k+d) - F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) \\ &\quad + C(z^{-1})R(z^{-1})w(k) \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

因此有

$$y(k+d) = \frac{F(z^{-1})[A(z^{-1})y(k+d) - B(z^{-1})u(k)]}{C(z^{-1})} + R(z^{-1})w(k) \quad (3.2.46)$$

由被控对象模型式(3.2.1)可知

$$A(z^{-1})y(k+d) - B(z^{-1})u(k) = C(z^{-1})\xi(k+d)$$

于是可得

$$y(k+d) = F(z^{-1})\xi(k+d) + R(z^{-1})w(k) \quad (3.2.47)$$

代入性能指标式(3.2.8), 得到

$$\begin{aligned} J &= E\{[y(k+d) - R(z^{-1})w(k)]^2\} \\ &= E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

采用同样的方法可证由最小方差调节律式(3.2.32)作用于被控对象模型式(3.2.1), 被控对象的输入和输出是均方有界的, 且性能指标

$$\min J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \quad (3.2.49)$$

■

3.2.2 自校正调节器设计

自校正调节器^[1]是由瑞典学者 Åström 和 Wittenmark 在 1973 年提出的,它是最早也是最简单的广泛应用于实际的自校正控制算法,它采用了最小方差调节律和递推最小二乘参数估计方法,并将两者有机地结合起来直接辨识调节器的参数,实际上它是一种隐式算法。

1. 控制问题描述

被控对象仍采用式(3.2.1)进行描述, $B(z^{-1})$ 为稳定多项式,即被控对象为最小相位, $C(z^{-1})$ 为稳定多项式, $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的阶次 n_A 、 n_B 和 n_C 已知,对象时延 d 已知,多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的系数未知。

控制目标是,当被控对象模型式(3.2.1)的参数未知时,设计自校正调节器,使得被控对象输出 $y(k+d)$ 的方差最小,即

$$\min J = \min E\{[y(k+d)]^2\} \quad (3.2.50)$$

2. 最小方差自校正调节器

由于 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知,因此调节器式(3.2.32)中的 $G(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 未知,采用隐式算法直接对调节器参数 $G(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 进行估计,因此首先求取调节器参数 $G(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 的辨识方程。

1) 调节器参数辨识方程

由最优预报式(3.2.23)可知

$$C(z^{-1})y^*(k+d|k) = G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) \quad (3.2.51)$$

注意到 $C(z^{-1})$ 为首一多项式,定义

$$C^*(z^{-1}) = C(z^{-1}) - C(0) = c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_C} z^{-n_C} \quad (3.2.52)$$

可知有

$$y^*(k+d|k) = G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) - C^*(z^{-1})y^*(k+d|k) \quad (3.2.53)$$

于是由式(3.2.25)可得

$$y(k+d) = G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) - C^*(z^{-1})y^*(k+d|k) + F(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.2.54)$$

平移 d 步,可得

$$y(k) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) - C^*(z^{-1})y^*(k|k-d) + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.55)$$

由于最小方差调节器使 $y^*(k+d|k)=0$, 故调节器参数辨识方程为

$$y(k) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.56)$$

2) 参数估计算法及自校正调节器方程

定义数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 为

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [y(k), \dots, y(k-n_G), u(k), \dots, u(k-n_H)]^T \quad (3.2.57)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [g_0, \dots, g_{n_G}, h_0, \dots, h_{n_H}]^T \quad (3.2.58)$$

式中, n_G 为 $G(z^{-1})$ 多项式的阶次, 由式 (3.2.17) 确定, $n_H = n_B + d - 1$ 为 $H(z^{-1})$ 多项式的阶次。则调节器参数辨识方程式 (3.2.56) 可以表示为

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.59)$$

而最小方差调节律方程式 (3.2.32) 可表示为

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (3.2.60)$$

由于 $F(z^{-1})\xi(k)$ 与 $\boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta}$ 不相关, 采用如下最小二乘估计法来辨识参数 $\boldsymbol{\theta}$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.2.61)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-d)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-d)} \quad (3.2.62)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k-d)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.2.63)$$

并用下式来求最小方差自校正调节律 $u(k)$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = 0 \quad (3.2.64)$$

在前述的所有参数都参加辨识的方案中, 可能会在辨识的过程中出现 h_0 的估计值过小, 将导致出现过大的 $u(k)$, 为避免这种情况, 我们还可以采用固定 h_0 不参加辨识的自校正方法, 可以通过先验知识或者离线辨识得到 h_0 的一个适当的估计值。此时, 数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 定义如下

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [y(k), \dots, y(k-n_G), u(k-1), \dots, u(k-n_H)]^T \quad (3.2.65)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [g_0, \dots, g_{n_G}, h_1, \dots, h_{n_H}]^T \quad (3.2.66)$$

故调节器参数辨识方程式 (3.2.56) 可以写成

$$y(k) - h_0 u(k-d) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.2.67)$$

而最小方差调节律方程式 (3.2.32) 可以写成

$$h_0 u(k) = -\boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} \quad (3.2.68)$$

由于 $F(z^{-1})\xi(k)$ 与 $\boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta}$ 不相关, 且 h_0 不参加辨识, 采用最小二乘估计法来辨识参数 $\boldsymbol{\theta}$, 则有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[y(k) - h_0 u(k-d) - \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.2.69)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-d)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-d)} \quad (3.2.70)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k-d)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.2.71)$$

将所估计参数代入式(3.2.68),即得最小方差自校正调节律

$$u(k) = -\frac{1}{h_0} \boldsymbol{\varphi}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \quad (3.2.72)$$

最小方差自校正调节器的计算步骤总结如下:

- (1) 测取 $y(k)$;
- (2) 形成数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(k-d)$;
- (3) 采用递推最小二乘法估计参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$;
- (4) h_0 参加辨识时用式(3.2.64), h_0 不参加辨识时用式(3.2.72)计算 $u(k)$;
- (5) 返回步骤(1)。

3. 仿真实验

为了验证最小方差自校正调节律的有效性,我们进行下列的仿真实验。

例 3.2.3 最小方差自校正调节律的仿真实验

阶次和时延已知、参数未知的被控对象模型为

$$(1 + 1.5z^{-1} + 0.6z^{-2})y(k) = z^{-2}(0.3 - 0.2z^{-1})u(k) + (1 - 0.8z^{-1})\xi(k)$$

式中, $\xi(k)$ 为均值为 0、方差为 0.1 的独立随机噪声,运行时间从 $k=1$ 到 $k=300$ 。

由 $n_A=2, n_B=1, n_C=1$ 和 $d=2$ 可知 $n_G=1$ 和 $n_H=2$ 。

采用 h_0 不参加辨识的隐式算法实现最小方差自校正调节器,数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k) &= [y(k), y(k-1), u(k-1), u(k-2)]^T \\ \boldsymbol{\theta} &= [g_0, g_1, h_1, h_2]^T \end{aligned}$$

采用递推最小二乘算法进行参数估计,参数向量的初值选为 $\mathbf{0}$ 。为了说明性能指标的收敛情况,运行期间分两段。在 $k=0$ 到 $k=199$ 之间采用最小方差自校正调节器进行控制。在 $k=200$ 到 $k=300$ 之间采用模型已知时的最小方差调节器进行控制,这时在控制程序中直接使用如下调节器参数

$$\begin{aligned} F(z^{-1}) &= 1 - 2.3z^{-1} \\ G(z^{-1}) &= 2.85 + 1.38z^{-1} \\ H(z^{-1}) &= 0.3 - 0.89z^{-1} + 0.46z^{-2} \end{aligned}$$

仍然采用例 3.2.2 中的平方和指标进行调节器性能的度量。由于在 $k < 100$ 时自校正的过渡过程已经结束,我们在 $k=100$ 和 $k=200$ 时刻对该指标归零,以便更直观地进行比较。

仿真结果如图 3.2.3 和图 3.2.4 所示,其中,图 3.2.3 为分别采用最小方差自校

正调节器和最小方差调节器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线, 图 3.2.4 为控制器参数估计的曲线。

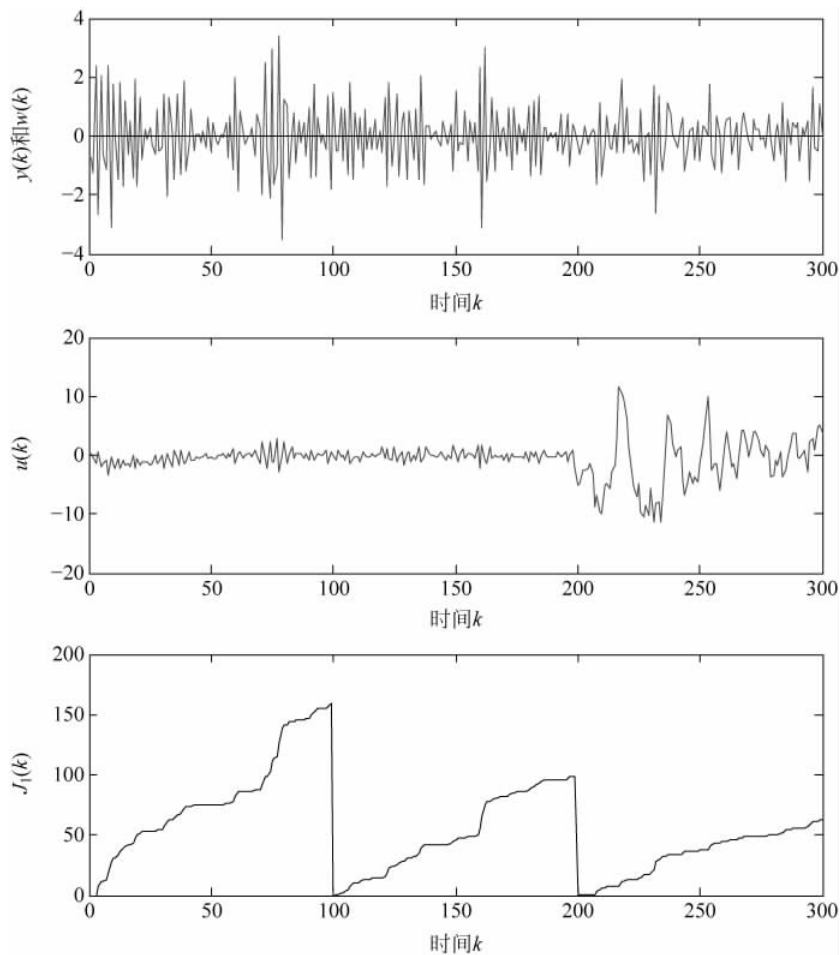


图 3.2.3 参数未知时的最小方差自校正调节器与参数已知的最小方差调节器的仿真比较

从仿真结果我们可以看出:

(1) 在自校正的起始阶段, 大约在 $k=40$ 之前, 参数正在辨识过程之中, 控制效果不好, 输入的波动非常大。

(2) 在 $40 < k < 200$ 之间, 输出偏差平方和指标的斜率与模型已知时的最小方差调节器的指标斜率几乎一致, 说明控制性能已经收敛到参数已知时的调节器性能。

(3) 从参数估计的效果来看, 虽然实现了调节器性能的收敛, 但却没有实现调节器参数的收敛。由图中可见, 所估计的调节器参数与真实的最小方差调节器参数相比较, 仍有明显的偏差。

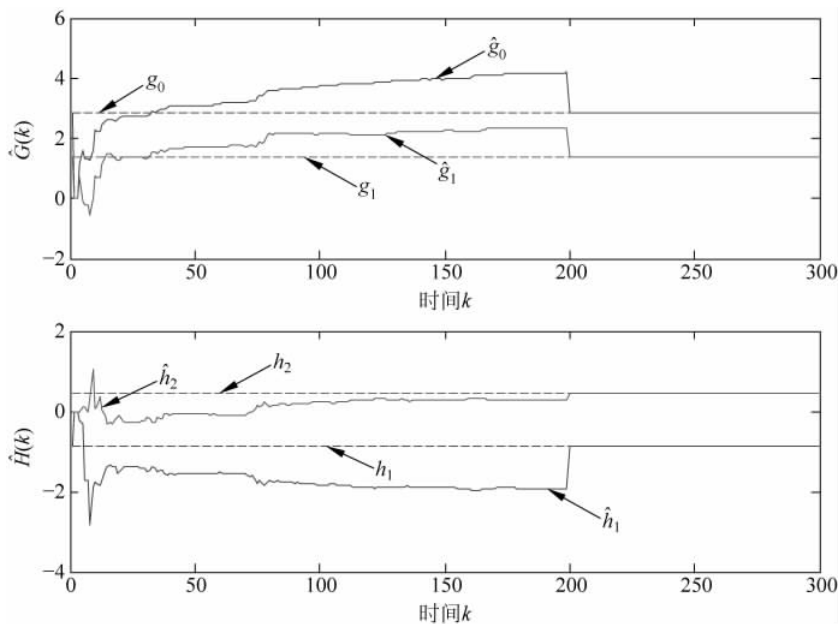


图 3.2.4 最小方差自校正调节器的参数估计过程(在 $0 < k < 200$ 期间)

3.3 最小方差自校正控制器

自校正调节器要求参考输入 $w(k) \equiv 0$, 在工业过程控制中的含义是使被控对象的输出在工作点附近波动的方差最小。当工作点不在原点时, 可以通过坐标变换转换到原点。但工业过程中, 参考输入常常有阶跃性的变化, 上述自校正调节器不能使被控对象的输出跟踪阶跃变化的参考输入信号。为了跟踪阶跃变化的参考输入信号, 需要采用最小方差自校正控制器。

3.3.1 控制问题描述

被控对象仍采用式(3.2.1)进行描述, $B(z^{-1})$ 为稳定多项式, 即被控对象为最小相位, $C(z^{-1})$ 为稳定多项式, $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的阶次 n_A 、 n_B 和 n_C 已知, 对象时延 d 已知, 多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的系数未知。

控制目标是, 设被控对象模型式(3.2.1)的参数未知, 当理想输出 $y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k)$ 、 $w(k) \neq 0$ 时, 设计自校正控制器, 使得被控对象输出 $y(k+d)$ 与理想输出 $y^*(k+d)$ 之间的误差的方差极小, 即

$$\min J = \min E\{[y(k+d) - y^*(k+d)]^2\} \quad (3.3.1)$$

3.3.2 最小方差自校正控制器设计

1. 控制器参数辨识方程

由于 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知, 因此最小方差控制器式 (3.2.30) 中的 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知, 采用隐式算法直接对控制器参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 进行估计, 因此首先求取控制器的参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的辨识方程。定义

$$C^*(z^{-1}) = C(z^{-1}) - C(0) = c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_{n_c} z^{-n_c} \quad (3.3.2)$$

由式 (3.2.23) 和式 (3.2.25) 可得如下的控制器参数辨识方程

$$y(k) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) - C^*(z^{-1})y(k|k-d) + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.3.3)$$

和控制律方程

$$G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) - C^*(z^{-1})y^*(k+d|k) = y^*(k+d) \quad (3.3.4)$$

由最优预报式 (3.2.23) 可知

$$C(z^{-1})y^*(k|k-d) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) \quad (3.3.5)$$

即

$$y^*(k|k-d) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) - C^*(z^{-1})y^*(k|k-d) \quad (3.3.6)$$

2. 参数估计算法及自校正控制器方程

定义数据向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k) = & [y(k), y(k-1), \cdots, y(k-n_G), u(k), u(k-1), u(k-2), \cdots, u(k-n_H) \\ & - y^*(k+d-1|k-1), -y^*(k+d-2|k-2), \cdots, \\ & - y^*(k+d-n_C|k-n_C)]^T \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

和参数向量

$$\boldsymbol{\theta} = [g_0, g_1, \cdots, g_{n_G}, h_0, h_1, \cdots, h_{n_H}, c_1, c_2, \cdots, c_{n_C}]^T \quad (3.3.8)$$

于是式 (3.3.3) 和式 (3.3.4) 可写成

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.3.9)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} = y^*(k+d) \quad (3.3.10)$$

而式 (3.3.6) 可以写成

$$y^*(k|k-d) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} \quad (3.3.11)$$

当被控对象的参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知时, 数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 中的最优预报 $y^*(k|k-d)$ 也未知, 无法构造数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 。这时, 由式 (3.3.11), 我们可以用它的估计值 $\bar{y}(k)$ 来代替, 定义

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_G), u(k), u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_H), \\ -\bar{y}(k+d-1), -\bar{y}(k+d-2), \dots, -\bar{y}(k+d-n_C)]^T \quad (3.3.12)$$

式中

$$\bar{y}(k+d) = \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \quad (3.3.13)$$

因此参数递推估计公式需用增广最小二乘法

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[y(k) - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.3.14)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \quad (3.3.15)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.3.16)$$

最小方差自校正控制律为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = y^*(k+d) \quad (3.3.17)$$

为了避免在辨识的过程中出现 h_0 的估计值过小,将导致出现过大的 $u(k)$ 的情况,可以参照最小方差自校正调节器中固定 h_0 的方法实现最小方差自校正控制。

最小方差自校正控制器的计算步骤如下:

- (1) 测取 $y(k)$;
- (2) 形成数据向量 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)$;
- (3) 采用增广最小二乘递推算法式(3.3.14)~式(3.3.16)估计参数向量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$;
- (4) 用式(3.3.17)计算 $u(k)$;
- (5) 由式(3.3.13)计算最优预报 $y^*(k+d|k)$ 的估计值 $\bar{y}(k+d)$, 以便组成下次采样所需的观测数据向量;
- (6) 返回步骤(1)。

3. 仿真实验

为了验证最小方差自校正控制律的有效性,我们进行下列的仿真实验。

例 3.3.1 最小方差自校正控制律的仿真实验

阶次和时延已知、参数未知的被控对象的模型为

$$(1 - 1.7z^{-1} - 0.6z^{-2})y(k) = z^{-2}(1 - 0.5z^{-1})u(k) + (1 - 0.4z^{-1})\xi(k)$$

式中, $\xi(k)$ 为均值为 0、方差为 0.2 的独立随机噪声,运行时间从 $k=1$ 到 $k=400$ 。

参考输入为,在 $0 < k < 4$ 之间, $w(k)=0$; 在 $4 < k < 150$ 之间, $w(k)=10$; 在 $150 < k < 300$ 之间, $w(k)=5$; 在 $300 < k < 400$ 之间, $w(k)=20$ 。

采用所有参数都参加辨识的隐式算法实现本节所介绍的最小方差自校正控制器对上述被控对象模型进行仿真,由 $n_A=2$ 、 $n_B=1$ 、 $n_C=1$ 和 $d=2$ 可知 $n_G=1$ 和 $n_H=2$ 。数据向量 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 分别为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k) = [y(k), y(k-1), u(k), u(k-1), u(k-2), -\bar{y}(k+1)]^T$$

$$\boldsymbol{\theta} = [g_0, g_1, h_0, h_1, h_2, c_1]^T$$

参数向量的初值选为 $\mathbf{0}$ 。

仿真实验结果如图 3.3.1 和图 3.3.2 所示,其中图 3.3.1 为采用最小方差自校正控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线,图 3.3.2 为控制器参数估计的曲线。

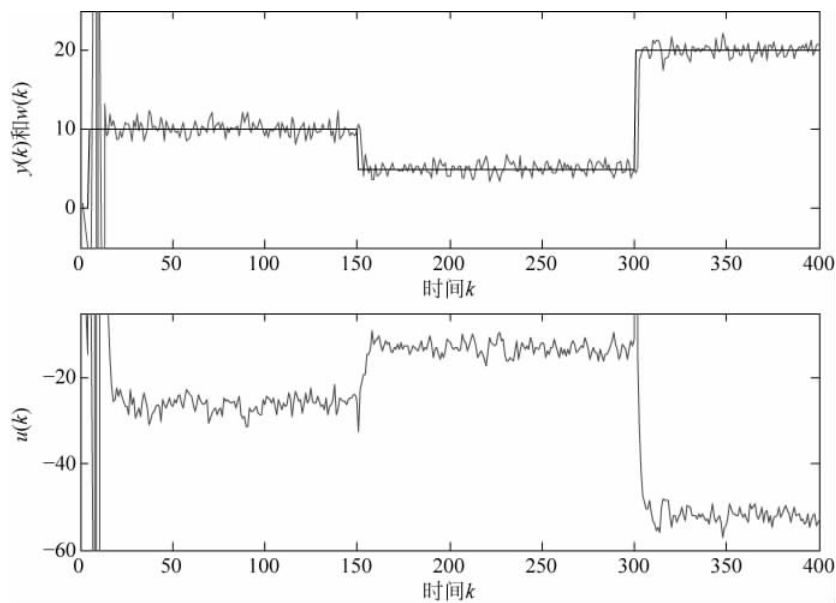


图 3.3.1 采用最小方差自校正控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

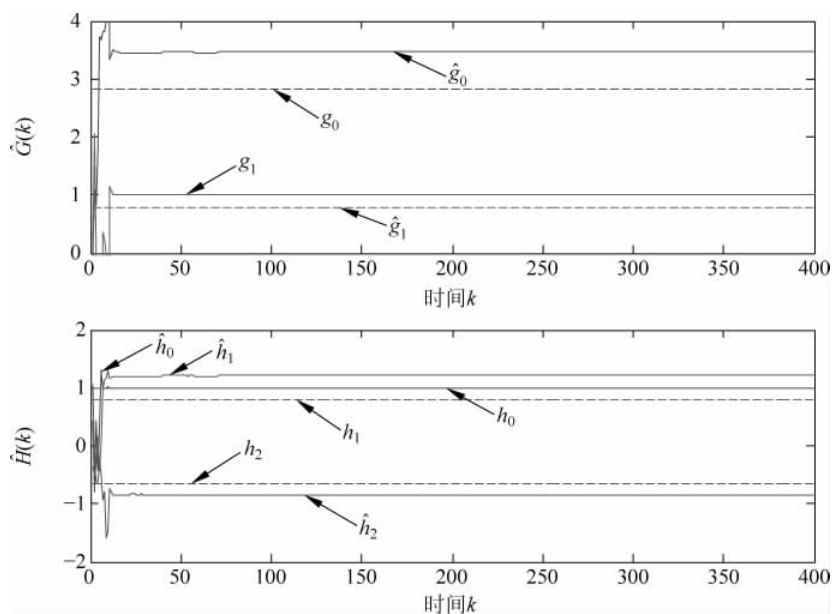


图 3.3.2 采用最小方差自校正控制器时的控制器参数估计曲线

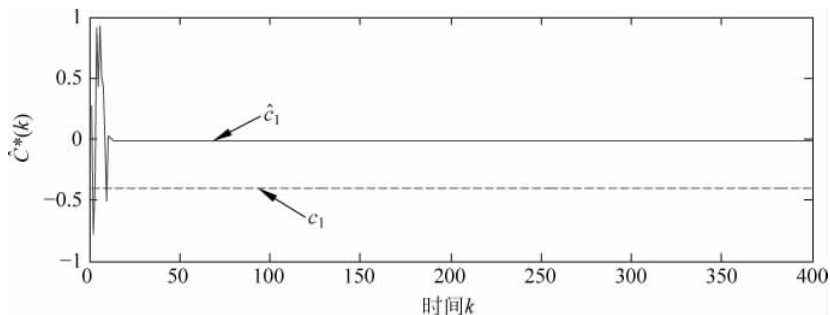


图 3.3.2 (续)

从仿真结果我们可以看出,除起始阶段外,最小方差控制器可以使被控对象的输出跟踪非零的参考输入,但不能保证参数收敛。

3.4 广义最小方差自校正控制器

上述最小方差自校正调节器和控制器要求被控对象是最小相位的;此外由于未对控制量加权,因而可能产生过大的控制输入。为了克服最小方差自校正调节器的缺点,英国学者 Clarke 和 Gawthrop 提出了广义最小方差自校正控制器^[3],该控制器采用了广义最小方差控制律,它是在最小方差性能指标的基础上加上对控制量加权获得的。Clarke 和 Gawthrop 的自校正控制器将广义最小方差控制律和增广最小二乘递推估计算法有机地结合起来,采用隐式算法,它既保持了算法的简易性,又能控制非最小相位被控对象和限制过大的控制输入。广义最小方差自校正控制器的参数可调控器是广义最小方差控制器,为此首先介绍当被控对象模型已知时的广义最小方差控制器设计。

3.4.1 广义最小方差控制器设计

1. 控制问题描述

设被控对象的动态模型为

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.4.1)$$

式中各项定义与式(3.2.1)一样,不同的是 $B(z^{-1})$ 可以为不稳定多项式,即被控对象可以是非最小相位。

控制目标是,针对被控对象的数学模型式(3.4.1),设计广义最小方差控制器,使得广义输出误差 $e(k+d)$ 的方差极小,即

$$\min J$$

其中

$$J = E\{[e(k+d)]^2\} = E\{[\phi(k+d) - y^*(k+d)]^2\} \quad (3.4.2)$$

式中,广义输出 $\phi(k+d)$ 定义为

$$\phi(k+d) = P(z^{-1})y(k+d) \quad (3.4.3)$$

广义理想输出 $y^*(k+d)$ 定义为

$$y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) \quad (3.4.4)$$

广义输出误差 $e(k+d)$ 定义为

$$\begin{aligned} e(k+d) &= \phi(k+d) - y^*(k+d) \\ &= P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + Q(z^{-1})u(k) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

式中, $w(k)$ 为参考输入; $P(z^{-1})$ 、 $Q(z^{-1})$ 和 $R(z^{-1})$ 为 z^{-1} 算子的加权多项式。因此性能指标式(3.4.2)可以表示为

$$J = E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + Q(z^{-1})u(k)]^2\} \quad (3.4.6)$$

于是求使式(3.4.2)极小的最优控制就变成了求使广义输出误差方差为极小的最优控制问题,这样就可以采用求解最小方差控制律的方法来求解使式(3.4.2)最小的控制律。

2. 广义最小方差控制器

1) 最优预报

同最小方差控制律一样,只要求得广义输出 $\phi(k+d)$ 的最优预报 $\phi^*(k+d|k)$,使 $\phi^*(k+d|k)$ 与广义理想输出 $y^*(k+d)$ 相等,即可得到最优控制律 $\phi^*(k+d|k) = y^*(k+d)$,此时广义输出误差最小。

引入下 Diophantine 方程

$$C(z^{-1})P(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) \quad (3.4.7)$$

式中

$$F(z^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_F} f_i z^{-i} \quad (3.4.8)$$

$$G(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n_G} g_i z^{-i} \quad (3.4.9)$$

为待求多项式,其阶次限制为

$$n_F = d - 1 \quad (3.4.10)$$

$$n_G = \max\{n_A - 1, n_P + n_C - d\} \quad (3.4.11)$$

用 $F(z^{-1})$ 乘式(3.4.1)并利用式(3.4.7),采用上节求最优预报的方法可求得广义输出 $\phi(k+d)$ 的 d 步超前最优预报 $\phi^*(k+d|k)$ 为

$$\phi^*(k+d|k) = \frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)}{C(z^{-1})} \quad (3.4.12)$$

此时有

$$\phi(k+d) = \phi^*(k+d|k) + F(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.4.13)$$

2) 广义最小方差控制律

将式(3.4.13)代入式(3.4.2),采用求最小方差控制律的方法可得广义最小方

差控制律为

$$\phi^*(k+d|k) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) \quad (3.4.14)$$

由式(3.4.12)和式(3.4.14)可得最优控制律的另一形式

$$\bar{H}(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.4.15)$$

式中

$$\bar{H}(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1}) \quad (3.4.16)$$

$$E(z^{-1}) = C(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (3.4.17)$$

它与最小方差控制律式(3.2.30)具有相同的结构,区别仅在于 $H(z^{-1})$ 和 $\bar{H}(z^{-1})$ 不同,在最小方差控制律中 $H(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1})$,而在广义最小方差控制律中 $\bar{H}(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})$,最小方差控制律中 $F(z^{-1})$ 由式(3.2.13)给出,广义最小方差控制律中 $F(z^{-1})$ 由式(3.4.7)给出。

结合本章 3.6 节,从式(3.2.30)和式(3.4.15)中可看到无论是最小方差控制律还是广义最小方差控制律都与一般极点配置控制器具有类似结构,广义最小方差控制器的结构图如图 3.4.1 所示。

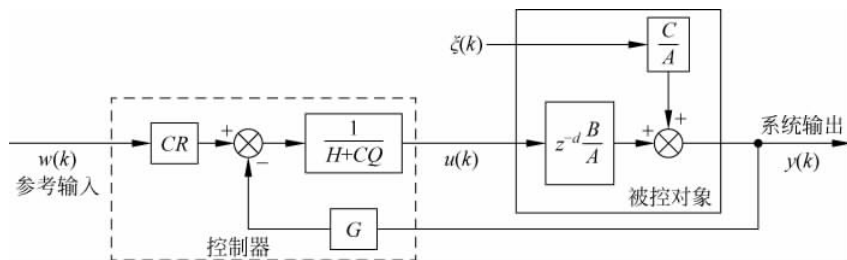


图 3.4.1 广义最小方差控制器的结构图

3) 性能分析

广义最小方差控制器必须要保证闭环系统的稳定性,即被控对象的输入和输出均方有界,即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.4.18)$$

并且使得性能指标式(3.4.2)达到最优,即使被控对象的广义输出与广义理想输出之间的误差的方差达到最小,即为

$$J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \quad (3.4.19)$$

闭环系统的稳定性和最优性由定理 3.4.1 给出。

定理 3.4.1 假定:

(1) $C(z^{-1})$ 是稳定的,且时延已知;

(2) 依概率 1 有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty$;

(3) 离线选择加权多项式 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$,使 $P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})$ 是

稳定的,即

$$P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (3.4.20)$$

那么广义最小方差控制律式(3.4.15)能保证闭环系统是稳定的,即依概率1有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty \quad (3.4.21)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.4.22)$$

且使得性能指标式(3.4.2)达到最优,即使被控对象的广义输出与广义理想输出之间的误差的方差达到最小,即为

$$J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \quad (3.4.23)$$

证明 闭环系统的输出和输入方程可分别由将控制律式(3.4.15)写成 $u(k)$ 和 $y(k)$ 的表达式后再代入被控对象模型式(3.4.1)求得,即

$$y(k) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}w(k) + \frac{F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}\xi(k) \quad (3.4.24)$$

$$u(k) = \frac{A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}w(k) - \frac{G(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}\xi(k) \quad (3.4.25)$$

由于 $P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})$ 是稳定的, $w(k)$ 有界, $\xi(k)$ 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty, \text{ 使用附录中的引理 A. 1. 2, 再由式(3.4.24)和式(3.4.25)}$$

可得

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) \leq \frac{K_1}{N} \sum_{k=1}^N w^2(k) + \frac{K_2}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_3}{N} < \infty \quad (3.4.26)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \leq \frac{K_4}{N} \sum_{k=1}^N w^2(k-d) + \frac{K_5}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_6}{N} < \infty \quad (3.4.27)$$

此即式(3.4.21)和式(3.4.22)。

由广义最小方差控制律式(3.4.15)可得

$$G(z^{-1})y(k) = E(z^{-1})w(k) - \bar{H}(z^{-1})u(k) \quad (3.4.28)$$

由 Diophantine 方程式(3.4.7)和式(3.4.28),可得

$$\begin{aligned} C(z^{-1})P(z^{-1})y(k+d) &= A(z^{-1})F(z^{-1})y(k+d) - F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) \\ &\quad - C(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) \\ &\quad + C(z^{-1})R(z^{-1})w(k) \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

因此有

$$\begin{aligned} P(z^{-1})y(k+d) &= \frac{F(z^{-1})[A(z^{-1})y(k+d) - B(z^{-1})u(k)]}{C(z^{-1})} - Q(z^{-1})u(k) \\ &\quad + R(z^{-1})w(k) \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

由被控对象模型式(3.4.1)可知

$$A(z^{-1})y(k+d) - B(z^{-1})u(k) = C(z^{-1})\xi(k+d)$$

于是可得

$$P(z^{-1})y(k+d) = F(z^{-1})\xi(k+d) - Q(z^{-1})u(k) + R(z^{-1})w(k) \quad (3.4.31)$$

代入性能指标式(3.4.6),得到

$$\begin{aligned} J &= E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + Q(z^{-1})u(k)]^2\} \\ &= E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

4) 加权项选择

由定理 3.4.1 知, $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的选择直接关系到参数已知时用广义最小方差控制律时闭环系统的稳定性, 式(3.4.20)给出了选择加权多项式 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的准则。当参数未知时, 无论对确定性被控对象还是随机被控对象, 采用广义最小方差自校正控制器时, 式(3.4.20)也是选择加权多项式 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使自校正系统稳定的准则。不管 $A(z^{-1})$ 或 $B(z^{-1})$ 是否稳定, 即不管是开环不稳定或是非最小相位, 都可通过适当选择 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使闭环系统稳定, 因此广义最小方差控制器可以控制开环不稳定或非最小相位的被控对象。

从闭环系统方程式(3.4.24)还可看出, 加权多项式的选择还关系到是否能消除跟踪误差的问题, 即参考输入 $w(k)$ 与被控对象输出 $y(k)$ 之间的稳态增益是否为 1。选择加权多项式来消除阶跃输入跟踪误差的方法有两种: 一种是引入积分器, 即 $Q(1)=0$, 简单的取法是 $Q(z^{-1})=\lambda(1-z^{-1})$, 由式(3.4.24)知, 如果 $Q(1)=0$, 那么只要 $R(1)=P(1)$, $w(k)$ 和 $y(k)$ 之间的传递函数在稳态时为 1; 另一种是不引入积分器而在线校正 $R(z^{-1})$, 由式(3.4.24)知, 只要取

$$R(1) = \frac{A(z^{-1})Q(z^{-1})}{B(z^{-1})} + P(z^{-1}) \Big|_{z=1} \quad (3.4.33)$$

则 $w(k)$ 与 $y(k)$ 之间的传递函数的稳态值为 1。如果参考输入是阶跃输入, 上述方法都能消除稳态误差。

选择加权多项式 $P(z^{-1})$ 、 $Q(z^{-1})$ 和 $R(z^{-1})$ 的方法有两种: 一种是离线选择, 另一种是在线选择。下面介绍两种离线凑试 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 并选择 $R(z^{-1})$ 的方法。

(1) 采用积分器选择加权多项式的方法是令

$$P(z^{-1}) = R(z^{-1}) \quad (3.4.34)$$

$$Q(z^{-1}) = \lambda(1 - z^{-1}) \quad (3.4.35)$$

式中, λ 必须满足

$$P(z^{-1})B(z^{-1}) + \lambda(1 - z^{-1})A(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (3.4.36)$$

为了使自校正控制器简单, 一般取

$$P(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 1 \quad (3.4.37)$$

(2) 不加积分器选择加权多项式时,可以利用式(3.4.33),但此式需要知道被控对象参数 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$,而在隐式自校正控制器中,辨识得到的是控制器参数,这就需要式(3.4.33)中的被控对象参数转换成控制器参数。将式(3.4.33)改写后有

$$R = \frac{A(z^{-1})F(z^{-1})Q(z^{-1})}{F(z^{-1})B(z^{-1})} + P(z^{-1}) \Big|_{z=1} \quad (\text{对阶跃输入,取 } R(z^{-1}) = R) \quad (3.4.38)$$

式中, $F(1)B(1) = H(1)$,由式(3.4.7)知 $A(1)F(1) = C(1)P(1) - G(1)$,这样

$$R(1) = \frac{Q(1)[C(1)P(1) - G(1)]}{H(1)} + P(1) \quad (3.4.39)$$

式中, $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 离线选择, $C(1)$ 、 $G(1)$ 和 $H(1)$ 由辨识得到的控制器参数 $C(z^{-1})$ 、 $G(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 来求,如何辨识 $C(z^{-1})$ 、 $G(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 将在 3.4.2 节介绍。

一种简单的不加积分器而能消除跟踪误差的选择多项式的方法是取

$$P(z^{-1}) = 1, \quad Q(z^{-1}) = \lambda \quad (3.4.40)$$

再离线选择 λ 使其满足

$$B(z^{-1}) + \lambda A(z^{-1}) \neq 0 \quad |z| \geq 1 \quad (3.4.41)$$

在线选择 $R(z^{-1})$ 使其满足

$$R = \frac{[C(1) - G(1)]\lambda}{H(1)} + 1 \quad (3.4.42)$$

一般来说,加入积分器来消除稳态跟踪误差的方法鲁棒性较强,由式(3.4.24)可知加入积分器后会闭环系统极点位置改变,对有些被控对象来说,容易使极点位置趋近单位圆,这样容易使被控对象输出波动增大甚至不稳定。在这种情况下,采用不加积分作用消除稳态误差的方法能获得好的控制效果,因为这种方法不改变闭环系统的极点位置。

上述两种方法都采用离线凑试加权多项式 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的办法,凑试准则式(3.4.36)和式(3.4.41)都符合式(3.4.20),即这些离线凑试 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的准则不仅适用于广义最小方差控制器也适用于自校正控制器。但离线凑试加权多项式比较费事,因凑试时需事先知道被控对象参数 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$,但在自适应情况下 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 通常未知,这就给凑试 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 带来困难。解决这一问题的途径是直接采用在线选择加权多项式的算法,感兴趣的读者请参阅文献[10]。

3.4.2 广义最小方差自校正控制器设计

1. 控制问题描述

被控对象仍采用式(3.4.1)进行描述,多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的阶次 n_A 、 n_B 和 n_C 已知,对象时延 d 已知,多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的系数未知,且被控对象可以是非最小相位的。

控制目标是,当被控对象模型式(3.4.1)的参数未知,设计广义最小方差自校正控制器,使得被控对象的广义输出 $\phi(k+d)$ 与广义理想输出 $y^*(k+d)$ 的误差的方差极小,即

$$\min J = \min E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + Q(z^{-1})u(k)]^2\} \quad (3.4.43)$$

2. 自校正控制器

由于 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知,因此广义最小方差控制器式(3.4.15)中的 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知,采用隐式算法直接对控制器参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 进行估计,因此首先求取控制器的参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的辨识方程。

1) 控制器参数辨识方程

利用式(3.4.12)~式(3.4.14),得到控制器参数辨识方程

$$\phi(k) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) - C^*(z^{-1})\phi^*(k | k-d) + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.4.44)$$

控制器方程为

$$G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) - C^*(z^{-1})\phi^*(k+d | k) = y^*(k+d) \quad (3.4.45)$$

式中

$$y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) \quad (3.4.46)$$

由最优预报式(3.4.12)可知

$$C(z^{-1})y^*(k | k-d) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) \quad (3.4.47)$$

于是有

$$\phi^*(k | k-d) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) - C^*(z^{-1})\phi^*(k | k-d) \quad (3.4.48)$$

定义 $(n_G + n_H + n_C + 2)$ 维数据向量 $\boldsymbol{\phi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(k) = & [y(k), \dots, y(k-n_G), u(k), \dots, u(k-n_H), \\ & -\phi^*(k+d-1 | k-1), \dots, -\phi^*(k+d-n_C | k-n_C)]^T \end{aligned} \quad (3.4.49)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [g_0, \dots, g_{n_G}, h_0, \dots, h_{n_H}, c_1, \dots, c_{n_C}]^T \quad (3.4.50)$$

式中, $\phi^*(k | k-d)$ 可以写成

$$\phi^*(k | k-d) = \boldsymbol{\phi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} \quad (3.4.51)$$

因此,控制器参数辨识方程式(3.4.44)为

$$\phi(k) = \boldsymbol{\phi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.4.52)$$

2) 参数估计算法和自校正控制器

式(3.4.52)中 $F(z^{-1})\xi(k)$ 是由 $\xi(k), \xi(k-1), \dots, \xi(k-d-1)$ 组成的,而 $\boldsymbol{\phi}(k-d)$ 是由 $y(k-d), y(k-d-1), \dots, u(k-d), \dots, u(k-d-n_H)$ 等组成的,显然上式右边两项不相关,故可采用递推最小二乘法辨识参数。

但是,当被控对象参数未知时,数据向量 $\boldsymbol{\phi}(k)$ 中的最优预报 $\phi^*(k+d-1 | k-1)$

也未知,因此无法构造可用的数据向量。由式(3.4.51)可知,同最小方差自校正控制器的方法类似,我们引入它的估计值来代替。为此引入记号

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k) = [y(k), \dots, y(k-n_G), u(k), \dots, u(k-n_H), \\ -\bar{y}(k+d-1), \dots, -\bar{y}(k+d-n_C)]^T \quad (3.4.53)$$

式中

$$\bar{y}(k+d) = \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \quad (3.4.54)$$

参数估计的递推公式采用增广最小二乘法

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) [\phi(k) - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.4.55)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \quad (3.4.56)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.4.57)$$

由式(3.4.49)和式(3.4.50)知,参数已知时的广义最小方差控制律式(3.4.45)可写成

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \boldsymbol{\theta} = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) \quad (3.4.58)$$

用估计的参数代替真实参数,可得自校正控制律为

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) \quad (3.4.59)$$

综上所述,广义最小方差自校正控制算法计算步骤总结如下:

- (1) 测取 $y(k)$ 和 $w(k)$;
- (2) 计算广义输出 $\phi(k)$;
- (3) 形成数据向量 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)$;
- (4) 用递推最小二乘法式(3.4.55)~式(3.4.57)计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$;
- (5) 用式(3.4.42)在线校正 $R(z^{-1})$;
- (6) 用式(3.4.54)计算最优预报 $\phi^*(k+d|k)$ 的估计值 $\bar{y}(k+d)$, 以便组成下次采样所需的观测数据向量;
- (7) 返回步骤(1)。

3.4.3 仿真实验

为了验证广义最小方差控制律和广义最小方差自校正控制律的有效性,我们进行下列的仿真实验。

例 3.4.1 广义最小方差控制器和自校正控制器的仿真实验

开环不稳定非最小相位的被控对象模型为

$$(1 - 1.7z^{-1} - 0.6z^{-2})y(k) = z^{-2}(1.0 + 2.0z^{-1})u(k) + (1 - 0.4z^{-1})\xi(k)$$

式中, $\xi(k)$ 为均值为 0、方差为 0.2 的独立随机噪声,运行时间从 $k=1$ 到 $k=400$ 。

由 $n_A=2, n_B=1, n_C=1$ 和 $d=2$ 可知 $n_G=1$ 和 $n_H=2$ 。

参考输入为如下方波信号

$$w(k) = 5 + 5\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi k}{150}\right)$$

不加积分器, 离线选择加权多项式

$$P(z^{-1}) = 1$$

$$Q(z^{-1}) = \lambda = 1.08$$

(1) 广义最小方差控制器

被控对象模型已知时, 广义最小方差控制器方程为

$$(2.08 + 2.868z^{-1} + 2.6z^{-2})u(k) = -(2.81 + 0.78z^{-1})y(k) + (0.532 - 0.2128z^{-1})w(k)$$

广义最小方差控制器的仿真结果如图 3.4.2 所示, 可以看出, 当被控对象模型参数已知时, 采用上述的广义最小方差控制器, 可以使得闭环系统稳定, 跟踪非零的参考输入, 且能够消除稳态跟踪误差。

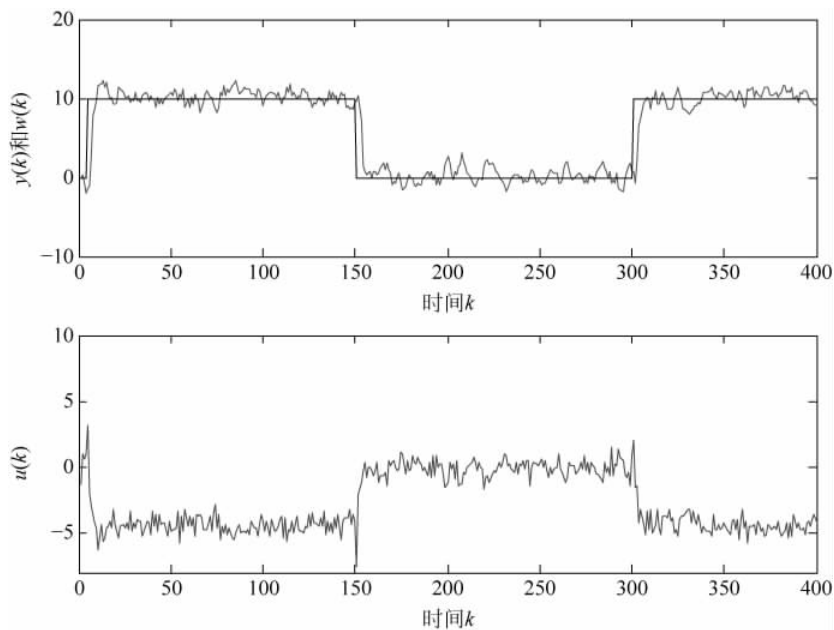


图 3.4.2 采用广义最小方差控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

(2) 广义最小方差自校正控制器

当上述被控对象模型参数未知时, 采用广义最小方差自校正控制器进行仿真实验。控制器阶次不变, 加权阵选择不变, 对控制器参数进行估计, 数据向量 $\hat{\phi}(k)$ 和参数向量 θ 分别为

$$\hat{\phi}(k) = [y(k), y(k-1), u(k), u(k-1), u(k-2), -\bar{y}(k+1)]^T$$

$$\theta = [g_0, g_1, h_0, h_1, h_2, c_1]^T$$

仿真实验结果如图 3.4.3 和图 3.4.4 所示, 其中图 3.4.3 为采用广义最小方差自校正控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲

线,图 3.4.4 为控制器参数估计的曲线。可以看出,当被控对象模型参数未知时,采用上述的广义最小方差自校正控制器,可以使得闭环系统稳定,可以跟踪非零的参考输入,且能够消除稳态跟踪误差;在自适应控制的初期,控制效果不好,随着时间的推移,所辨识的控制器参数迅速收敛(没有收敛到真值),控制效果已经相当理想。

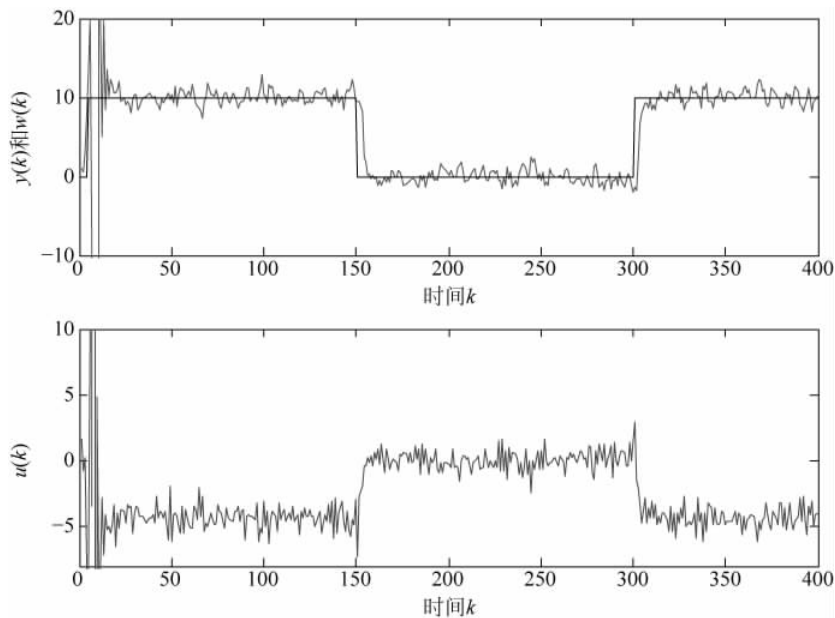


图 3.4.3 采用广义最小方差自校正控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

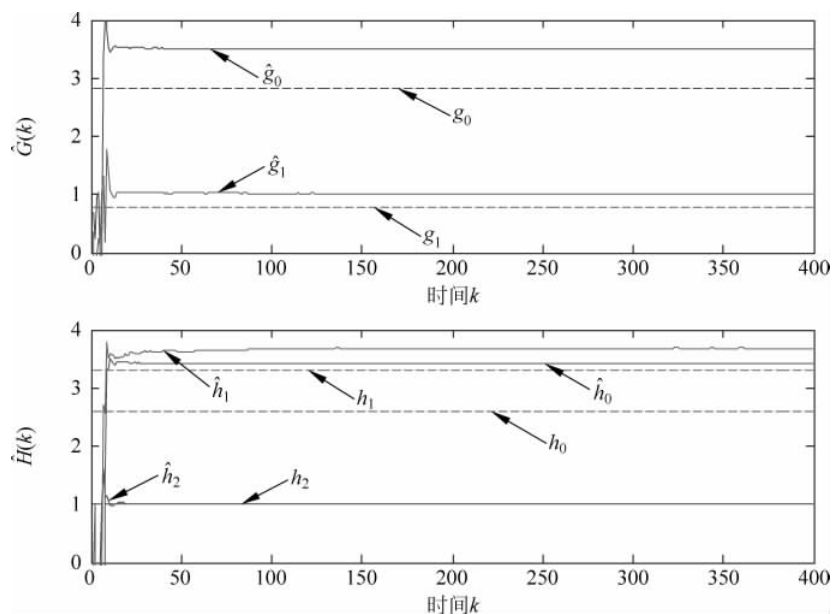


图 3.4.4 广义最小方差自校正控制器的控制器参数估计曲线

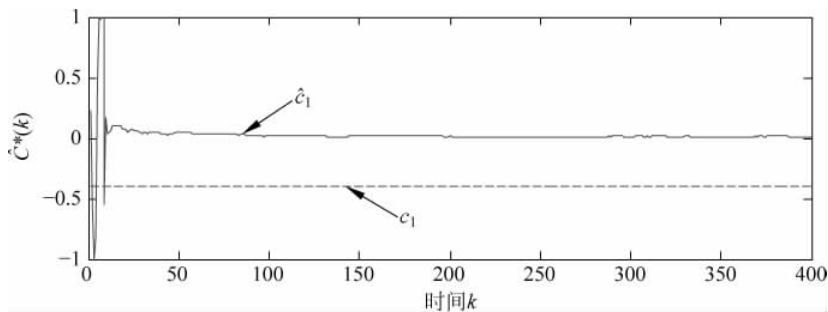


图 3.4.4 (续)

3.5 自校正前馈控制器

在工业过程中,有些被控对象常受到可测干扰的影响。如在钢厂中,为了有效利用转炉炼钢中产生的高温烟气,安装了余热锅炉,利用高温烟气产生饱和蒸汽供民用取暖和作工业热源用。余热锅炉水位调节系统的任务是使给水量适应锅炉蒸发量的变化,保持水位恒定。水位过高影响产生的蒸汽质量,水位过低容易引起锅炉爆炸,因此余热锅炉的水位调节是非常重要的。影响水位的主要因素是给水量和炼钢的启停过程所造成的蒸发量的变化,调节时前者可作为控制输入,后者蒸发量可以检测但不可作为控制输入,可作为可测干扰处理。

对于具有可测干扰的被控对象,采用前馈控制可有效抑制可测干扰对输出的影响。但如果可测干扰与输出之间的模型参数未知,为了获得满意的控制效果,就必须将前馈控制与自适应控制结合起来。余热锅炉的给水系统由于炼钢过程的频繁启停,其运行条件频繁改变致使被控对象参数发生变化,故需用自适应前馈控制。将前馈控制引入自校正调节器和控制器,在适当参数配合下可实现对可测干扰的补偿,组成有动静态补偿的自校正前馈控制器。本节介绍的广义最小方差自校正前馈控制器的参数可调控制器是广义最小方差前馈控制器,为此首先介绍当被控对象模型已知时的广义最小方差前馈控制器设计。

3.5.1 广义最小方差前馈控制器设计

1. 控制问题描述

设被控对象的模型为

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + z^{-d_{B2}}B_2(z^{-1})v(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.5.1)$$

式中, $v(k)$ 为有界可测干扰,它与输出 $y(k)$ 之间的传输时延用 d_{B2} 表示; $B_2(z^{-1})$ 为 z^{-1} 的 n_{B2} 阶多项式,假定 $d_{B2} \geq d$; 其他各项定义同式(3.4.1); 同样 $B(z^{-1})$ 可以为不稳定多项式,即被控对象可以是非最小相位。

控制目标是,针对具有可测干扰的被控对象的数学模型式(3.5.1),设计广义最

小方差前馈控制器,尽可能消除可测干扰 $v(k)$ 对被控对象输出 $y(k)$ 的影响,且使得广义输出误差 $e(k+d)$ 的方差极小,即

$$\min J$$

其中

$$J = E\{[e(k+d)]^2\} = E\{[\phi(k+d) - y^*(k+d)]^2\} \quad (3.5.2)$$

式中,广义输出 $\phi(k+d)$ 定义为

$$\phi(k+d) = P(z^{-1})y(k+d) \quad (3.5.3)$$

广义理想输出 $y^*(k+d)$ 定义为

$$y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) - S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \quad (3.5.4)$$

广义输出误差 $e(k+d)$ 定义为

$$e(k+d) = \phi(k+d) - R(z^{-1})w(k) + Q(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \quad (3.5.5)$$

式中, $w(k)$ 为参考输入, $P(z^{-1})$ 、 $Q(z^{-1})$ 、 $R(z^{-1})$ 和 $S(z^{-1})$ 为加权项,其中 $P(z^{-1})$ 、 $Q(z^{-1})$ 和 $R(z^{-1})$ 的含义同 3.4 节, $S(z^{-1})$ 用于对可测扰动进行加权。从后面的分析可看到,在性能指标式(3.5.4)中引入 $S(z^{-1})v(k+d-d_{B2})$,就能通过对 $S(z^{-1})$ 的选择来对可测干扰实现动静态补偿。

因此性能指标式(3.5.2)可以表示为

$$J = E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) + Q(z^{-1})u(k)]^2\} \quad (3.5.6)$$

于是求使式(3.5.2)极小的最优控制就变成了求使广义输出误差方差为极小的最优控制问题。这样就可以采用求解最小方差控制律的办法来求解使式(3.5.2)最小的控制律。

2. 广义最小方差前馈控制器

1) 最优预报

广义输出 $\phi(k+d)$ 的 d 步超前最优预报可采用与 3.4 节类似的求最优预报的方法求得,即

$$\phi^*(k+d|k) = \frac{G(z^{-1})y(k) + F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) + F(z^{-1})B_2(z^{-1})v(k+d-d_{B2})}{C(z^{-1})} \quad (3.5.7)$$

式中,多项式 $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 由下面的 Diophantine 方程确定

$$C(z^{-1})P(z^{-1}) = A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) \quad (3.5.8)$$

其阶次限制为

$$n_F = d-1, \quad n_G = \max\{n_A-1, n_P+n_C-d\} \quad (3.5.9)$$

2) 前馈控制器

得到最优预报之后,广义输出 $\phi(k+d)$ 可以表示为

$$\phi(k+d) = \phi^*(k+d|k) + F(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.5.10)$$

令最优预报等于广义理想输出,即可求得广义最小方差前馈控制律为

$$\phi^*(k+d|k) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) - S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \quad (3.5.11)$$

由式(3.5.7)和式(3.5.11)还可求出最优控制律的另一种形式

$$G(z^{-1})y(k) + \bar{H}(z^{-1})u(k) + \bar{D}(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) = E(z^{-1})w(k) \quad (3.5.12)$$

式中

$$\bar{H}(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1}) = H(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1}) \quad (3.5.13)$$

$$\bar{D}(z^{-1}) = F(z^{-1})B_2(z^{-1}) + C(z^{-1})S(z^{-1}) = D(z^{-1}) + C(z^{-1})S(z^{-1}) \quad (3.5.14)$$

且有

$$H(z^{-1}) = F(z^{-1})B(z^{-1}) \quad (3.5.15)$$

$$D(z^{-1}) = F(z^{-1})B_2(z^{-1}) \quad (3.5.16)$$

$$E(z^{-1}) = C(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (3.5.17)$$

控制器的结构如图 3.5.1 所示,可以看出,这是一种前馈控制器的结构。

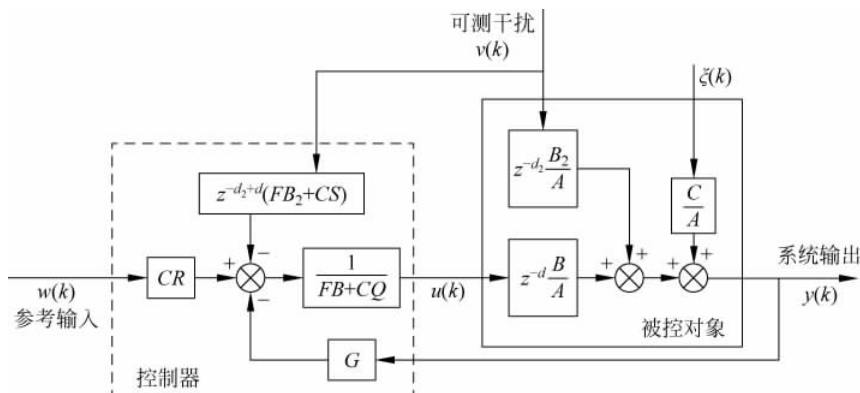


图 3.5.1 广义最小方差前馈控制器结构图

3) 性能分析

广义最小方差控制器必须要保证闭环系统的稳定性,即被控对象的输入和输出是均方有界的,即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.5.18)$$

并且使得性能指标式(3.5.2)达到最优,即使被控对象的广义输出与广义理想输出之间的误差的方差达到最小,即为

$$J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right) \sigma^2 \quad (3.5.19)$$

闭环系统的稳定性和最优性由定理 3.5.1 给出。

定理 3.5.1 假定:

(1) $C(z^{-1})$ 稳定,且时延已知;

(2) 依概率 1 有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty$;

(3) 离线选择加权多项式 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使 $P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})$ 是稳定的, 即

$$P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (3.5.20)$$

那么广义最小方差前馈控制律式(3.5.12)能保证闭环系统是稳定的, 即依概率 1 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.5.21)$$

且性能指标式(3.5.2)达到最优, 即使被控对象的广义输出与广义理想输出之间的误差的方差达到最小, 即为

$$J = E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} = \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right)\sigma^2 \quad (3.5.22)$$

证明 闭环系统的输出和输入方程可由式(3.5.12)和式(3.5.1)导出, 即

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}w(k) \\ &+ \frac{Q(z^{-1})B_2(z^{-1}) - B(z^{-1})S(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}v(k - d_{B2}) \\ &+ \frac{F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}\xi(k) \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{A(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}w(k) \\ &- \frac{B_2(z^{-1})P(z^{-1}) + A(z^{-1})S(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}v(k - d + d_{B2}) \\ &- \frac{G(z^{-1})}{P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})}\xi(k) \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

显然闭环系统的稳定性由闭环极点多项式 $P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})$ 确定。

由于 $P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})$ 是稳定的, $w(k)$ 有界, $v(k)$ 有界, $\xi(k)$ 满足 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty$, 使用附录中的引理 A. 1. 2, 再由式(3.5.23)和式(3.5.24)

可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) &\leq \frac{K_1}{N} \sum_{k=1}^N w^2(k) + \frac{K_2}{N} \sum_{k=1}^N v^2(k - d + d_{B2}) + \frac{K_3}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_4}{N} < \infty \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) &\leq \frac{K_5}{N} \sum_{k=1}^N w^2(k - d) + \frac{K_6}{N} \sum_{k=1}^N v^2(k - d_{B2}) + \frac{K_7}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_8}{N} < \infty \end{aligned}$$

故式(3.5.21)得证。

由广义最小方差前馈控制律式(3.5.12)可得

$$\begin{aligned} G(z^{-1})y(k) &= E(z^{-1})w(k) - [F(z^{-1})B(z^{-1}) + C(z^{-1})Q(z^{-1})]u(k) \\ &- [F(z^{-1})B_2(z^{-1}) + C(z^{-1})S(z^{-1})]v(k + d - d_{B2}) \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

由 Diophantine 方程式(3.5.8)和式(3.5.25), 可得

$$\begin{aligned}
C(z^{-1})P(z^{-1})y(k+d) = & A(z^{-1})F(z^{-1})y(k+d) \\
& - F(z^{-1})B(z^{-1})u(k) - C(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) \\
& - F(z^{-1})B_2(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \\
& - C(z^{-1})S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \\
& + C(z^{-1})R(z^{-1})w(k)
\end{aligned} \quad (3.5.26)$$

因此有

$$\begin{aligned}
P(z^{-1})y(k+d) = & \frac{F(z^{-1})[A(z^{-1})y(k+d) - B(z^{-1})u(k) - B_2(z^{-1})v(k+d-d_{B2})]}{C(z^{-1})} \\
& - Q(z^{-1})u(k) - S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \\
& + R(z^{-1})w(k)
\end{aligned} \quad (3.5.27)$$

由被控对象模型式(3.5.1)可知

$$A(z^{-1})y(k+d) - B(z^{-1})u(k) - B_2(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) = C(z^{-1})\xi(k+d) \quad (3.5.28)$$

于是可得

$$\begin{aligned}
P(z^{-1})y(k+d) = & F(z^{-1})\xi(k+d) - Q(z^{-1})u(k) \\
& - S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) + R(z^{-1})w(k)
\end{aligned} \quad (3.5.29)$$

代入性能指标式(3.5.6),得到

$$\begin{aligned}
J = & E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) \\
& + S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) + Q(z^{-1})u(k)]^2\} \\
= & E\{[F(z^{-1})\xi(k+d)]^2\} \\
= & \left(1 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2\right)\sigma^2
\end{aligned} \quad (3.5.30)$$

■

4) 加权多项式的选择

由定理 3.5.1 可知,广义最小方差前馈控制律与广义最小方差控制律一样, $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的选择关系到闭环系统的稳定性。式(3.5.20)是选择 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$, 保证闭环系统稳定的准则,同时,它也是当进行自校正控制时,保证自校正系统全局收敛的准则。不管被控对象是否开环稳定,是否为非最小相位,总可以通过选择适当的 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使闭环系统稳定。

要实现对可测干扰的动态和静态补偿,根据式(3.5.23)知必须选择 $S(z^{-1})$ 使

$$Q(z^{-1})B_2(z^{-1}) - B(z^{-1})S(z^{-1}) = 0 \quad (3.5.31)$$

在自校正前馈控制器中如不将可测干扰加权项引入性能指标中,即 $S(z^{-1})=0$,则由式(3.5.14)可知,要实现对 $v(k)$ 的动静态补偿必须使 $Q(z^{-1})B_2(z^{-1})$ 为零,这只有当被控对象是最小相位时, $Q(z^{-1})$ 才可选为零。但是对非最小相位的被控对象, $Q(z^{-1})$ 不能选为零,即使引入积分作用使 $Q(1)=0$,也只能对可测干扰实现静态补偿。这就是为什么要在性能指标中引入 $S(z^{-1})$ 的原因。

由定理 3.5.1 知可测干扰作用于被控对象后不影响闭环系统的稳定性。如果按

照式(3.5.31)来选择 $S(z^{-1})$, 按式(3.4.39)来选择 $R(z^{-1})$, 则可消除闭环系统的跟踪误差。

为了使加权多项式的选择和控制器参数联系起来, 对式(3.5.31)作些改变。用 $F(z^{-1})$ 乘以式(3.5.31), 可得

$$Q(z^{-1})D(z^{-1}) - H(z^{-1})S(z^{-1}) = 0 \quad (3.5.32)$$

当被控对象为最小相位时, 可设 $Q(z^{-1}) = Q_1(z^{-1})B(z^{-1})$, 由式(3.5.32)可知 $S(z^{-1}) = Q_1(z^{-1})B_2(z^{-1})$, 这表明此法对最小相位的被控对象可实现对可测干扰的完全动静态补偿。但在一般情况下, 因为 $Q(z^{-1})$ 已经选择好, $B_2(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 已知, $S(z^{-1})$ 未知, 要使式(3.5.32)有解, 方程中各多项式 $Q(z^{-1})$ 、 $B_2(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 和 $S(z^{-1})$ 的阶次必须满足下列关系

$$n_S + 1 \geq n_B + n_S + 1, \quad n_S + 1 \geq n_Q + n_{B_2} + 1 \quad (3.5.33)$$

即方程中未知数的个数大于或等于方程式的个数, 故要求 $n_B = 0$ 。当 $n_B > 0$ 时, 式(3.5.32)只有最小二乘解。

选择加权多项式 $P(z^{-1})$ 、 $Q(z^{-1})$ 、 $R(z^{-1})$ 和 $S(z^{-1})$ 的方法可归纳如下:

(1) 引入积分器。取 $P(z^{-1}) = R(z^{-1})$, $Q(1) = 0$, 离线凑试 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使其满足

$$P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (3.5.34)$$

在线校正 $S(z^{-1})$ 使其满足

$$Q(z^{-1})D(z^{-1}) - H(z^{-1})S(z^{-1}) = 0, \quad S(1) = 0 \quad (3.5.35)$$

为简便可选 $P(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 1$, $Q(z^{-1}) = \lambda(1 - z^{-1})$, 于是式(3.5.20)为

$$B(z^{-1}) + \lambda(1 - z^{-1})A(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (3.5.36)$$

(2) 不引入积分器。离线凑试 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使其满足

$$P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1$$

由式(3.4.39)和式(3.5.35)在线选择 $R(z^{-1})$ 和 $S(z^{-1})$, 即

$$R(1) = \frac{[P(1)C(1) - G(1)]Q(1)}{H(1)} + P(1) \quad (3.5.37)$$

$$Q(z^{-1})D(z^{-1}) - H(z^{-1})S(z^{-1}) = 0 \quad (3.5.38)$$

$$S(1) = \frac{Q(1)D(1)}{H(1)} \quad (3.5.39)$$

在上述选择加权多项式的方法中, 对 $S(1)$ 提出了要求, 这是因为在一般情况下, 由式(3.5.35)和式(3.5.38)只能求得近似解, 不能完全实现对可测干扰的动态补偿。

3.5.2 广义最小方差自校正前馈控制器设计

1. 控制问题描述

被控对象采用式(3.5.1)进行描述, 多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 、 $B_2(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的阶次 n_A 、 n_B 、 n_{B_2} 和 n_C 已知, 对象时延 d 和 d_{B_2} 已知, 多项式 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 、

$B_2(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的系数未知,且被控对象可以是非最小相位的。

控制目标是,当被控对象模型式(3.5.1)的参数未知,设计广义最小方差自校正前馈控制器,使得被控对象的广义输出 $\phi(k+d)$ 与广义理想输出 $y^*(k+d)$ 之间的误差的方差最小,即

$$\min J = \min E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) + Q(z^{-1})u(k)]^2\} \quad (3.5.40)$$

2. 自校正前馈控制器

由于 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 、 $B_2(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知,因此前馈控制器式(3.5.12)中的 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 、 $D(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 未知,采用隐式算法直接对前馈控制器参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 、 $D(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 进行估计,因此首先求取前馈控制器的参数 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 、 $D(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的辨识方程。

1) 控制器参数辨识方程

首先求控制器参数辨识方程和控制律方程。由式(3.5.7)和式(3.5.10)可得控制器参数辨识方程

$$\begin{aligned} \phi(k) = & G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) + D(z^{-1})v(k-d_{B2}) \\ & - C^*(z^{-1})\phi^*(k | k-d) + F(z^{-1})\xi(k) \end{aligned} \quad (3.5.41)$$

由式(3.5.11)和式(3.5.41)可得控制律方程

$$\begin{aligned} G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) + D(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) - C^*(z^{-1})\phi^*(k+d | k) \\ = y^*(k+d) \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

式中

$$y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) - S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \quad (3.5.43)$$

由最优预报式(3.5.7)可知

$$C(z^{-1})\phi^*(k | k-d) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) + D(z^{-1})v(k-d_{B2}) \quad (3.5.44)$$

于是有

$$\begin{aligned} \phi^*(k | k-d) = & G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) + D(z^{-1})v(k-d_{B2}) \\ & - C^*(z^{-1})\phi^*(k | k-d) \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

定义数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k) = & [y(k), \dots, y(k-n_G), u(k), \dots, u(k-n_H), \\ & v(k+d-d_{B2}), \dots, v(k+d-d_{B2}-n_D), \\ & -\phi^*(k+d-1 | k-1), \dots, -\phi^*(k+d-n_C | k-n_C)]^T \end{aligned} \quad (3.5.46)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [g_0, \dots, g_{n_G}, h_0, \dots, h_{n_H}, d_0, \dots, d_{n_D}, c_1, \dots, c_{n_C}]^T \quad (3.5.47)$$

由式(3.5.45), $\phi^*(k | k-d)$ 可以写成

$$\phi^*(k | k-d) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} \quad (3.5.48)$$

控制器参数辨识方程式(3.5.41)为

$$\phi(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d) \boldsymbol{\theta} + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.5.49)$$

2) 参数估计算法及自校正前馈控制器方程

由于 $F(z^{-1})\xi(k)$ 与 $\hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}$ 不相关, 故可用递推最小二乘法辨识控制器参数。但因 $\hat{\phi}(k)$ 中的 $\phi^*(k+d-1|k-1)\cdots$ 未知, 由式(3.5.48), 可用它的估计值代替, 为此引入记号

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k) = & [y(k), \dots, y(k-n_G), u(k), \dots, u(k-n_H), \\ & v(k+d-d_{B2}), \dots, v(k+d-d_{B2}-n_D), \\ & -\bar{y}(k+d-1), \dots, -\bar{y}(k+d-n_C)]^T\end{aligned}\quad (3.5.50)$$

式中

$$\bar{y}(k+d) = \hat{\phi}^T(k)\hat{\theta}(k) \quad (3.5.51)$$

于是参数估计的最小二乘递推算法如下

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[\phi(k) - \hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}(k-1)] \quad (3.5.52)$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)\hat{\phi}(k-d)}{1 + \hat{\phi}^T(k-d)P(k-1)\hat{\phi}(k-d)} \quad (3.5.53)$$

$$P(k) = [I - K(k)\hat{\phi}^T(k-d)]P(k-1) \quad (3.5.54)$$

由参数已知时的广义最小方差前馈控制律式(3.5.12)可写成

$$\hat{\phi}^T(k)\hat{\theta}(k) = y^*(k+d) \quad (3.5.55)$$

用估计的参数代替真实参数, 自校正前馈控制律为

$$\hat{\phi}^T(k)\hat{\theta}(k) = y^*(k+d) \quad (3.5.56)$$

综上所述, 自校正前馈控制算法的计算步骤总结如下:

- (1) 测取 $y(k)$ 、 $v(k)$ 和 $w(k)$;
- (2) 形成数据向量 $\hat{\phi}(k-d)$;
- (3) 用递推最小二乘法式(3.5.52)~式(3.5.54)估计参数 $\hat{\theta}(k)$;
- (4) 用式(3.5.56)计算控制律 $u(k)$;
- (5) 用式(3.5.35)校正 $S(z^{-1})$, 或由式(3.5.37)~式(3.5.39)校正 $R(z^{-1})$ 和 $S(z^{-1})$;
- (6) 由式(3.5.51)求 $\phi^*(k+d|k)$ 的估计值 $\bar{y}(k+d)$;
- (7) 返回步骤(1)。

3.5.3 仿真实验

为了验证广义最小方差前馈控制律和广义最小方差自校正前馈控制律的有效性, 我们进行下列的仿真实验。

例 3.5.1 广义最小方差前馈控制器和广义最小方差自校正前馈控制器的仿真实验带可测扰动的开环不稳定非最小相位的被控对象模型为

$$\begin{aligned}(1 - 1.7z^{-1} - 0.6z^{-2})y(k) = & z^{-2}(1.0 + 2.0z^{-1})u(k) + (1 - 2.5z^{-1})v(k-3) \\ & + (1 - 0.4z^{-1})\xi(k)\end{aligned}$$

式中, $\xi(k)$ 为均值为 0、方差为 0.5 的独立随机噪声, 运行时间从 $k=1$ 到 $k=400$ 。

参考输入为

$$w(k) = 5 + 5\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi k}{150}\right)$$

可测扰动为

$$v(k) = 0 + 6.0\operatorname{sgn}\left[\sin\left(\frac{\pi k}{150} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

由 $n_A=2$ 、 $n_B=1$ 、 $n_{B2}=1$ 、 $n_C=1$ 、 $d=2$ 、 $d_{B2}=3$ 可知 $n_G=1$ 、 $n_H=2$ 、 $n_D=2$ 。离线选择加权项

$$P(z^{-1}) = 1$$

$$\lambda = 0.18$$

(1) 广义最小方差前馈控制器

当被控对象模型参数已知时, 可得广义最小方差前馈控制器方程为

$$(2.08 + 2.868z^{-1} + 2.6z^{-2})u(k) = -(2.81 + 0.78z^{-1})y(k) + (0.532 - 0.2128z^{-1})w(k) \\ - (0.46 - 0.984z^{-1} - 3.25z^{-2})v(k-1)$$

广义最小方差前馈控制器的仿真结果如图 3.5.2 所示, 可以看出, 当被控对象模型参数已知时, 采用上述的广义最小方差前馈控制器, 可以使得闭环系统稳定, 跟踪非零的参考输入, 且能够消除稳态跟踪误差。

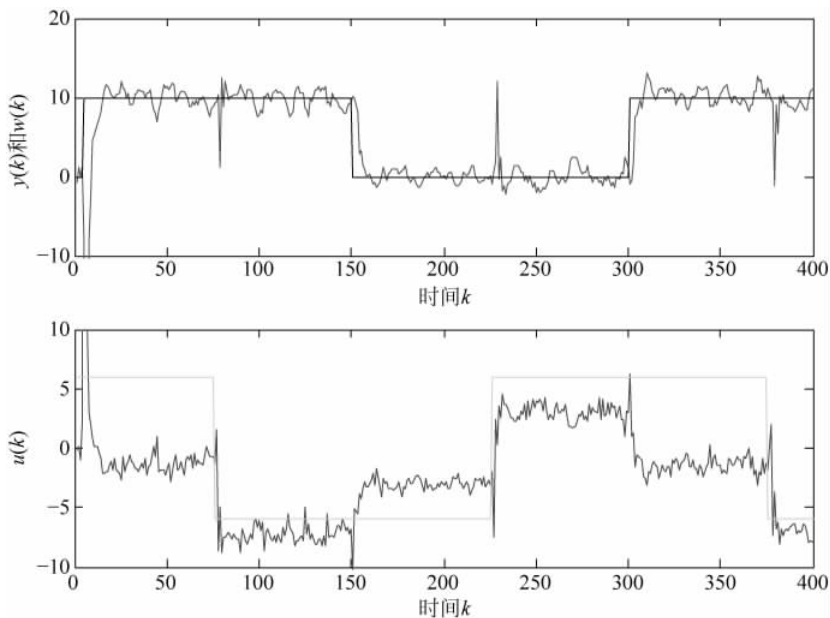


图 3.5.2 采用广义最小方差前馈控制器时的被控对象输出、参考输入、控制输入和可测干扰

(2) 广义最小方差自校正前馈控制器

当上述被控对象模型参数未知时,采用广义最小方差自校正前馈控制器进行仿真实验。控制器阶次不变,加权阵选择不变,对控制器参数进行估计。数据向量 $\hat{\phi}(k)$ 和参数向量 θ 分别为

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k) &= [y(k), y(k-1), u(k), u(k-1), u(k-2), v(k-1), \\ &\quad v(k-2), v(k-3), -\bar{y}(k+1)]^T \\ \theta &= [g_0, g_1, h_0, h_1, h_2, d_0, d_1, d_2, c_1]^T\end{aligned}$$

仿真实验结果如图 3.5.3 和图 3.5.4 所示,其中图 3.5.3 为采用广义最小方差自校正前馈控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 和可测干扰 $v(k)$ 的曲线,图 3.5.4 为控制器参数估计的曲线。

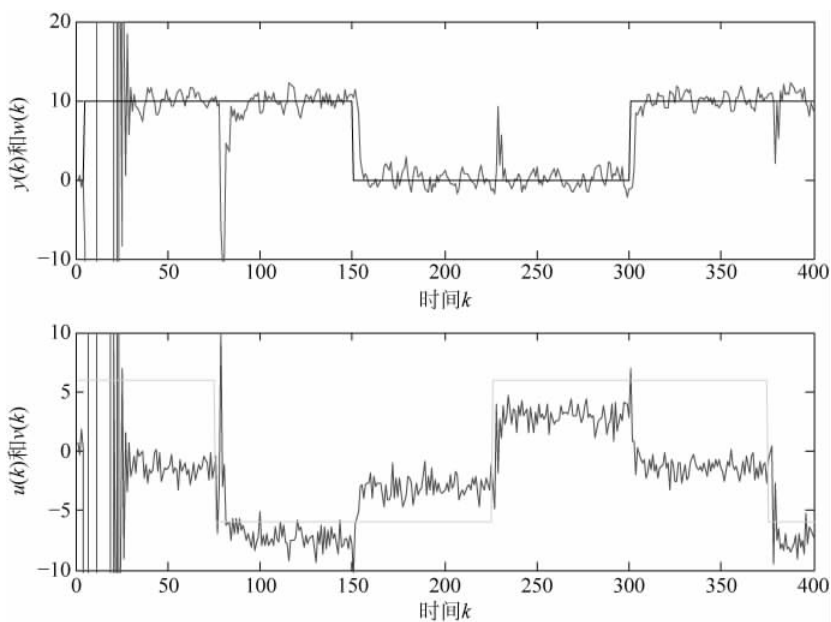


图 3.5.3 采用广义最小方差自校正控制器时的被控对象输出、参考输入、控制输入和可测干扰

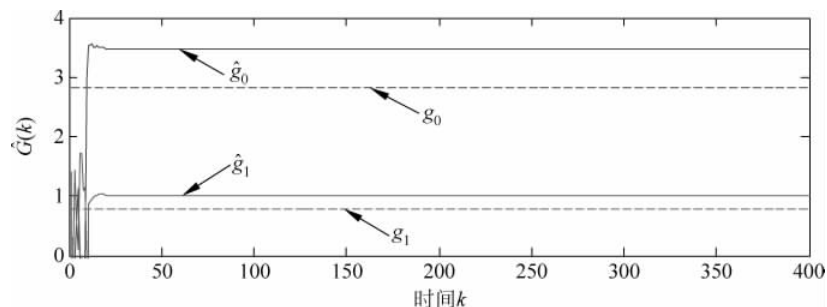


图 3.5.4 广义最小方差自校正前馈控制器的控制器参数估计曲线

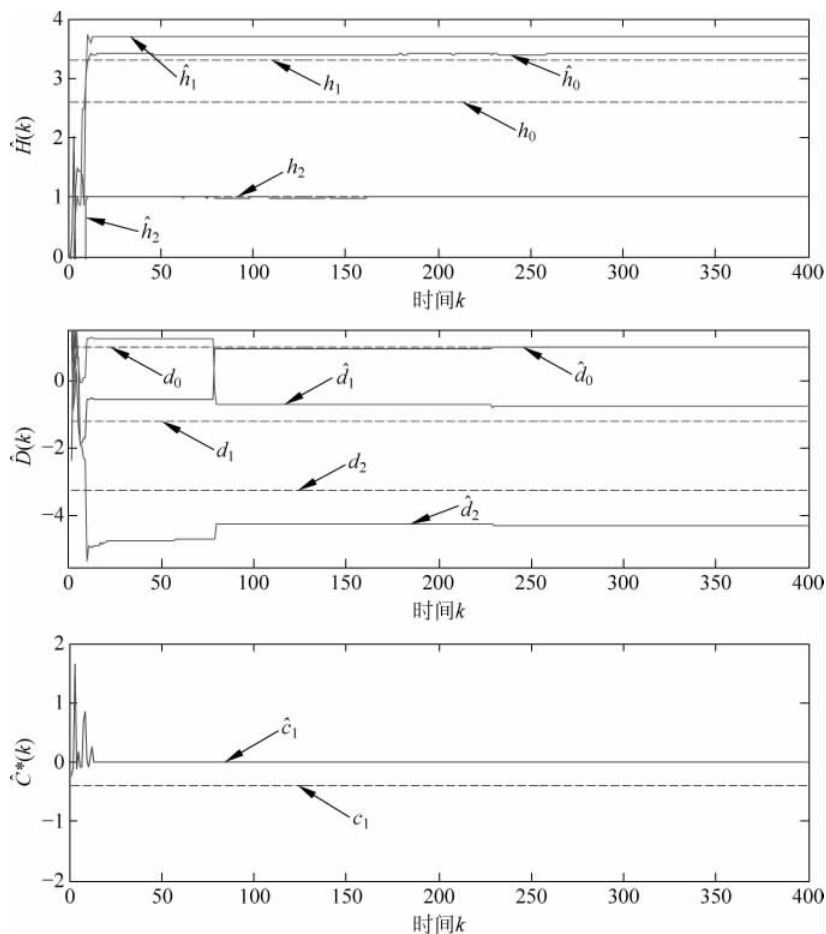


图 3.5.4 (续)

3.5.4 自校正前馈控制算法的全局收敛性分析

前面介绍了基于最小方差的自校正调节器、基于广义最小方差的自校正控制器和自校正前馈控制器,从性能指标来看,广义最小方差自校正前馈控制器的性能指标是

$$J = E\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) + Q(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})v(k+d-d_{B2})]^2\} \quad (3.5.57)$$

它概括了上述各类自校正控制算法的性能指标。从控制律和闭环系统方程来看,广义最小方差前馈控制律也可统一广义最小方差控制律、最小方差调节律。在自校正情况下无论从控制器参数辨识方程、控制律方程还是从自校正控制算法本身都可看出,自校正调节器、自校正控制器都是自校正前馈控制器的特例。因此只要能证明自校正前馈控制器的全局收敛性,那么自校正调节器、自校正控制器的全局收敛性问题也就迎刃而解了。

1. 什么是自适应控制算法的全局收敛性?

全局收敛性表示自适应控制算法的稳定性和控制性能指标是否收敛到期望的最优特性,对于确定性被控对象,自适应控制算法的稳定性是指输入输出是否有界,收敛性是指 $k \rightarrow \infty$ 时,性能指标是否收敛到参数已知时性能指标的最佳值。对于随机被控对象,自适应控制算法的稳定性是指输入输出的采样均方是否有界,收敛性是指性能指标的条件采样均方取得参数已知时性能指标的整体最小值。

为什么要研究自适应控制算法的全局收敛性呢?当被控对象的参数已知时,采用最小方差调节律、控制律和广义最小方差控制律、前馈控制律可使闭环系统稳定且可取得性能指标的最小值;但是当被控对象参数未知时,需要采用自校正控制策略,这时控制器的参数是用辨识算法的估计值代替,而估计值一般不收敛到真值,因此用估计值取代真参数来确定的控制律与参数已知时求得的最优控制律就不相同,它所组成的自适应控制系统就不一定能保证稳定,也不一定能保证性能指标取得最小值。为了保持自适应控制系统的稳定性和收敛性就必须研究如何使自适应控制算法具有全局收敛性,同时自适应控制算法的全局收敛性也是评价自适应控制算法好坏的标准,它为改进自适应控制算法提供了方向。

自适应控制算法的全局收敛性分析一直是自适应控制理论中具有相当难度和重要意义的课题,经过许多学者的长期研究,直到 20 世纪 80 年代初才取得了突破性进展。首先对基于最小方差控制策略的确定性被控对象和随机被控对象的自适应控制算法及对基于最小方差控制策略用于具有任意时延的随机被控对象,采用随机梯度法和改进型最小二乘法的自校正控制算法都已先后给出了全局收敛性的证明,但上述这些算法只适用于最小相位被控对象。随后对可适用于非最小相位且其有任意时延的随机被控对象,采用梯度法和改进型最小二乘法的自校正控制器和自校正前馈控制器也得到了全局收敛性的证明结果。

具有全局收敛性的自校正前馈控制器辨识方程采用改进型最小二乘法,因此下面首先介绍改进型最小二乘法。

2. 改进型最小二乘法

如果自校正前馈控制器采用最小二乘估计算法,为了证明全局收敛性,需要对辨识算法进行修改。对最优预报 $\phi^*(k|k-d)$ 进行近似估计时,需要采用后验预报即将式(3.5.51)改为

$$\bar{y}(k) = \hat{\phi}^T(k-d) \hat{\theta}(k) \quad (3.5.58)$$

前面采用的辨识方程式(3.5.41)和控制律方程式(3.5.42)不仅需要已知 $\phi^*(k|k-d)$ 的近似预报 $\bar{y}(k)$,而且需要知道 $\phi^*(k+d-1|k-1)$,这就需要知道 $\bar{y}(k+d-1)$ 即 $\hat{\phi}^T(k-1) \hat{\theta}(k+d-1)$,显然求不出来,故需对辨识方程和控制律方程进行修改以便式中只包含 $\phi^*(k|k-d)$,由式(3.5.7)知

$$C(z^{-1})\phi^*(k+d|k) = G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) + D(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \quad (3.5.59)$$

引入恒等式

$$1 = \bar{F}(z^{-1})C(z^{-1}) + z^{-d}\bar{G}(z^{-1}), \quad n_F = d-1, \quad n_G = n_C - 1 \quad (3.5.60)$$

由于 $C(z^{-1})$ 与 z^{-d} 互质, 故可由式(3.5.60)解出 $\bar{F}(z^{-1})$ 和 $\bar{G}(z^{-1})$, 用 $\bar{F}(z^{-1})$ 乘式(3.5.59)两边并利用式(3.5.60)可得

$$\begin{aligned} \phi^*(k+d|k) &= \alpha(z^{-1})y(k) + \beta(z^{-1})u(k) + \beta_2(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \\ &\quad + \bar{G}(z^{-1})\phi^*(k|k-d) \end{aligned} \quad (3.5.61)$$

式中

$$\alpha(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})G(z^{-1}) \quad (3.5.62)$$

$$\beta(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})H(z^{-1}) \quad (3.5.63)$$

$$\beta_2(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})D(z^{-1}) \quad (3.5.64)$$

由式(3.5.10)、式(3.5.11)和式(3.5.61)可得控制器参数的辨识方程和控制律方程

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \alpha(z^{-1})y(k-d) + \beta(z^{-1})u(k-d) + \beta_2(z^{-1})v(k-d_{B2}) \\ &\quad + \bar{G}(z^{-1})\phi^*(k-d|k-2d) + F(z^{-1})\xi(k) \end{aligned} \quad (3.5.65)$$

$$\alpha(z^{-1})y(k) + \beta(z^{-1})u(k) + \beta_2(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) + \bar{G}(z^{-1})\phi^*(k|k-d) = y^*(k+d) \quad (3.5.66)$$

式中

$$y^*(k+d) = R(z^{-1})w(k) - Q(z^{-1})u(k) - S(z^{-1})v(k+d-d_{B2}) \quad (3.5.67)$$

定义数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k) &= [y(k), \dots, y(k-n_a), u(k), \dots, u(k-n_\beta), \\ &\quad v(k+d-d_{B2}), \dots, v(k+d-d_{B2}-n_{\beta_2}), \\ &\quad \phi^*(k|k-d), \dots, \phi^*(k-n_C+1|k-n_C-d+1)]^T \end{aligned} \quad (3.5.68)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_0, \dots, \alpha_{n_a}, \beta_0, \dots, \beta_{n_\beta}, \beta_{2,0}, \beta_{2,1}, \dots, \beta_{2,n_{\beta_2}}, \bar{g}_0, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n_C-1}]^T \quad (3.5.69)$$

于是式(3.5.65)和式(3.5.66)可分别写成

$$\phi(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-d)\boldsymbol{\theta} + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.5.70)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta} = y^*(k+d) \quad (3.5.71)$$

这样即可采用下列改进型最小二乘辨识算法来估计控制器参数

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-d) + a(k-d)\mathbf{P}(k-d)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)[\phi(k) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-d)] \quad (3.5.72)$$

$$\mathbf{P}(k-d) = \mathbf{P}(k-2d) - \frac{\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-2d)\mathbf{P}(k-2d)}{1 + \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)} \quad (3.5.73)$$

$$a(k-d) = 1 \quad (3.5.74)$$

其中, $\mathbf{P}(-2d) = \mathbf{P}(-2d+1) = \dots = \mathbf{P}(-d) = \delta\mathbf{I}$ (δ 为正数); 如果下列条件①和条件②不满足, 则 $\mathbf{P}(k-d)$ 和 $a(k-d)$ 按式(3.5.79)和式(3.5.80)取值, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)$ 见式(3.5.81)。

$$\text{条件①} \quad r(k-d) \operatorname{tr}[\mathbf{P}(k-d)] \leq K_1 < \infty \quad (3.5.75)$$

式中, $\operatorname{tr}[\cdot]$ 表示矩阵的迹, 即矩阵主对角元素之和

$$r(k-d) = r(k-d-1) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d) \quad (3.5.76)$$

其中

$$r(-d-1) = r(-d) = \cdots = r(-1) = n_a + n_\beta + n_{\bar{G}} + 1 \quad (3.5.77)$$

$$\text{条件②} \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-2d) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d) \leq K_2 < \infty \quad (3.5.78)$$

如果条件①和条件②不满足, 那么

$$\mathbf{P}(k-d) = \frac{r(k-2d)}{r(k-d)} \mathbf{P}(k-2d) \quad (3.5.79)$$

$$a(k-d) = \frac{1}{1 + \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)} \quad (3.5.80)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d) = & [y(k-d), \cdots, y(k-d-n_a), \\ & u(k-d), \cdots, u(k-d-n_\beta), \\ & v(k-d_{B2}), \cdots, v(k-d_{B2}-n_{\beta 2}), \\ & \bar{y}(k-d), \cdots, \bar{y}(k-d-n_c+1)]^T \end{aligned} \quad (3.5.81)$$

其中

$$\bar{y}(k) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \quad (3.5.82)$$

由下式求 $u(k)$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = y^*(k+d) \quad (3.5.83)$$

3. 基于改进型最小二乘法的自校正前馈控制算法的全局收敛性分析

应用改进型最小二乘法可以证明上述自校正前馈控制算法具有全局收敛性。

假设 3.5.1 假设被控对象满足如下条件:

(1) 被控对象模型式(3.5.1)的 $A(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$ 、 $B_2(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 的阶次 n_A 、 n_B 、 n_{B2} 和 n_C 的上界已知, d 和 d_{B2} 已知, 且 $d \leq d_{B2}$;

(2) $\xi(k)$ 具有下列性质

$$E[\xi(k) | F_{k-1}] = 0, \quad \text{a. s.} \quad E[\xi^2(k) | F_{k-1}] = \sigma^2, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.84)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.85)$$

式中, $\{F_{k-1}\}$ 为非降子 σ -代数族, 定义参见附录 A.2;

(3) $\left[\frac{1}{\bar{C}(z^{-1})} - \frac{1}{2} \right]$ 严正实, 式中, $\bar{C}(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})C(z^{-1}) = 1 - z^{-d}\bar{G}(z^{-1})$;

(4) 满足选择 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 使 $[P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})]$ 稳定。

引理 3.5.1 递推算法式(3.5.72)~式(3.5.82)具有下列性质:

$$(1) \quad r(k-d) \operatorname{tr} \mathbf{P}(k-d) \leq K_1 < \infty; \quad (3.5.86)$$

$$(2) \sum_{k=d}^{\infty} \frac{O(k)}{r(k-d)} \leq K_3 < \infty; \quad (3.5.87)$$

$$(3) 1 - O(k) \geq \frac{1}{K_4} > 0; \quad (3.5.88)$$

$$(4) e(k) = \frac{\eta(k)}{1 - O(k)}, \text{ 式中} \quad (3.5.89)$$

$$e(k) = \phi(k) - y^*(k) \quad (3.5.90)$$

$$\eta(k) = \phi(k) - \bar{y}(k) \quad (3.5.91)$$

$$O(k) = a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d) \quad (3.5.92)$$

证明

(1) 由式(3.5.73)、式(3.5.75)、式(3.5.79)可证式(3.5.86)。

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=d}^{\infty} \frac{a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \\ & \leq \sum_{t=d}^{\infty} [\lambda_{\max} \mathbf{P}(k-d)] \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \\ & \quad (\text{因为 } a(k-d) \leq 1, \lambda_{\max} \mathbf{P}(k-d) \text{ 为最大特征值}) \\ & \leq \sum_{t=d}^{\infty} r(k-d) \operatorname{tr} \mathbf{P}(k-d) \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r^2(k-d)} \\ & \quad (\text{因为 } \operatorname{tr} \mathbf{P}(k-d) \geq \lambda_{\max} \mathbf{P}(k-d)) \\ & \leq \sum_{t=d}^{\infty} K_1 \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r^2(k-d)} \quad (\text{利用式(3.5.86)}) \\ & \leq \sum_{t=d}^{\infty} K_1 \frac{r(k-d) - r(k-d-1)}{r(k-d)r(k-d-1)} \quad (\text{利用式(3.5.76)}) \\ & = \sum_{t=d}^{\infty} K_1 \left[\frac{1}{r(k-d-1)} - \frac{1}{r(k-d)} \right] \\ & \leq K_1 \frac{1}{r(-1)} = K_3 < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & 1 - a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d) \\ & = 1 - \frac{1}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d) \\ & \quad (\text{利用式(3.5.80)}) \\ & = \frac{1}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \\ & \geq \frac{1}{1 + \lambda_{\max} \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \\ & \geq \frac{1}{1 + r(k-d) \operatorname{tr} \mathbf{P}(k-d) \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)}} \quad (\text{因为 } \operatorname{tr} \mathbf{P}(k-d) \geq \lambda_{\max} \mathbf{P}(k-d)) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{1+K_1} > 0 \quad \left(\text{因为 } 0 < \frac{r(k-d)-r(k-d-1)}{r(k-d)} < 1 \right)$$

(4) 对式(3.5.72)左乘 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)$, 并利用式(3.5.82)、式(3.5.83)、式(3.5.90)、式(3.5.91)和式(3.5.92)有

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) &= \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-d) + a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d) \\ &\quad [\phi(k) - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-d)] \\ \eta(k) &= e(k) - a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d) e(k) \\ e(k) &= \frac{\eta(k)}{1 - a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \end{aligned}$$

从而引理得证。 ■

引理 3.5.2 当算法式(3.5.72)~式(3.5.83)应用于式(3.5.1)时, 闭环系统的输入输出方程为

$$\begin{aligned} &[P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})]y(k) \\ &= B(z^{-1})R(z^{-1})w(k-d) + [Q(z^{-1})B_2(z^{-1}) \\ &\quad - B(z^{-1})S(z^{-1})]v(k-d_{B2}) + Q(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) + B(z^{-1})e(k) \end{aligned} \quad (3.5.93)$$

和

$$\begin{aligned} &[P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})]u(k) \\ &= A(z^{-1})R(z^{-1})w(k) - [P(z^{-1})B_2(z^{-1}) \\ &\quad + A(z^{-1})S(z^{-1})]v(k+d-d_{B2}) \\ &\quad - P(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k+d) + A(z^{-1})e(k+d) \end{aligned} \quad (3.5.94)$$

证明 由性能指标式(3.5.57)知

$$e(k) = P(z^{-1})y(k) - R(z^{-1})w(k-d) + Q(z^{-1})u(k-d) + S(z^{-1})v(k-d_{B2}) \quad (3.5.95)$$

用 $B(z^{-1})$ 乘式(3.5.95)并利用式(3.5.1)即可得式(3.5.93), 同理用 $A(z^{-1})$ 乘式(3.5.95)并利用式(3.5.1)即可得式(3.5.94)。

定理 3.5.2 当满足假设 3.5.1 中的条件(1)~条件(4)时, 自校正前馈控制算法式(3.5.72)~式(3.5.83)应用于被控对象模型式(3.5.1)时, 依概率 1 有: 稳定性

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty \quad (3.5.96)$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.5.97)$$

收敛性

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{E}\{[P(z^{-1})y(k+d) - R(z^{-1})w(k) \\ &\quad + Q(z^{-1})u(k) + S(z^{-1})v(k+d-d_{B2})]^2 \mid F_k\} = \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.5.98)$$

还假设 $w(k)$ 和 $v(k)$ 为有界参考输入和扰动。

证明 第一部分: 定义

$$b(k) = -\hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}(k), \quad \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \theta_0 \quad (3.5.99)$$

$$z(k-d) = \eta(k) - \varepsilon(k), \quad \varepsilon(k) = F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.5.100)$$

$$h(k) = z(k-d) - \frac{1+\rho}{2}b(k) \quad (3.5.101)$$

由式(3.5.60)和式(3.5.61)可导出

$$\bar{C}(z^{-1})\phi^*(k | k-d) = \alpha(z^{-1})y(k-d) + \beta(z^{-1})u(k-d) + \beta_2(z^{-1})v(k-d_{B2}) \quad (3.5.102)$$

上式两边减 $\bar{C}(z^{-1})\bar{y}(k)$, ($\bar{C}(z^{-1}) = \bar{F}(z^{-1})C(z^{-1})$), 并按顺序利用式(3.5.60)、式(3.5.65)、式(3.5.91)、式(3.5.100)、式(3.5.82)和式(3.5.99)有

$$\begin{aligned} \bar{C}(z^{-1})[\phi(k) - \bar{y}(k) - \varepsilon(k)] &= \alpha(z^{-1})y(k-d) + \beta(z^{-1})u(k-d) \\ &\quad + \beta_2(z^{-1})v(k-d_{B2}) + \bar{G}(z^{-1})\bar{y}(k-d) - \bar{y}(k) \end{aligned} \quad (3.5.103)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}(z^{-1})z(k-d) &= \hat{\phi}^T(k-d)\theta_0 - \hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}(k) \\ &= -\hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}(k) \\ &= b(k) \end{aligned} \quad (3.5.104)$$

由式(3.5.101)和式(3.5.104)可得

$$h(k) = \left[\frac{1}{\bar{C}(z^{-1})} - \frac{1+\rho}{2} \right] b(k) \quad (3.5.105)$$

因为 $\left[\frac{1}{\bar{C}(z^{-1})} - \frac{1}{2} \right]$ 严正实, 选择 $0 < \rho < 1$, 使得 $\left[\frac{1}{\bar{C}(z^{-1})} - \frac{1+\rho}{2} \right]$ 仍保持其为严正实。

定义下列 Lyapunov 二次函数来分析收敛性

$$V(k) = \frac{\hat{\theta}^T(k)P^{-1}(k-d)\hat{\theta}(k)}{r(k-d)} \quad (3.5.106)$$

根据算法式(3.5.72)~式(3.5.83)两种不同形式来研究二次函数 $V(k)$ 的表示式。

对于第一种形式, 假设条件①和条件②满足(即式(3.5.75)和式(3.5.78)), 由式(3.5.73)有

$$P^{-1}(k-d) = P^{-1}(k-2d) + \hat{\phi}(k-d)\hat{\phi}^T(k-d) \quad (\text{使用求逆引理}) \quad (3.5.107)$$

上式两边左乘 $\hat{\theta}^T(k)$, 右乘 $\hat{\theta}(k)$, 并应用式(3.5.104)

$$\hat{\theta}^T(k)P^{-1}(k-d)\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}^T(k)P^{-1}(k-2d)\hat{\theta}(k) + b^2(k) \quad (3.5.108)$$

因为

$$P(k-d)\hat{\phi}(k-d) = \frac{P(k-2d)\hat{\phi}(k-d)}{1 + \hat{\phi}^T(k-d)P(k-2d)\hat{\phi}(k-d)} \quad (\text{利用式(3.5.73)}) \quad (3.5.109)$$

因此式(3.5.72)可写成

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-d) + \frac{P(k-2d)\hat{\phi}(k-d)}{1 + \hat{\phi}^T(k-d)P(k-2d)\hat{\phi}(k-d)}e(k) \quad (3.5.110)$$

上式左乘 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)$,并利用式(3.5.83)、式(3.5.80)、式(3.5.91)可得

$$\eta(k) = \frac{e(k)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \quad (3.5.111)$$

将式(3.5.111)代入式(3.5.110)有

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) + \mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)\eta(k) \quad (3.5.112)$$

将上式代入式(3.5.108)右边

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(k)\mathbf{P}^{-1}(k-d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k) &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(k-d)\mathbf{P}^{-1}(k-2d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) \\ &\quad + 2\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d)\eta(k) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)\eta^2(k) \\ &\quad + b^2(k) \end{aligned} \quad (3.5.113)$$

对上式中的 $2\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d)\eta(k)$,利用式(3.5.112)左乘 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)$ 及式(3.5.99),可将其化简,于是式(3.5.113)变为

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(k)\mathbf{P}^{-1}(k-d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k) &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(k-d)\mathbf{P}^{-1}(k-2d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) + b^2(k) - 2b(k)\eta(k) \\ &\quad - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)\eta^2(k) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) \\ &\quad - 2b(k)\left[z(k-d) - \frac{1+\rho}{2}b(k) + \frac{\rho}{2}b(k) + \varepsilon(k)\right] \\ &\quad - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)\eta^2(k) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) - \rho b^2(k) - 2b(k)h(k) \\ &\quad - 2b(k)\varepsilon(k) - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-2d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)\eta^2(k) \end{aligned} \quad (3.5.114)$$

上式推导中利用了式(3.5.100)和式(3.5.101)。根据式(3.5.106),并考虑到式(3.5.76),可将上式改写成

$$V(k) \leq V(k-d) - \frac{\rho b^2(k)}{r(k-d)} - \frac{2b(k)h(k)}{r(k-d)} - \frac{2b(k)\varepsilon(k)}{r(k-d)} \quad (3.5.115)$$

对于第二种形式,同样可求出类似上述 $V(k)$ 的表示式。

当条件①和条件②不满足时,应用式(3.5.72)和式(3.5.80)有

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) + \frac{\mathbf{P}(k-d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}e(k) \quad (3.5.116)$$

上式左乘 $\hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)$,并利用式(3.5.83)、式(3.5.82)、式(3.5.90)和式(3.5.91)可得

$$\eta(k) = \frac{e(k)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d)\mathbf{P}(k-d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)} \quad (3.5.117)$$

因此式(3.5.116)可写成

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(k) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(k-d) + \mathbf{P}(k-d)\hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)\eta(k) \quad (3.5.118)$$

利用式(3.5.79)和式(3.5.118),可求得

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}^T(k)P^{-1}(k-d)\bar{\theta}(k) &= \frac{r(k-d)}{r(k-2d)}\bar{\theta}^T(k-d)P^{-1}(k-2d)\bar{\theta}(k-d) \\
&\quad + 2\hat{\phi}^T(k-2d)\bar{\theta}(k-d)\eta(k) \\
&\quad + \hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d)\eta^2(k) \quad (3.5.119)
\end{aligned}$$

用 $\hat{\phi}^T(k-d)$ 左乘式(3.5.118)并利用式(3.5.99),可将式(3.5.119)简化成

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}^T(k)P^{-1}(k-d)\bar{\theta}(k) &= \frac{r(k-d)}{r(k-2d)}\bar{\theta}^T(k-d)P^{-1}(k-2d)\bar{\theta}(k-d) - 2b(k)\eta(k) \\
&\quad - \hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d)\eta^2(k) \\
&= \frac{r(k-d)}{r(k-2d)}\bar{\theta}^T(k-d)P^{-1}(k-2d)\bar{\theta}(k-d) \\
&\quad - 2b(k)\left[z(k-d) - \frac{1+\rho}{2}b(k) + \frac{1+\rho}{2}b(k) + \varepsilon(k)\right] \\
&\quad - \hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d)\eta^2(k) \\
&= \frac{r(k-d)}{r(k-2d)}\bar{\theta}^T(k-d)P^{-1}(k-2d)\bar{\theta}(k-d) - 2b(k)h(k) \\
&\quad - (1+\rho)b^2(k) - 2b(k)\varepsilon(k) \\
&\quad - \hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d)\eta^2(k) \quad (3.5.120)
\end{aligned}$$

上式推导中利用了式(3.5.100)和式(3.5.101),将上式改写,有

$$V(k) \leq V(k-d) - \frac{\rho b^2(k)}{r(k-d)} - \frac{2b(k)h(k)}{r(k-d)} - \frac{2b(k)\varepsilon(k)}{r(k-d)} \quad (3.5.121)$$

比较式(3.5.115)与式(3.5.121),显见对于第一、二两种形式,Laypunov 函数具有相同表达式,故可统一讨论。

下面对统一形式的式(3.5.115)进行进一步化简。首先看右边第四项。用 $\hat{\phi}^T(k-d)$ 左乘、 $\varepsilon(k)$ 右乘式(3.5.72)并利用式(3.5.99)可得

$$\begin{aligned}
-b(k)\varepsilon(k) &= \hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}(k-d)\varepsilon(k) + a(k-d)\hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d) \\
&\quad [e(k) - \varepsilon(k) + \varepsilon(k)]\varepsilon(k) \\
&= \hat{\phi}^T(k-d)\hat{\theta}(k-d)\varepsilon(k) + a(k-d)\hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d) \\
&\quad \{\phi^*(k|k-d) - y^*(k)\}\varepsilon(k) + \varepsilon^2(k) \quad (3.5.122)
\end{aligned}$$

对上式取条件期望,且 $[\phi^*(k|k-d) - y^*(k)]$ 为 F_{k-d} 可测,有

$$-E[b(k)\varepsilon(k) | F_{k-d}] = a(k-d)\hat{\phi}^T(k-d)P(k-d)\hat{\phi}(k-d)\gamma^2, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.123)$$

式中, $E[\varepsilon^2(k) | F_{k-d}] = \gamma^2$ 。

将式(3.5.123)代入式(3.5.115),并取条件期望

$$\begin{aligned}
E[V(k) | F_{k-d}] &\leq V(k-d) - \frac{\rho}{r(k-d)}E[b^2(k) | F_{k-d}] - \frac{2}{r(k-d)}E[b(k)h(k) | F_{k-d}] \\
&\quad + \frac{2a(k-d)\hat{\phi}^T(k-d)\bar{\theta}(k-d)\hat{\phi}(k-d)}{r(k-d)}\gamma^2 \quad (3.5.124)
\end{aligned}$$

如将上式右边第三项的 $b(k)$ 看成输入, $h(k)$ 看成输出, 根据正实引理则对任意的 k 可获得一正的标量函数

$$S(k) = 2 \sum_{j=d}^k b(j)h(j) + K, \quad 0 < K < \infty, \quad k \geq d \quad (3.5.125)$$

$$S(d-1) = K \quad (3.5.126)$$

于是式(3.5.124)可写成

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V(K) \mid F_{k-d}] + \mathbb{E}\left[\frac{S(k)}{r(k-d)} \mid F_{k-d}\right] \\ & \leq V(k-d) + \mathbb{E}\left[\frac{S(k-1)}{r(k-d-1)} \mid F_{k-d}\right] - \frac{\rho}{r(k-d)} \mathbb{E}[b^2(k) \mid F_{k-d}] \\ & \quad + \frac{2a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \gamma^2, \quad \text{a. s.} \end{aligned} \quad (3.5.127)$$

对上式从 d 到 N 求和并求非条件期望后有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V(N) + \cdots + V(N-d+1)] \\ & \leq \mathbb{E}[V(d-1) + \cdots + V(0)] + K - \mathbb{E}\left\{\sum_{k=d}^N \frac{\rho}{r(k-d)} \mathbb{E}[b^2(k) \mid F_{k-d}]\right\} \\ & \quad + 2\mathbb{E}\left[\sum_{k=d}^N \frac{a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \gamma^2\right] \end{aligned} \quad (3.5.128)$$

因为 $\mathbb{E}[V(N) + \cdots + V(N-d+1)]$ 为正数, 故有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\{\sum_{k=d}^N \frac{\rho}{r(k-d)} \mathbb{E}[b^2(k) \mid F_{k-d}]\right\} \\ & \leq \mathbb{E}[V(d-1) + \cdots + V(0)] + K \\ & \quad + 2\mathbb{E}\left[\sum_{k=d}^N \frac{a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \gamma^2\right] \end{aligned} \quad (3.5.129)$$

由式(3.5.87)知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=d}^N \frac{a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \gamma^2 < \infty \quad (3.5.130)$$

利用单调收敛定理

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left\{\sum_{k=d}^N \frac{a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \gamma^2\right\} \\ & = \mathbb{E}\left\{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=d}^N \frac{a(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k-d)}{r(k-d)} \gamma^2\right\} < \infty \end{aligned} \quad (3.5.131)$$

所以式(3.5.129)可写成

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=d}^N \frac{\rho}{r(k-d)} \mathbb{E}[b^2(k) \mid F_{k-d}] < \infty \quad (3.5.132)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=d}^N \frac{\rho b^2(k)}{r(k-d)}\right] < \infty \quad (3.5.133)$$

利用单调收敛定理及 Kronecker 引理(见附录引理 A.1.4), 且 $0 < \rho < 1$, 故有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{r(N)} \frac{1}{N} \sum_{k=d}^N b^2(k) = 0 \quad (3.5.134)$$

第二部分: 利用式(3.5.89)和式(3.5.100)

$$\begin{aligned} e^2(k) &= \frac{[z(k-d) + \varepsilon(k)]^2}{[1 - a(k-d) \hat{\phi}^T(k-d) \mathbf{P}(k-d) \hat{\phi}(k-d)]^2} \\ &\leq 2K_4^2 [z^2(k-d) + \varepsilon^2(k)] \end{aligned} \quad (3.5.135)$$

由式(3.5.84)和式(3.5.85)有

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \leq \frac{K_5}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k-d) + K_6 \quad (3.5.136)$$

因 $[P(z^{-1})B(z^{-1}) + Q(z^{-1})A(z^{-1})]$ 稳定, $w(k)$ 、 $v(k)$ 和 d 有界, 由引理 3.5.2 和附录引理 A.1.2 可得

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \leq \frac{K_7}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) + K_8 \leq \frac{K_{15}}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k) + K_9 \quad (3.5.137)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) \leq \frac{K_{10}}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k+d) + K_{11} \leq \frac{K_{12}}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k) + K_{13} \quad (3.5.138)$$

由式(3.5.91)和式(3.5.100)知

$$\begin{aligned} [\bar{y}(k+d)]^2 &= [\phi(k+d) - z(k) - \varepsilon(k+d)]^2 \\ &\leq 3\phi^2(k+d) + 3z^2(k) + 3\varepsilon^2(k+d) \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}^2(k+d) &\leq \frac{K_{14}}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k) + K_{16} \end{aligned} \quad (3.5.139)$$

由于 $\bar{C}(z^{-1})$ 稳定, 由式(3.5.76)、式(3.5.104)、式(3.5.137)~式(3.5.139)有

$$\frac{r(N)}{N} \leq \frac{C_1}{N} \sum_{k=1}^N b^2(k) + C_2 \quad (3.5.140)$$

因此由式(3.5.134)及 $\bar{C}(z^{-1})$ 的稳定性可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b^2(k)}{\frac{C_1}{N} \sum_{k=1}^N b^2(k) + C_2} = 0, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.141)$$

因此有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N b^2(k) = 0 \quad \text{及} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k) = 0, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.142)$$

由式(3.5.140)得

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{r(N)}{N} < \infty, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.143)$$

于是有

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.144)$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.145)$$

由式(3.5.89)和式(3.5.100)

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=d}^N [e(k) - \epsilon(k)]^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=d}^N \frac{1}{[1 - O(k)]^2} [z(k-d) + O(k)\epsilon(k)]^2 \\ &\leq \frac{2K_4^2}{N} \sum_{k=d}^N [z^2(k-d) + O^2(k)\epsilon^2(k)] \end{aligned} \quad (3.5.146)$$

由于 $O(k) \leq 1$, 可得

$$\sum_{k=d}^N \frac{O^2(k)}{r(k-d)} < \infty, \quad \text{a. s.} \quad \text{或} \quad \sum_{k=d}^N \frac{O(k)E[\epsilon^2(k) | F_{k-d}]}{r(k-d)} < \infty, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.147)$$

应用单调收敛定理及 Kronecker 引理与式(3.5.143), 故有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=d}^N O^2(k)\epsilon^2(k) = 0, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.148)$$

故式(3.5.146)有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=d}^N [e(k) - \epsilon(k)]^2 = 0, \quad \text{a. s.} \quad (3.5.149)$$

但

$$\begin{aligned} E[e^2(k) | F_{k-d}] &= E\{[e(k) - \epsilon(k) + \epsilon(k)]^2 | F_{k-d}\} \\ &= [e(k) - \epsilon(k)]^2 + E[\epsilon^2(k) | F_{k-d}] \end{aligned} \quad (3.5.150)$$

故有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=d}^N E[e^2(k) | F_{k-d}] = E[\epsilon^2(k) | F_{k-d}] \quad (3.5.151)$$

从而定理得证。 ■

前面介绍的自校正控制器都采用隐式方式来实现,正如 3.1 节概述中指出的那样,隐式算法因省去了求控制器参数这一步,故可避免病态方程的求解程度,使算法具有较强的鲁棒性。但如被控对象的时延 d 过大,由于控制器参数 $H(z^{-1})$ 的阶次为 $n_B + d - 1$,而使所要辨识的参数个数大大增加。此外,从定理 3.5.2 可看出隐式算法的全局收敛性要求 $\left[\frac{1}{\bar{C}(z^{-1})} - \frac{1}{2} \right]$ 严正实, $\bar{C}(z^{-1})$ 与控制器参数 $\bar{F}(z^{-1})$ 和 $\bar{G}(z^{-1})$ 有关,而与被控对象的参数直接关系很难反映出来,从而很难判断被控对象是否符合自校正控制算法全局收敛所要求的条件。显式自校正控制算法的全局收敛性条件直接与被控对象的参数相联系,这样就促使一些学者研究基于最小方差和广义最小方差控制律的显式自校正控制器。目前基于最小方差的自校正控制器和基于广义最小方差的自校正前馈控制器均已先后提出,为了保证算法的全局收敛性,显式自校正控制算法采用了与上面介绍的自校正控制算法完全不同的 d 步超前最优预报器。

当参数未知被控对象受到可测干扰的扰动时,当可测干扰与被控对象输出之间的模型参数未知时,为了消除可测干扰对输出的影响,就需要采用自校正前馈控制器。同隐式自校正前馈控制器类似,显式自校正控制方案采用类似的前馈控制策略就可以获得显式自校正前馈控制器。

显式自校正前馈控制器的全局收敛性分析详见文献[11],隐式自校正控制器的全局收敛性分析详见文献[12]。

3.6 零极点配置自校正控制器

前面介绍的自校正控制器是基于最优控制策略设计的,它要求被控对象的时延已知且不变化,而且性能指标中加权多项式的选择也比较费事。实际上许多被控对象往往是非最小相位,且其时延是未知、变化的,处理这类被控对象的有效控制方法是采用零极点配置策略,它是一种经典的控制系统设计综合方法,其中心思想是将闭环系统的极点配置到设计者预先规定的位置上。众所周知,对于线性定常被控对象来说,闭环系统的极点分布决定着闭环系统的稳定性,零极点的分布与闭环系统的控制性能,例如上升时间、超调量、振荡次数和建立时间等密切相关,因此进行闭环零极点配置,易于将零极点位置与闭环系统的动态响应联系起来,易于被人们掌握。此外,通过特殊的零极点配置,还可导出最小方差控制律或广义最小方差控制律;而且不管被控对象是否开环不稳,是否是非最小相位,总可以通过适当的闭环极点配置使闭环系统稳定。因此从20世纪70年代中期开始,一些学者就开始了将零极点配置控制策略应用于自适应控制中的研究。早期的工作主要集中在连续被控对象的极点配置方面,后来才注意到采用输入输出模型的离散被控对象。研究表明,离散被控对象的极点配置算法不仅简单,而且能方便地把被控对象的时延纳入零点多项式,因而能够控制具有未知、变化时延的被控对象。基于极点配置的自校正调节器解决了随机离散被控对象的自适应极点配置问题,但它只能进行调节而不能跟踪时变参考输入。伺服自校正控制器,将前馈与反馈结合起来实现了对随机离散被控对象的自适应极点配置,且可跟踪时变参考输入,但结构和算法都比较复杂。基于零极点配置的自校正控制器可以跟踪时变参考输入,且可对零极点进行配置,但它只适用于确定性被控对象。

零极点配置的参数可凋控制器是零极点配置控制器,为此首先介绍当被控对象模型已知时的零极点配置控制器设计。

3.6.1 零极点配置控制器设计

1. 控制问题描述

设被控对象的数学模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.1)$$

式中, $A(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})$ 与式(3.4.1)相应项的定义相同, 而多项式

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_i z^{-i} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B} \quad (3.6.2)$$

如果被控对象的时延为 d 时, 将 $b_i (i=0, 1, \cdots, d-1)$ 置为零即可。同时假设 $A(z^{-1})$ 与 $B(z^{-1})$ 互质, 即两者无公因子。

控制的目的是将闭环系统的零极点配置到理想位置, 使输出 $y(k)$ 与参考输入 $w(k)$ 之间的闭环传递函数为 $\frac{B_m(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})}$, 并要求闭环传递函数的稳态增益为 1, 消除输出 $y(k)$ 与参考输入 $w(k)$ 之间的稳态误差。

$T(z^{-1})$ 是首 1 的稳定多项式, 其零点是理想的闭环系统极点, $B_m(z^{-1})$ 代表理想的闭环系统零点, 且有 $B_m(z^{-1})$ 与 $T(z^{-1})$ 互质。这里在闭环极点中加进 $C(z^{-1})$ 是为了抑制随机干扰噪声。

2. 零极点配置控制器

采用下列控制器方程

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.6.3)$$

式中, $H(z^{-1})$ 、 $G(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$ 为 z^{-1} 多项式, 其阶次和系数待定。

控制器的结构图如图 3.6.1 所示。

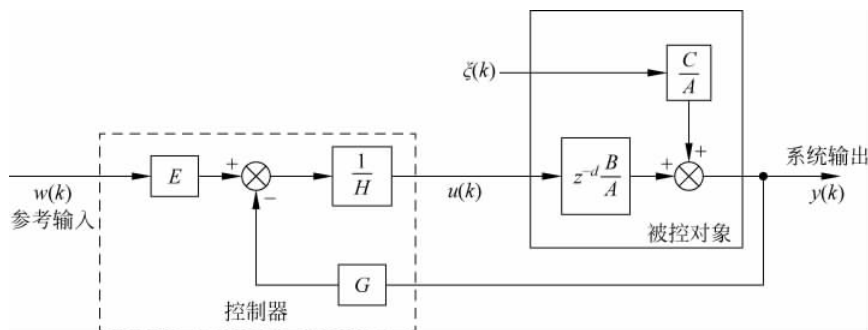


图 3.6.1 零极点配置控制器结构框图

闭环系统方程可由式(3.6.3)求出 $u(k)$ 再代入式(3.6.1)得到, 即

$$[A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})]y(k) = B(z^{-1})E(z^{-1})w(k) + H(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.4)$$

即

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})}w(k) + \frac{H(z^{-1})C(z^{-1})}{A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})}\xi(k) \quad (3.6.5)$$

从上式中可看出, $y(k)$ 与 $w(k)$ 之间的传递函数为

$$\frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})} \quad (3.6.6)$$

它与理想闭环传递函数的关系为

$$\frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})} = \frac{B_m(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})} \quad (3.6.7)$$

假设被控对象为非最小相位系统,则需将 $B(z^{-1})$ 分解

$$B(z^{-1}) = B^+(z^{-1})B^-(z^{-1}) \quad (3.6.8)$$

式中, $B^-(z^{-1})$ 为由所有不稳定零点组成的因式, $B^+(z^{-1})$ 为由所有稳定零点组成的因式配以适当的比例,令

$$H(z^{-1}) = H_1(z^{-1})B^+(z^{-1}) \quad (3.6.9)$$

则式(3.6.7)可以化简为

$$\frac{B^-(z^{-1})E(z^{-1})}{A(z^{-1})H_1(z^{-1}) + B^-(z^{-1})G(z^{-1})} = \frac{B_m(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})} \quad (3.6.10)$$

显然闭环极点配置方程为

$$A(z^{-1})H_1(z^{-1}) + B^-(z^{-1})G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.11)$$

闭环零点配置方程为

$$B^-(z^{-1})E(z^{-1}) = B_m(z^{-1}) \quad (3.6.12)$$

阶次限制关系为

$$n_{H_1} = n_{B^-} - 1 \quad (3.6.13)$$

$$n_G = n_A - 1 \quad (3.6.14)$$

$$n_T \leq n_A + n_{B^-} - n_C - 1 \quad (3.6.15)$$

$$n_E \geq n_{B_m} - n_{B^-} \quad (3.6.16)$$

闭环极点配置方程式(3.6.11)相当于已知 $A(z^{-1})$ 、 $B^-(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})T(z^{-1})$, 待求 $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的 Diophantine 方程,在上述阶次匹配限制下存在唯一解。因此闭环系统方程式(3.6.4)可写成

$$y(k) = \frac{B^-(z^{-1})E(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})}w(k) + \frac{H(z^{-1})}{T(z^{-1})}\xi(k) \quad (3.6.17)$$

从式(3.6.17)可以看出,选择 $C(z^{-1})T(z^{-1})$ 作为闭环系统的极点可对消噪声项系数多项式 $C(z^{-1})$,从而可对随机干扰进行抑制。

这种零极点配置方案,在控制器参数 $H(z^{-1})$ 引入了被控对象的所有稳定零点,因而在闭环方程中对消掉了所有的稳定零点,保留了所有的不稳定零点。

此外,由式(3.6.17)可看出,为了消除跟踪误差必须合理地选择 $E(z^{-1})$ 。下面介绍两种消除跟踪误差的方法。

(1) 引入积分器:为了引入积分器,选择 $H(z^{-1})$ 使 $H(1)=0$,即取 $H(z^{-1}) = (1-z^{-1})H_1(z^{-1})B^+(z^{-1})$,则闭环极点配置方程为

$$A(z^{-1})(1-z^{-1})H_1(z^{-1}) + B^-(z^{-1})G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.18)$$

相当于已知 $A(z^{-1})(1-z^{-1})$ 、 $B^-(z^{-1})$ 和 $C(z^{-1})T(z^{-1})$,待求 $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的 Diophantine 方程,这时 $n_G = n_A$ 、 $n_{H_1} = n_{B^-} - 1$ 。由式(3.6.6)知,为了使 $y(k)$ 和 $w(k)$ 之间的传递函数稳态时为 1, $E(z^{-1})$ 必须取为

$$E(1) = G(1) \quad (3.6.19)$$

(2) 不引入积分器: 如果不引入积分器, 由式(3.6.17)知为使 $y(k)$ 和 $w(k)$ 之间的传递函数稳态时为 1, $E(z^{-1})$ 必须取为

$$E(1) = C(1)T(1)/B^-(1) \quad (3.6.20)$$

上述零极点配置控制算法可适用于开环不稳定的非最小相位的被控对象, 但要求分解 $B(z^{-1})$ 为 $B^+(z^{-1})$ 和 $B^-(z^{-1})$, 在自适应情况下不易在线实现。下面介绍三种不分解 $B(z^{-1})$ 的零极点配置算法。

1) 对消所有开环零点

当被控对象是最小相位时, 即 $B(z^{-1})$ 的全部零点在 z 平面单位圆内, 假定被控对象的时延为 d , 可将 $B(z^{-1})$ 写为 $B(z^{-1}) = z^{-d}B^+(z^{-1})$, 这时对象模型变为

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B^+(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.21)$$

取

$$H(z^{-1}) = H_1(z^{-1})B^+(z^{-1}) \quad (3.6.22)$$

则闭环传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{B(z^{-1})E(z^{-1})}{A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})} &= \frac{z^{-d}B^+(z^{-1})E(z^{-1})}{A(z^{-1})H_1(z^{-1})B^+(z^{-1}) + z^{-d}B^+(z^{-1})G(z^{-1})} \\ &= \frac{z^{-d}E(z^{-1})}{A(z^{-1})H_1(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1})} \\ &= \frac{B_m(z^{-1})}{C(z^{-1})T(z^{-1})} \end{aligned} \quad (3.6.23)$$

于是极点配置方程式(3.6.11)变为

$$A(z^{-1})H_1(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.24)$$

阶次限制为

$$n_{H_1} = d - 1, \quad n_G = n_A - 1 \quad (3.6.25)$$

$$n_T \leq n_A + d - n_C - 1 \quad (3.6.26)$$

因 $A(z^{-1})$ 与 z^{-d} 互质, 在上述阶次配合下, $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 有唯一解。而闭环零点配置方程为

$$z^{-d}E(z^{-1}) = B_m(z^{-1}) \quad (3.6.27)$$

对于最小相位的被控对象, 这种零极点配置方案, 可导出最小方差控制律。如被控对象时延为 d , 选择 $H(z^{-1}) = F(z^{-1})B^+(z^{-1})$ 、 $T(z^{-1}) = 1$, 则式(3.6.24)和式(3.6.27)变为

$$A(z^{-1})F(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) = C(z^{-1}) \quad (3.6.28)$$

$$B_m(z^{-1}) = z^{-d}E(z^{-1}) \quad (3.6.29)$$

如果选择 $E(z^{-1}) = C(z^{-1})R(z^{-1})$, 那么闭环系统方程即为

$$y(k) = R(z^{-1})w(k-d) + F(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.30)$$

显然式(3.6.30)与用最小方差控制律得到的闭环系统方程完全相同, 这也说明对随机被控对象实现极点配置时, 给定极点配置多项式为什么要选择为 $C(z^{-1})T(z^{-1})$, 而不像确定性被控对象那样选为 $T(z^{-1})$ 的原因。

控制器参数 $E(z^{-1})$ 的选取原则与零极点配置控制器相同。

(1) 当引入积分器时

$$E(1) = G(1) \quad (3.6.31)$$

(2) 当不引入积分器时

$$E(1) = C(1)T(1) \quad (3.6.32)$$

求得 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$ 等多项式后,即可按式(3.6.3)计算对消所有开环零点的零极点配置控制律。

2) 保留所有开环零点

当被控对象有开环零点在单位圆外,可采用保留全部开环零点的零极点配置算法,此时的极点配置式(3.6.11)应写成

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.33)$$

阶次限制关系为

$$n_H = n_B - 1 \quad (3.6.34)$$

$$n_G = n_A - 1 \quad (3.6.35)$$

$$n_T \leq n_A + n_B - n_C - 1 \quad (3.6.36)$$

由于 $A(z^{-1})$ 与 $B(z^{-1})$ 互质,上式一定有解。

控制器参数 $E(z^{-1})$ 可根据下列两种情况确定:

(1) 引入积分器

$$E(1) = G(1) \quad (3.6.37)$$

此时要求

$$H(1) = 0 \quad (3.6.38)$$

将式(3.6.38)作为式(3.6.33)的约束条件,并取 $n_H = n_B$, $n_G = n_A$,再求解 $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 。

(2) 不引入积分器

$$E(1) = \frac{C(1)T(1)}{B(1)} \quad (3.6.39)$$

求得 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$ 等多项式后,即可按式(3.6.3)计算保留所有开环零点的零极点配置控制律,本算法可适用于非最小相位的被控对象。

3) 保留所有开环极点

当被控对象开环稳定,即 $A(z^{-1})$ 的全部零点在 z 平面的单位圆内时,则可将 $A(z^{-1})$ 的所有零点作为闭环系统的一部分极点处理。首先选择 $G(z^{-1})$ 为

$$G(z^{-1}) = A(z^{-1})G_1(z^{-1}) \quad (3.6.40)$$

极点配置方程式(3.6.11)变为

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})A(z^{-1})G_1(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.41)$$

如选择 $T(z^{-1})$ 为 $A(z^{-1})$,则上式可改写成

$$H(z^{-1}) + B(z^{-1})G_1(z^{-1}) = C(z^{-1}) \quad (3.6.42)$$

阶次限制关系为

$$n_H = \max\{n_B - 1, n_C - 1\}, \quad n_{G_1} = 0 \quad (3.6.43)$$

$E(z^{-1})$ 的选择为

(1) 引入积分器

$$H(1) = 0, \quad E(1) = G(1) = G_1(1)A(1) \quad (3.6.44)$$

(2) 不引入积分器

$$E(1) = C(1)A(1)/B(1) \quad (3.6.45)$$

求得 $G(z^{-1})$ 、 $H(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$ 等多项式后,即可按式(3.6.3)计算保留所有开环极点的零极点配置控制律,本算法适用于开环稳定的非最小相位被控对象。

3.6.2 零极点配置自校正控制器设计

当被控对象的参数未知或慢时变时,就需应用递推估计算法在线辨识参数。下面分别就显式和隐式两类零极点配置自校正算法进行讨论。

1. 显式零极点配置自校正控制器

前面讨论的几种零极点配置控制器,当被控对象参数未知时,均可直接引入在线辨识原被控对象模型参数实现显式零极点配置自校正控制。下面分别给出各类显式算法的计算步骤。

1) 基本显式零极点配置自校正算法(EPSTC-1)

综上所述,基本显式零极点配置自校正算法(EPSTC-1)可以总结如下:

(1) 用增广最小二乘递推算法估计下列模型参数

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.46)$$

(2) 分解多项式 $B(z^{-1})$ 为 $B^+(z^{-1})$ 和 $B^-(z^{-1})$;

(3) 解下列极点配置方程求 $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$

$$A(z^{-1})H_1(z^{-1}) + B^-(z^{-1})G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.47)$$

$$n_{H_1} = n_{B^-} - 1, \quad n_G = n_A - 1, \quad n_T \leq n_A + n_{B^-} - n_C - 1 \quad (3.6.48)$$

如用积分器,则将下列条件

$$H_1(1) = 0 \quad (3.6.49)$$

作为式(3.6.47)的约束条件来求解 $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$,这时 $H_1(z^{-1})$ 的阶次应该改为

$$n_{H_1} = n_{B^-}, \quad n_G = n_A \quad (3.6.50)$$

(4) 由下式求控制输入 $u(k)$

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.6.51)$$

式中, $H(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$ 分别为

$$H(z^{-1}) = H_1(z^{-1})B^+(z^{-1}) \quad (3.6.52)$$

如采用积分器, $E(1) = G(1)$; 如不用积分器, $E(1) = C(1)T(1)/B^-(1)$ 。

2) 对消所有开环零点的显式零极点配置自校正算法(EPSTC-2)

综上所述,对消所有开环零点的显式零极点配置自校正算法(EPSTC-2)可以总结如下:

(1) 采用增广最小二乘递推算法估计下列模型参数

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.53)$$

(2) 由下列极点配置方程求 $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$

$$A(z^{-1})H_1(z^{-1}) + z^{-d}G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.54)$$

$$n_{H_1} = d - 1, \quad n_G = n_A - 1, \quad n_T \leq n_A - n_C + d - 1 \quad (3.6.55)$$

为引入积分器,将 $H_1(1)=0$ 与式(3.6.54)联立求 $H_1(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$,此时 $n_{H_1}=d, n_G=n_A$ 。

(3) 由下式求 $H(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$

$$H(z^{-1}) = H_1(z^{-1})B(z^{-1}) \quad (3.6.56)$$

如引入积分器, $E(1)=G(1)$; 如不引入积分器, $E(1)=C(1)T(1)$ 。

(4) 由下式求 $u(k)$

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.6.57)$$

3) 保留所有开环零点的显式零极点配置自校正算法(EPSTC-3)

同样,保留所有开环零点的显式零极点配置自校正算法(EPSTC-3)可以总结如下:

(1) 采用增广最小二乘递推算法估计下列模型参数

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.58)$$

(2) 由下列极点配置方程求 $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1}) = C(z^{-1})T(z^{-1}) \quad (3.6.59)$$

$$n_H = n_B - 1, \quad n_G = n_A - 1, \quad n_T \leq n_A + n_B - n_C - 1 \quad (3.6.60)$$

如引入积分器,将 $H(1)=0$ 与式(3.6.59)联立求 $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$,此时 $n_H=n_B, n_G=n_A$ 。

(3) 由下式求 $u(k)$

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.6.61)$$

如引入积分器, $E(1)=G(1)$; 如不引入积分器, $E(1)=C(1)T(1)/B(1)$ 。

4) 保留开环极点的显式零极点配置自校正算法(EPSTC-4)

同样,保留开环极点的显式零极点配置自校正算法(EPSTC-4)可以总结如下:

(1) 采用增广最小二乘递推算法估计下列模型参数

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.62)$$

(2) 由下列极点配置方程求 $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$

$$H(z^{-1}) + B(z^{-1})G_1(z^{-1}) = C(z^{-1}) \quad (3.6.63)$$

$$n_H = \max\{n_B - 1, n_C - 1\}, \quad n_{G_1} = 0 \quad (3.6.64)$$

如引入积分器,将 $H(1)=0$ 作为式(3.6.63)的约束条件,此时 $n_H=\max\{n_B, n_C\}$ 。

(3) 由下列格式求 $G(z^{-1})$ 和 $E(z^{-1})$

$$G(z^{-1}) = A(z^{-1})G_1(z^{-1}) \quad (3.6.65)$$

如引入积分器, $E(1)=A(1)G_1(1)$; 如不引入积分器, $E(1)=C(1)A(1)/B(1)$ 。

2. 隐式零极点配置自校正控制器

在下列两种情况下可以采用直接辨识控制器参数的隐式零极点配置自校正控制算法。

1) 对消所有开环零点的隐式零极点配置自校正算法(IPSTC-1)

当 $B(z^{-1})$ 的全部零点均严格位于 z 平面的单位圆内时,可采用对消全部 $B(z^{-1})$ 的零点的零极点配置策略。为了用隐式算法来实现,必须首先求控制器参数的辨识方程,用 $H_1(z^{-1})$ 乘式(3.6.53)两边并利用式(3.6.54)有

$$[C(z^{-1})T(z^{-1}) - z^{-d}G(z^{-1})]y(k) = z^{-d}H(z^{-1})u(k) + H_1(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.66)$$

即

$$C(z^{-1})T(z^{-1})y(k) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) + H_1(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.67)$$

从而有

$$T(z^{-1})y(k) = [G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d)]/C(z^{-1}) + H_1(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.68)$$

如果设 $\phi(k) = T(z^{-1})y(k)$,采用与 3.4 节求最优预报类似的方法可求得 $\phi(k+d)$ 的最优预报为

$$\phi^*(k+d | k) = [G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k)]/C(z^{-1}) \quad (3.6.69)$$

于是

$$T(z^{-1})y(k) = \phi^*(k | k-d) + H_1(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.70)$$

而由式(3.6.69)知

$$\phi^*(k+d | k) = G(z^{-1})y(k) + H(z^{-1})u(k) - C^*(z^{-1})\phi^*(k+d | k) \quad (3.6.71)$$

式中

$$C^*(z^{-1}) = C(z^{-1}) - C(0) = c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \cdots + c_{n_c}z^{-n_c} \quad (3.6.72)$$

这样由式(3.6.68)和式(3.6.71)可得控制器参数辨识方程为

$$T(z^{-1})y(k) = G(z^{-1})y(k-d) + H(z^{-1})u(k-d) - C^*(z^{-1})\phi^*(k | k-d) + H_1(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.73)$$

如果定义数据向量 $\phi(k)$ 和参数向量 θ 为

$$\phi(k) = [y(k), \cdots, y(k-n_G), u(k), \cdots, u(k-n_H), -\phi^*(k+d-1 | k-1), \cdots, -\phi^*(k+d-n_C | k-n_C)]^T \quad (3.6.74)$$

$$\theta = [g_0, g_1, \cdots, g_{n_G}; h_0, h_1, \cdots, h_{n_H}; c_1, c_2, \cdots, c_{n_C}]^T \quad (3.6.75)$$

则式(3.6.73)可以写成

$$T(z^{-1})y(k) = \phi^T(k-d)\theta + H_1(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.76)$$

由于 $H_1(z^{-1})$ 是 $d-1$ 阶多项式,故上式右边第一项与第二项不相关,因此可采用最小二乘估计算法;又由于 $\phi(k-d)$ 中的 $\phi^*(k-1 | k-d-1)$ 等均未知,所以必须采用

增广最小二乘算法。由式(3.6.71)知

$$\phi^*(k+d|k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} \quad (3.6.77)$$

于是令

$$\hat{\phi}^*(k+d|k) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.6.78)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d) = [y(k-d), \dots, y(k-d-n_G), u(k-d), \dots, u(k-d-n_H), \\ -\hat{\phi}^*(k-1|k-d-1), \dots, -\hat{\phi}^*(k-n_C|k-d-n_C)]^T \end{aligned} \quad (3.6.79)$$

这样就可采用下列增广最小二乘递推算算法来估计控制器参数

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) [\phi(k) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.6.80)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)}{1 + \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d) \mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)} \quad (3.6.81)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k-d)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.6.82)$$

综上所述,对消开环零点的隐式零极点配置自校正算法(IPSTC-1)的计算步骤可以总结如下:

- (1) 测取 $y(k)$ 和 $w(k)$;
- (2) 形成数据向量 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-d)$;
- (3) 采用估计算法式(3.6.80)~式(3.6.82)辨识控制器参数;
- (4) 由下式求控制输入 $u(k)$

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.6.83)$$

式中, $E(1)=C(1)T(1)$;

- (5) 由式(3.6.78)求 $\hat{\phi}^*(k+d|k)$ 。

2) 保留开环极点的隐式零极点配置自校正算法(IPSTC-2)

首先用 $G_1(z^{-1})$ 乘式(3.6.62)两边,并使用式(3.6.63)和式(3.6.65)得

$$G(z^{-1})y(k) = [C(z^{-1}) - H(z^{-1})]u(k) + G_1(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.6.84)$$

由于 $C(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 均为首1多项式,故有

$$C^*(z^{-1})u(k) - H^*(z^{-1})u(k) - G(z^{-1})y(k) + G_1(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k) = 0 \quad (3.6.85)$$

定义数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 和参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k) = [u(k-1), \dots, u(k-n_C), -u(k-1), \dots, -u(k-n_H), \\ -y(k), \dots, -y(k-n_G), G_1\xi(k-1), \dots, G_1\xi(k-n_C)]^T \end{aligned} \quad (3.6.86)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [c_1, c_2, \dots, c_{n_G}; h_1, h_2, \dots, h_{n_H}; g_0, g_1, \dots, g_{n_G}; c_1, c_2, \dots, c_{n_C}]^T \quad (3.6.87)$$

于是式(3.6.85)可写成

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) \boldsymbol{\theta} + G_1\xi(k) = 0 \quad (3.6.88)$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 中的 $G_1\xi(k-1), \dots, G_1\xi(k-n_C)$ 未知,需用 $G_1\xi(k)$ 的估计值代替。由式(3.6.88)知

$$G_1\hat{\xi}(k) = -\hat{\boldsymbol{\varphi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \quad (3.6.89)$$

式中, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 在 k 时刻的估计值, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k)$ 是 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 的估计值

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k) = [u(k-1), \dots, u(k-n_c); -u(k-1), \dots, -u(k-n_H); \\ -y(k), \dots, -y(k-n_G), G_1 \hat{\xi}(k-1), \dots, G_1 \hat{\xi}(k-n_c)]^T \quad (3.6.90)$$

这样就可采用增广最小二乘来估计参数

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[0 - \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.6.91)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \hat{\boldsymbol{\phi}}(k)} \quad (3.6.92)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \hat{\boldsymbol{\phi}}^T(k)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.6.93)$$

不引入积分器,有

$$E(1) = C(1)G_1A(1)/G_1B(1) = C(1)G(1)/[C(1) - H(1)] \quad (3.6.94)$$

综上所述,保留开环极点的隐式零极点配置自校正算法(IPSTC-2)的计算步骤可以总结如下:

- (1) 测取 $y(k)$ 和 $w(k)$;
- (2) 形成数据向量 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k)$;
- (3) 采用估计算法式(3.6.91)~式(3.6.93)辨识控制器参数;
- (4) 由下式求控制输入 $u(k)$

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.6.95)$$

式中

$$E(1) = C(1)G(1)/[C(1) - H(1)] \quad (3.6.96)$$

上面介绍了四种显式和两种隐式零极点配置自校正控制算法,显式算法 EPSTC-1 和 EPSTC-3 不仅适用于开环稳定的最小相位的被控对象,还适用于开环不稳定的非最小相位的被控对象,且不要求被控对象时延已知和不变这一条件,但计算控制律时要求在线解极点配置方程,计算量较大;显式算法 EPSTC-2 和隐式算法 IPSTC-1 只适用于时延已知的最小相位被控对象;显式算法 EPSTC-4 和隐式算法 IPSTC-2 可适用于时延未知或变化的非最小相位被控对象,但要求开环稳定。到目前为止还没有一种理想的、计算量较少的、适用于随机被控对象且能控制开环不稳定和有不稳定零点的被控对象的隐式零极点配置自校正控制算法。

显式和隐式零极点配置自校正算法都可以通过适当选取多项式 $E(z^{-1})$ 来消除跟踪误差。当采用加积分器来消除跟踪误差时,在显式算法中需将 $H_1(z^{-1})=0$ 作为极点配置方程的约束条件,将 $H_1(z^{-1})$ 、 $G(z^{-1})$ 的阶次升高一阶。在隐式算法中,则将 $H(z^{-1})$ 取为 $(1-z^{-1})H_1(z^{-1})$ 、 $E(1)$ 取为 $G(1)$ 即可。

如果将保留开环零点的显式零极点配置自校正算法 EPSTC-3 中的参考输入 $w(k)$ 设定为零,则 EPSTC-3 算法就变成了极点配置自校正调节器。如果假定显式算法 EPSTC-1、EPSTC-2 与 EPSTC-3、隐式算法 IPSTC-1 中的噪声项 $\xi(k)$ 为零,则上述这些算法就变成了确定性被控对象的零极点配置自校正控制器。

保留不稳定开环零点的极点配置控制器,当采用一步松弛算法后也可得到能控制开环不稳定和非最小相位被控对象的隐式极点配置自校正控制器,限于篇幅故从

略。有兴趣的读者可以参阅文献[10]。

3.6.3 仿真实验

为了验证零极点配置控制律和零极点配置自校正控制律的有效性,我们进行下列的仿真实验。

例 3.6.1 保留所有开环零点的零极点配置自校正控制器的仿真实验

开环不稳定的非最小相位的被控对象模型为

$$(1 - 0.7z^{-1} - 0.6z^{-2})y(k) = (1.0z^{-2} - 2.0z^{-3})u(k) + (1 - 0.4z^{-1})\xi(k)$$

当 $k=150$ 后对象模型变为

$$(1 - 0.7z^{-1} - 0.6z^{-2})y(k) = (1.0z^{-5} - 2.0z^{-6})u(k) + (1 - 0.4z^{-1})\xi(k)$$

式中, $\xi(k)$ 为均值为 0、方差为 0.2 的独立随机噪声,运行时间从 $k=1$ 到 $k=400$ 。

参考输入为

$$w(k) = 5 + 5\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi k}{100}\right)$$

选择 $T(z^{-1})$ 为

$$T(z^{-1}) = 1 - 0.5z^{-1}$$

(1) 零极点配置控制器。

保留所有开环零点,求解 Diophantine 方程

$$C(z^{-1})T(z^{-1}) = A(z^{-1})H(z^{-1}) + B(z^{-1})G(z^{-1})$$

控制律形式为

$$H(z^{-1})u(k) = E(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k)$$

$k=150$ 之前,控制器方程为

$$(1 - 0.2z^{-1} + 1.2z^{-2})u(k) = (0.54 + 0.36z^{-1})y(k) - 0.3w(k)$$

$k=150$ 之后,控制器方程为

$$\begin{aligned} & (1 - 0.2z^{-1} + 0.66z^{-2} + 0.342z^{-3} + 0.6354z^{-4} + 1.6812z^{-5})u(k) \\ & = (1.0312 + 0.5044z^{-1})y(k) - 0.3w(k) \end{aligned}$$

零极点配置控制器的仿真结果如图 3.6.2 所示。可以看出,当被控对象模型参数已知时,采用上述的零极点配置控制器,可以使得闭环系统稳定,跟踪非零的参考输入,且能够消除稳态跟踪误差。

(2) 零极点配置自校正控制器。

当上述被控对象模型参数未知时,采用显式零极点配置自校正控制器进行仿真实验。控制器阶次不变,闭环零极点选择不变,对被控对象参数进行估计。数据向量 $\phi(k)$ 和参数向量 θ 分别为

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(k) = & [-y(k), -y(k-1), u(k), u(k-1), u(k-2), \\ & u(k-3), u(k-4), u(k-5), \hat{\xi}(k)]^T \end{aligned}$$

$$\theta = [a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, c_1]^T$$

仿真实验结果如图 3.6.3 和图 3.6.4 所示,其中图 3.6.3 为采用零极点配置自校正

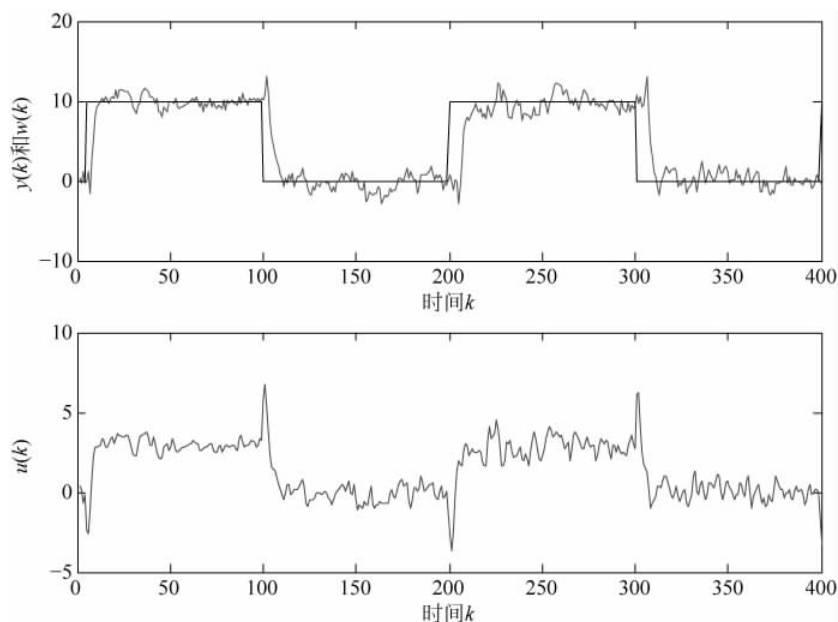


图 3.6.2 采用零极点配置控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

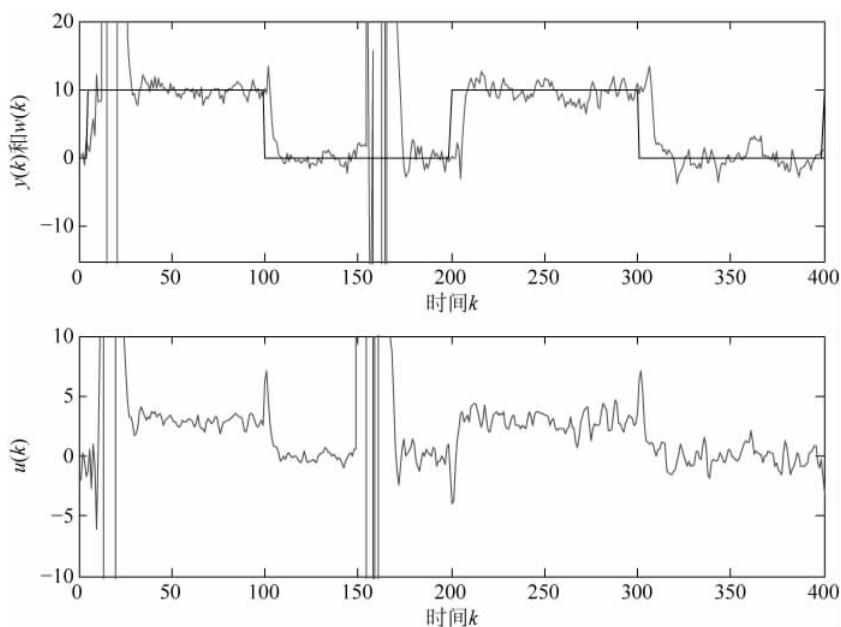


图 3.6.3 采用零极点配置自校正控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线,图 3.6.4 为被控对象模型参数以及时延 d 的估计曲线。从图中可以看出,尽管在 $k=150$ 后对象的时延发生变化,被控对象输出也基本能够跟踪变化的参考输入,

说明该零极点配置策略可以处理非最小相位被控对象,能够控制具有未知、变化时延的被控对象。

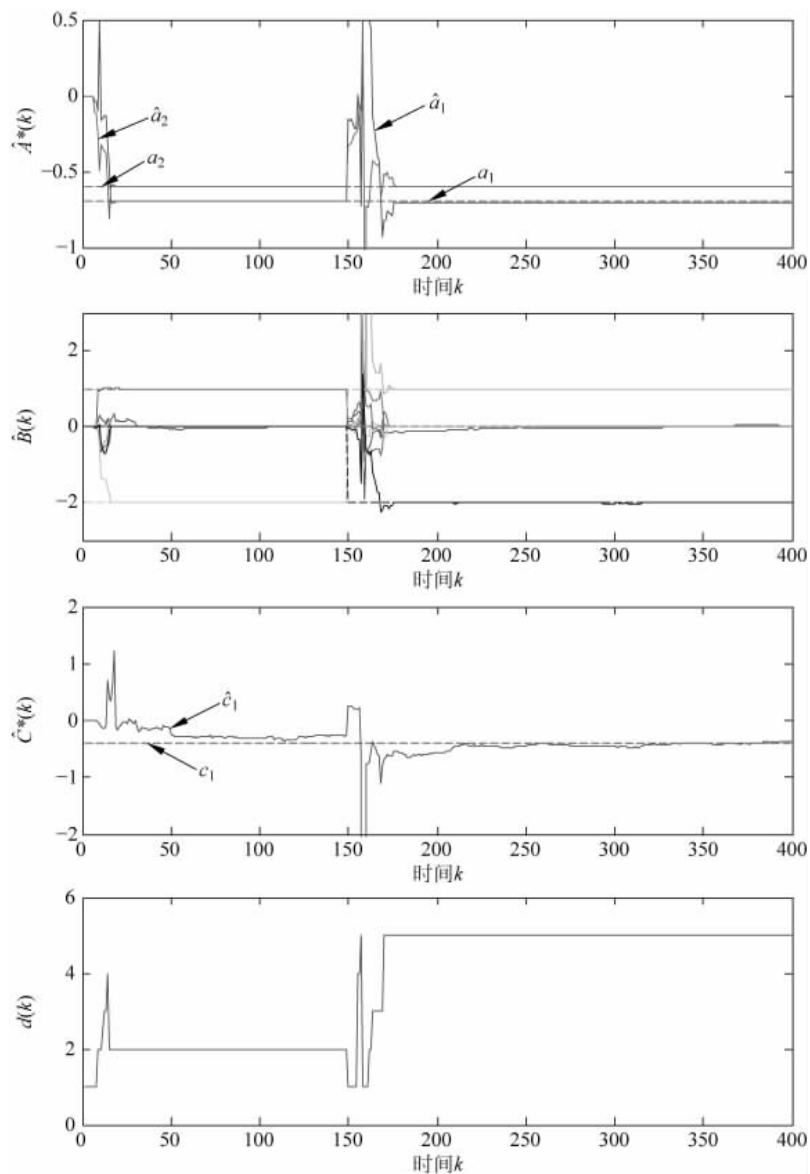


图 3.6.4 显示零极点配置自校正控制器的对象模型参数及时延 d 的估计曲线

3.6.4 其他几种零极点配置自校正控制器简介

1. 零极点配置自校正前馈控制器

在 3.6.3 节介绍的零极点配置自校正控制器的四种显式算法和两种隐式算法的

基础上,引入前馈补偿项可在零极点配置自校正控制器中实现对可测干扰的自适应补偿,它包括保留开环零点的显式零极点配置前馈控制和对消开环零点的隐式零极点配置前馈控制等两种自校正算法,详见文献[10]。

2. 隐式极点配置自校正控制器

前面介绍了各种零极点配置自校正控制器,对于非最小相位被控对象,采用保留开环零点配置闭环极点的控制策略,实际上就是极点配置策略,对于随机的被控对象这种控制策略只能用显式方式来实现。近年来对确定性的非最小相位被控对象,通过引入辅助多项式方程分别提出了单变量和多变量的隐式极点配置自校正控制算法。该算法避免了在线求解矩阵方程,从而提高了极点配置自校正控制器的鲁棒性,详见文献[10]。

3. 具有极点配置的广义自校正控制器

以广义最小方差控制律为基础的自校正控制器通过离线凑试加权多项式 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 来控制非最小相位被控对象,当被控对象参数未知时,加权多项式的凑试较为困难。以极点配置控制策略为基础的极点配置自校正控制器是通过把闭环系统极点配置到预先指定的理想位置来实现对非最小相位被控对象的控制,它是一种经典的控制器,不是以使性能指标最优化为目标,但却有较强的鲁棒性,因此将基于最优化控制的广义最小方差控制与基于极点配置的经典控制结合起来的隐式极点配置广义自校正控制器^[10],不仅具有两者的优点,且可在线校正加权多项式,避免了离线凑试 $P(z^{-1})$ 和 $Q(z^{-1})$ 的困难。但存在下列问题:①由于控制器参数的辨识和加权多项式的在线校正相互影响,所以收敛性不好;②当被控对象的噪声项系数 $C(z^{-1})$ 的阶次 n_c 大于被控对象时延 d 时,只能实现近似的极点配置;③如果 $A(z^{-1})$ 不含积分作用,会出现对阶跃输入的跟踪误差;④参数未知时, $\phi^T(k)\hat{\theta}(k)=0$, 并不意味着 $\phi^T(k-d)\hat{\theta}(k)=0$, 因此使用 $\phi^T(k-d)\hat{\theta}(k)=0$ 得到的辨识方程会影响参数的估计值,从而影响控制性能。针对上述问题提出的显式极点配置自校正控制算法将控制器参数的辨识和加权多项式的校正分开,不仅可获得较好的控制效果,而且使算法具有全局收敛性。算法详见文献[10]。

3.7 自校正 PID 控制

以经典控制策略为基础的自校正控制器除了极点配置、零极点配置自校正控制器之外还有以常规 PID(比例积分微分)控制策略为基础的自校正控制器,常规的 PID 控制器具有较强的鲁棒性,广泛地应用于工业过程控制中。对于复杂的被控对象,特别是对于模型参数未知或慢变化的被控对象采用常规的 PID 控制器,不仅 P、I、D 参数难于选择,即使 P、I、D 的参数选择好了,因为被控对象的参数发生变化而不能获得满意的控制效果。自校正 PID 控制器是在自校正控制思想和常规 PID 控制

策略相结合基础上提出的,它吸收了两者的优点,能够在线整定和校正 PID 控制器的参数,且具有较强的鲁棒性。在线校正 PID 控制器参数的基本方法有极点配置法和使某一性能指标优化法等。本节介绍的自校正 PID 控制器的 PID 参数选择采用极点配置法,自校正 PID 控制器的可调参数控制器是 PID 控制器,因此首先介绍被控对象模型已知时的 PID 控制器设计方法。

3.7.1 PID 控制器设计

1. 控制问题描述

设被控对象的数学模型为确定性线性模型

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-1}B(z^{-1})u(k) \quad (3.7.1)$$

式中

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \quad (3.7.2)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} \quad (3.7.3)$$

控制目标是针对上述被控对象,设计 PID 控制器

$$u(t) = K_P \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (3.7.4)$$

使得被控对象的输出 $y(t)$ 与参考输入 $w(t)$ 之间的误差 $e(t)$ 趋于零,其中

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (3.7.5)$$

$w(t)$ 为参考输入; K_P 为比例增益; T_I 为积分时间; T_D 为微分时间。

采用计算机来实现 PID 控制,首先需要将模拟 PID 控制器式(3.7.4)离散化,以便获得相应的数字化 PID 控制器算式,式(3.7.4)的传递函数为

$$\frac{u(s)}{e(s)} = K_P + \frac{K_P}{T_I s} + K_P T_D s = \frac{K_P + K_P T_I s + K_P T_I T_D s^2}{T_I s} \quad (3.7.6)$$

当采用反向差分近似对式(3.7.6)进行离散时有

$$u(k) = u(k-1) + K_P[e(k) - e(k-1)] + K_I e(k) + K_D[e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \quad (3.7.7)$$

式中, $e(k) = w(k) - y(k)$; $K_I = \frac{K_P T_0}{T_I}$ 为积分系数; $K_D = \frac{K_P T_D}{T_0}$ 为微分系数; T_0 为采样周期。

2. PID 控制器

由式(3.7.7)可知 PID 控制器设计的关键是确定控制器参数 K_P 、 K_I 和 K_D ,控制器式(3.7.7)的离散时间传递函数为

$$\frac{u(z^{-1})}{e(z^{-1})} = K_P + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1}) = \frac{g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (3.7.8)$$

式中

$$g_0 = K_P + K_I + K_D \quad (3.7.9)$$

$$g_1 = -K_P - 2K_D \quad (3.7.10)$$

$$g_2 = K_D \quad (3.7.11)$$

由式(3.7.8)可以导出

$$[1 - z^{-1}]u(z^{-1}) = [g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}]e(z^{-1}) \quad (3.7.12)$$

即

$$H(z^{-1})u(k) = G(z^{-1})w(k) - G(z^{-1})y(k) \quad (3.7.13)$$

式中, $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 是 z^{-1} 的多项式, 其阶次分别为 $n_H=1, n_G=2$,

$$H(z^{-1}) = 1 - z^{-1} \quad (3.7.14)$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} \quad (3.7.15)$$

将式(3.7.13)与式(3.6.3)比较, 可以看出式(3.7.13)是零极点配置控制器式(3.6.3)的特殊形式, 即 $H(z^{-1})$ 按式(3.7.14)取, $G(z^{-1})$ 按式(3.7.15)取, $E(z^{-1})$ 取为 $E(z^{-1})=G(z^{-1})$, 则式(3.6.3)就变成了式(3.7.13)。

将式(3.7.13)代入被控对象模型式(3.7.1), 有

$$[A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})]y(k) = G(z^{-1})B(z^{-1})w(k-1) \quad (3.7.16)$$

设闭环特征多项式为 $T(z^{-1})$, 即 $T(z^{-1})$ 的零点就是理想的闭环极点, 则有

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (3.7.17)$$

由式(3.7.14)知 $H(z^{-1})$ 必须满足 $H(1)=0$, $G(z^{-1})$ 必须是二阶多项式。于是选择

$$H(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + h_1 z^{-1}) \quad (3.7.18)$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} \quad (3.7.19)$$

式中, $(1+h_1 z^{-1})$ 可以看作是滤波器, h_1 是待定的滤波器系数。

由式(3.7.2)、式(3.7.3)、式(3.7.17)、式(3.7.18)和式(3.7.19)可得

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})(1 - z^{-1})(1 + h_1 z^{-1}) + z^{-1}(b_0 + b_1 z^{-1})(g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}) \\ & = t_0 + t_1 z^{-1} + \cdots + t_{n_T} z^{-n_T} \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

由式(3.7.20)知, 未知数个数 4, $t_0=1$, 这样由式(3.7.20)左边两项所确定的方程个数都为 4。只有 $n_T \leq 4$, 式(3.7.20)才有唯一解。在实际中可以选择 $n_T=2$, 这样就可以由连续时间闭环特征多项式 $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ 的 ζ 和 ω_n 直接决定 $T(z^{-1})$ 的系数, 即

$$t_1 = -2\exp[-\zeta\omega_n T_0] \cos(\omega_n T_0 \sqrt{1-\zeta^2}) \quad (3.7.21)$$

$$t_2 = \exp[-2\zeta\omega_n T_0] \quad (3.7.22)$$

由设计者给定 ζ 和 ω_n , 由式(3.7.21)和式(3.7.22)确定闭环特征多项式 $T(z^{-1})$, 由式(3.7.20)可求解出 h_1 和 $G(z^{-1})$, 由式(3.7.13)、式(3.7.18)和式(3.7.19)可得

$$(1 - z^{-1})(1 + h_1 z^{-1})u(k) = (g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2})e(k)$$

即

$$\Delta u(k) = -h_1 u(k-1) + h_1 u(k-2) + (g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2})e(k) \quad (3.7.23)$$

3. 性能分析

由被控对象模型式(3.7.1)和控制律式(3.7.23)可得闭环系统方程为

$$[A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})]y(k) = G(z^{-1})B(z^{-1})w(k-1) \quad (3.7.24)$$

$$[A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1})]u(k) = G(z^{-1})w(k) \quad (3.7.25)$$

可知闭环特征多项式为

$$A(z^{-1})H(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})G(z^{-1}) = T(z^{-1}) \quad (3.7.26)$$

由于 $T(z^{-1})$ 稳定即保证闭环系统稳定,且由于 $H(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + h_1 z^{-1})$,由式(3.7.24)可知 $k \rightarrow \infty, y(\infty) = w(\infty)$,即控制器式(3.7.23)可以消除稳态跟踪误差。

3.7.2 自校正 PID 控制器设计

1. 控制问题描述

被控对象模型为式(3.7.1),其中多项式 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的阶次 $n_A = 2, n_B = 1$,但系数未知。

控制目标是,设计自校正 PID 控制器,当被控对象的模型参数未知或缓慢变化时,消除被控对象的输出 $y(k)$ 与参考输入 $w(k)$ 之间的跟踪误差。对于上面所介绍的 PID 控制器可以采用隐式方法和显式方法来实现,下面介绍显式算法。

2. 自校正 PID 控制器

首先需要估计被控对象的参数 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$,定义数据向量和参数向量

$$\boldsymbol{\varphi}(k-1) = [-y(k-1), -y(k-2), u(k-1), u(k-2)]^T \quad (3.7.27)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, b_0, b_1]^T \quad (3.7.28)$$

将式(3.7.1)改写成

$$y(k) = \boldsymbol{\varphi}(k-1)^T \boldsymbol{\theta} \quad (3.7.29)$$

采用递推最小二乘法估计参数

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k-1) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.7.30)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k-1) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-1)} \quad (3.7.31)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k-1)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.7.32)$$

对于参数慢时变被控对象可采用渐消记忆法,即将式(3.7.31)、式(3.7.32)改为

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-1)}{\alpha + \boldsymbol{\varphi}^T(k-1) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-1)} \quad (3.7.33)$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k-1)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.7.34)$$

式中, α 为遗忘因子,取值为 $0.95 < \alpha < 1$ 。

选择闭环特征多项式 $T(z^{-1})$,然后将辨识得到的 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$ 当成真参数,利用式(3.7.20)求 $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$,最后由式(3.7.13)求 $u(k)$,就得到了控制律。

自校正 PID 控制器显式算法的计算步骤如下:

- (1) 采集输出数据 $y(k)$ 和参考输入 $w(k)$;
- (2) 按式(3.7.27)形成数据向量 $\phi(k)$;
- (3) 采用辨识算法式(3.7.30)~式(3.7.32)估计参数 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$;
- (4) 用式(3.7.20)计算 $H(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$;
- (5) 用式(3.7.23)求 $u(k)$ 并返回步骤(1)。

自校正 PID 控制器也可以用隐式方式来实现,这里从略。

3.7.3 仿真实验

为了验证极点配置 PID 控制律和极点配置自校正 PID 控制律的有效性,我们进行下列的仿真实验。

例 3.7.1 自校正 PID 控制器的仿真实验

开环不稳定的非最小相位的被控对象模型为

$$(1 - 0.7z^{-1} - 0.6z^{-2})y(k) = z^{-1}(1.0 - 2.0z^{-1})u(k)$$

参考输入为

$$w(k) = 5 + 5\text{sgn}\left(\sin \frac{\pi k}{100}\right)$$

运行时间从 $k=1$ 到 $k=400$ 。

(1) 极点配置 PID 控制器

闭环系统参数选取 $\zeta=0.5$, $\omega_n=0.6$, $T_0=1$, 控制器多项式为

$$H(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + h_1 z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + 1.9533z^{-1})$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} = -1.5394 + 0.6907z^{-1} + 0.586z^{-2}$$

控制律为

$$\begin{aligned} & (1 + 0.9533z^{-1} - 1.9533z^{-2})u(k) \\ & = (-1.5394 + 0.6907z^{-1} + 0.586z^{-2})[w(k) - y(k)] \end{aligned}$$

极点配置 PID 控制器的仿真结果如图 3.7.1 所示。

(2) 极点配置自校正 PID 控制器

当上述被控对象模型参数未知时,采用显式极点配置 PID 自校正控制器进行仿真实验,控制器阶次不变,闭环零极点选择不变,对被控对象参数进行估计。数据向量 $\phi(k)$ 和参数向量 θ 分别为

$$\phi(k-1) = [-y(k-1), -y(k-2), u(k-1), u(k-2)]^T$$

$$\theta = [a_1, a_2, b_0, b_1]^T$$

仿真实验结果如图 3.7.2 和图 3.7.3 所示,其中图 3.7.2 为采用极点配置 PID 自校正控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线,图 3.7.3 为被控对象模型参数的估计曲线。

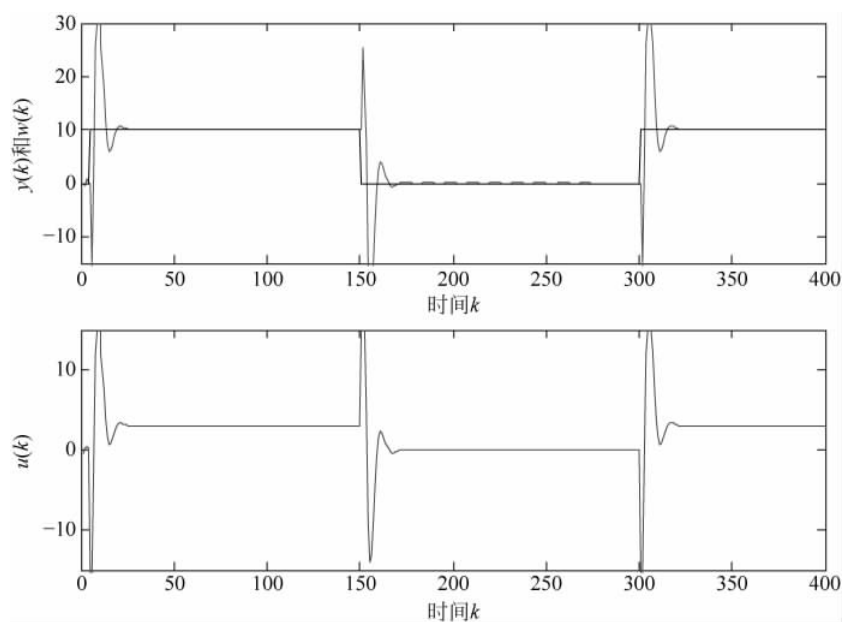


图 3.7.1 采用极点配置 PID 控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

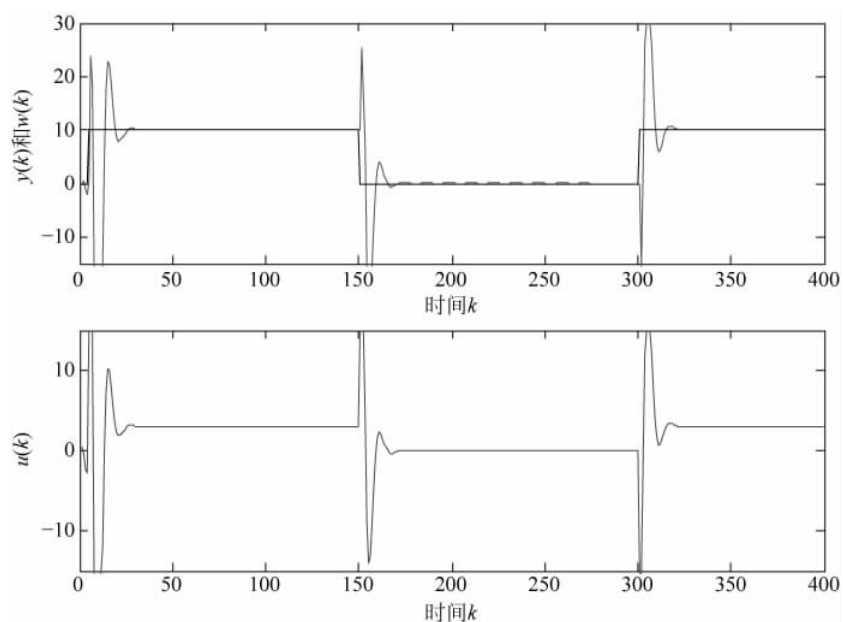


图 3.7.2 采用极点配置自校正 PID 控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

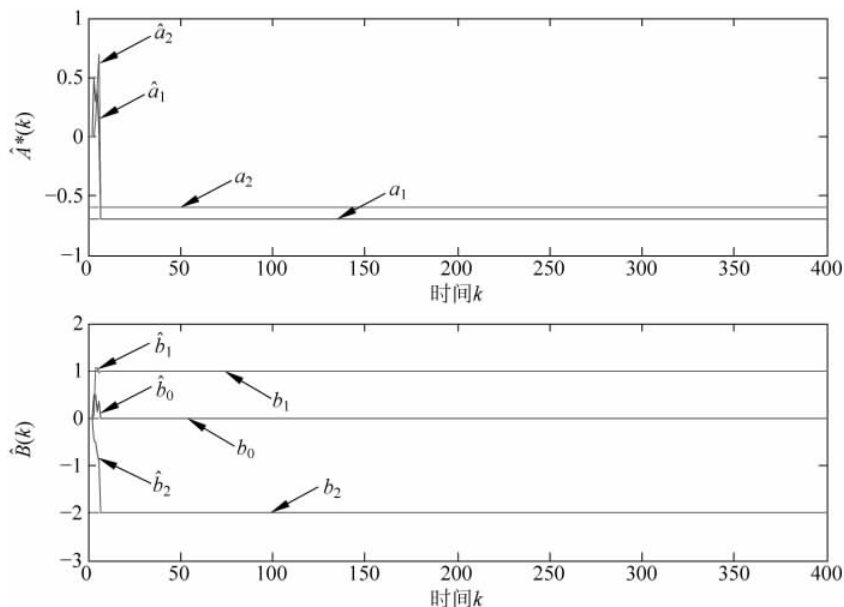


图 3.7.3 极点配置自校正 PID 控制的被控对象模型参数估计曲线

3.8 广义预测自适应控制

3.8.1 引言

预测控制是一种基于模型的先进控制技术,它是 20 世纪 70 年代中后期在欧美工业领域内出现的一类新型计算机控制算法。到目前为止已有许多种类不同的预测控制方法,最早应用于工业过程的预测控制算法,有 Richalet 等提出的建立在脉冲响应基础上的模型预测启发控制^[13](model predictive heuristic control,MPHC)或称为模型算法控制(model algorithmic control,MAC)以及 Cutler 等提出的建立在阶跃响应基础上的动态矩阵控制^[14](dynamic matrix control,DMC)。由于被控对象的脉冲响应和阶跃响应只要通过实验测试即可得到,因而不需考虑模型的结构与阶次。正由于这些优点使它们更适合于工业过程控制的实际要求,因此在石油化工等领域取得了成功的应用,但其也具有一定的局限性,只适用于开环自稳定对象,且当对象时间常数较大时,势必模型参数增多,控制算法计算量大。

20 世纪 80 年代初期,人们在自适应控制的研究中发现,为了增加自适应控制系统的鲁棒性,有必要在广义最小方差控制的基础上,汲取预测控制中的多步预测优化策略,提高自适应控制系统的实用性,因此出现了自适应预测控制算法,其中最具代表性的就是 Clarke 等人提出的基于受控自回归积分滑动平均模型(controlled auto-regressive integrated moving average,CARIMA)的广义预测控制^[7,8](generalized

predictive control, GPC)。广义预测控制是广义最小方差控制的一个推广,由于它采用了长时域的多步输出预测、滚动实现优化的控制策略来取代广义最小方差控制中的一步预测优化,从而适用于时延和非最小相位对象,并改善了控制性能和模型失配的鲁棒性。

预测控制和自适应控制结合构成一类自适应预测控制器,自适应预测控制有多种方法,如引入观测器多项式提高鲁棒性的自适应广义预测控制方法^[15]、基于状态空间模型的广义预测控制^[16]、加权输入预测控制策略^[17]、具有输入饱和的自适应预测控制方法^[18]等。

本节介绍最早的也是最基础的 Clarke 提出的基于受控自回归积分滑动平均模型的广义预测自校正控制器^[7],该自校正控制器的参数可调控制器是广义预测控制器,因此,首先介绍广义预测控制器。

3.8.2 广义预测控制器设计

1. 控制问题描述

广义预测控制算法所针对的被控对象模型是 CARIMA 模型(受控自回归积分滑动平均模型),它是 CARMA 模型的一种发展,适用于存在非平稳随机扰动的情况。被控对象描述如下

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \chi(k) \quad (3.8.1)$$

式中

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_B} \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

这里假定被控对象的时延 $d=1$,若 $d>1$,则只须令 $B(z^{-1})$ 多项式中前 $d-1$ 项系数为零即可, $\chi(k)$ 表示扰动项。 $\chi(k)$ 是非平稳的,例如在随机时刻产生的幅度大小为随机的扰动,像工业过程中物料的变化,又如基于能量平衡的运动和可用布朗运动描述的过程,它们的近似模型为

$$\chi(k) = \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})} \xi(k) \quad (3.8.3)$$

式中, $\Delta(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$ 为差分算子。

将式(3.8.3)代入式(3.8.1)即得 CARIMA 模型如下

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + \frac{C(z^{-1})}{\Delta(z^{-1})} \xi(k) \quad (3.8.4)$$

令

$$\bar{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta(z^{-1}) = A(z^{-1})(1 - z^{-1}) \quad (3.8.5)$$

$$\Delta u(k-1) = u(k-1) - u(k-2) \quad (3.8.6)$$

则被控对象模型为如下形式

$$\bar{A}(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3.8.7)$$

为了突出方法原理和推导简单起见,通常设 $C(z^{-1})=1$,于是有

$$\bar{A}(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + \xi(k) \quad (3.8.8)$$

CARIMA 模型具有下列特点:

(1) 可描述一类非平稳扰动;

(2) 可保证被控对象输出稳态误差的均值为零。CARIMA 模型能自然地把积分作用纳入控制律中,因此设定值和阶跃负载扰动引起的偏差将自然消除。

控制目标是,针对被控对象的数学模型式(3.8.8),设计广义预测控制器,使得被控对象 $(k+j)$ 时刻的输出 $y(k+j)$ 与参考输入 $w(k+j)$ ($j=1,2,\dots,N_1$) 的误差平方的累加以及 $(k+j)$ 时刻的控制输入增量 $\Delta u(k+j-1)$ ($j=1,2,\dots,N_2$) 的平方累加之和的期望极小,即

$$\min J$$

其中

$$J(N_1, N_2) = E \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} [y(k+j) - w(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_2} [\Delta u(k+j-1)]^2 \right\} \quad (3.8.9)$$

式中, N_1 为预测时域长度; N_2 为控制时域长度; 常数 λ 为控制加权系数,由控制器设计者确定,确定的原则是要保证闭环系统稳定,并且具有良好的性能。

2. 广义预测控制器

由于广义预测控制器的可调参数控制器是广义预测控制,所以下面首先介绍对象模型已知时的广义预测控制器,它具有预测模型、滚动优化、反馈校正三个基本特征。

1) 预测模型

广义预测控制器设计的任务是设计一个递推控制律,它在 k 时刻产生 N_2 个未来的控制序列 $\{\Delta u(k+j); j=1,2,\dots,N_2\}$,而这些控制序列作用于被控对象的结果是使得性能指标式(3.8.9)为极小。

为表达简洁起见,定义

$$\mathbf{y}(k+1) = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+N_1)]^T \quad (3.8.10)$$

$$\mathbf{w}(k+1) = [w(k+1), w(k+2), \dots, w(k+N_1)]^T \quad (3.8.11)$$

$$\Delta \mathbf{u}(k) = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N_2-1)]^T \quad (3.8.12)$$

将性能指标式(3.8.9)表示成如下矩阵形式

$$J(N_1, N_2) = E \{ [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{w}(k+1)]^T [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{w}(k+1)] + \lambda \Delta \mathbf{u}^T(k) \Delta \mathbf{u}(k) \} \quad (3.8.13)$$

与最小方差控制类似,我们仍然需要在 k 时刻求取对未来的输出的最优预报。不同的是,我们需要得到未来一个时间段 N_1 里的一个多步预测,因此需要建立预测模型,然后求取最优预报序列 $y^*(k+j|k)$ ($j=1,2,\dots,N_1$)。

引入如下 Diophantine 方程

$$1 = E_j(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (3.8.14)$$

式中, $\bar{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta(z^{-1})$ 和 z^{-j} 为已知多项式; $E_j(z^{-1})$ 和 $F_j(z^{-1})$ 由 $A(z^{-1})$ 和预测时域 j 唯一确定; $E_j(z^{-1})$ 的阶次为 $j-1$; $F_j(z^{-1})$ 的阶次为 n_A 。显然对于 $F_j(z^{-1})$ 有

$$F_j(z^{-1}) = f_0^j + f_1^j z^{-1} + \cdots + f_{n_A}^j z^{-n_A} \quad (3.8.15)$$

而对于 $E_j(z^{-1})$, 我们可以得到 $E_j(z^{-1})$ 的更简单的形式。注意到对于 $(j+1)$ 时刻, 有

$$1 = E_{j+1}(z^{-1})\bar{A}(z^{-1}) + z^{-j-1}F_{j+1}(z^{-1}) \quad (3.8.16)$$

式(3.8.16)和式(3.8.14)相减, 并整理后可得

$$E_{j+1}(z^{-1}) - E_j(z^{-1}) = z^{-j} \frac{F_j(z^{-1}) - z^{-1}F_{j+1}(z^{-1})}{\bar{A}(z^{-1})} \quad (3.8.17)$$

可以看出, 式(3.8.17)左侧从 0 到 $(j-1)$ 次的所有幂次项的系数均为 0, 说明 $E_{j+1}(z^{-1})$ 和 $E_j(z^{-1})$ 的前 j 项的系数必然相等, 因此有关系式

$$E_{j+1}(z^{-1}) = E_j(z^{-1}) + e_j z^{-j} \quad (3.8.18)$$

成立, 也就说明 $E_{j+1}(z^{-1})$ 的前 $(j-1)$ 项和 $E_j(z^{-1})$ 可以表示为

$$E_j(z^{-1}) = e_0 + e_1 z^{-1} + \cdots + e_{j-1} z^{-j+1} \quad (3.8.19)$$

将被控对象模型式(3.8.8)两端同乘以 $E_j(z^{-1})z^j$ 可得

$$E_j(z^{-1})\bar{A}(z^{-1})y(k+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + E_j(z^{-1})\xi(k+j) \quad (3.8.20)$$

由式(3.8.14)代换上式中的 $E_j(z^{-1})\bar{A}(z^{-1})$ 可得

$$[1 - z^{-j}F_j(z^{-1})]y(k+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + E_j(z^{-1})\xi(k+j) \quad (3.8.21)$$

整理得

$$y(k+j) = E_j(z^{-1})B(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + F_j(z^{-1})y(k) + E_j(z^{-1})\xi(k+j) \quad (3.8.22)$$

我们再按照下面的方式将 $(j-1+n_B)$ 阶多项式 $E_j(z^{-1})B(z^{-1})$ 分解为两项之和

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = G_j(z^{-1}) + z^{-j}H_j(z^{-1}) \quad (3.8.23)$$

式中, $j-1$ 阶多项式 $G_j(z^{-1})$ 为 $E_j(z^{-1})B(z^{-1})$ 的前 j 个系数组成的多项式; n_B-1 阶多项式 $H_j(z^{-1})$ 为由后面剩下的 n_B 个系数组成的多项式。对于 $H_j(z^{-1})$ 有

$$H_j(z^{-1}) = h_0^j + h_1^j z^{-1} + \cdots + h_{n_B-1}^j z^{-n_B+1} \quad (3.8.24)$$

而对于 $G_j(z^{-1})$, 我们也可以得到 $G_j(z^{-1})$ 的更简单的形式。注意到对于 $(j+1)$ 时刻, 有

$$E_{j+1}(z^{-1})B(z^{-1}) = G_{j+1}(z^{-1}) + z^{-j-1}H_{j+1}(z^{-1}) \quad (3.8.25)$$

式(3.8.25)与式(3.8.23)相减, 并整理后可得

$$G_{j+1}(z^{-1}) - G_j(z^{-1}) = g_j z^{-j} \quad (3.8.26)$$

同样可以看出, 式(3.8.26)左侧从 0 到 $(j-1)$ 次的所有幂次项的系数均为 0, 说明 $G_{j+1}(z^{-1})$ 和 $G_j(z^{-1})$ 的前 j 项的系数必然相等, 也就说明 $G_j(z^{-1})$ 的形式为

$$G_j(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots + g_{j-1} z^{-j+1} \quad (3.8.27)$$

这样,由式(3.8.22)可得预测模型

$$y(k+j) = G_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + H_j(z^{-1})\Delta u(k-1) + F_j(z^{-1})y(k) + E_j(z^{-1})\xi(k+j), \quad j = 1, 2, \dots, N_1 \quad (3.8.28)$$

注意到多项式 $G_j(z^{-1})$ 的阶次为 $(j-1)$, 上式右侧第一项代表未来的控制输入 $\Delta u(k+j-1)$ 的作用(也是我们在控制律中要求取的), 第二项代表了以前的控制输入 $\Delta u(k-1)$ 的作用, 第三项代表被控对象当前和过去的输出的作用, 同时注意到 $E_j(z^{-1})$ 的阶次也为 $(j-1)$, 说明第四项中的噪声项均是未来时刻的。

因此, 在 k 时刻对未来的 $(k+j)$ 时刻的最优预报为

$$y^*(k+j|k) = G_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + H_j(z^{-1})\Delta u(k-1) + F_j(z^{-1})y(k) \quad (3.8.29)$$

且有下列式成立

$$y(k+j) = y^*(k+j|k) + E_j(z^{-1})\xi(k+j) \quad (3.8.30)$$

定义

$$\mathbf{H}(z^{-1}) = [H_1(z^{-1}), \dots, H_{N_1}(z^{-1})]^T \quad (3.8.31)$$

$$\mathbf{F}(z^{-1}) = [F_1(z^{-1}), \dots, F_{N_1}(z^{-1})]^T \quad (3.8.32)$$

$$\mathbf{e}_\xi(k) = [E_1(z^{-1})\xi(k+1), \dots, E_{N_1}(z^{-1})\xi(k+N_1)]^T \quad (3.8.33)$$

由多项式 $G_j(z^{-1})$ 的系数倒序排列先组成一个 $N_1 \times N_1$ 维下三角方阵, 再截取前 N_2 列定义为矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 & & & \\ g_1 & g_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \cdots & g_0 \\ \vdots & \vdots & & \\ g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \cdots & g_{N_1-N_2} \end{bmatrix}_{N_1 \times N_2} \quad (3.8.34)$$

由此, 预测模型式(3.8.28)可以写成如下的向量形式

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(k) + \mathbf{H}(z^{-1})\Delta\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{e}_\xi(k) \quad (3.8.35)$$

2) 最优控制律

把式(3.8.35)代入式(3.8.13), 并对性能指标 $J(N_1, N_2)$ 关于 $\Delta\mathbf{u}(k)$ 求偏导, 并由极值的必要条件 $\frac{\partial J(N_1, N_2)}{\partial \Delta\mathbf{u}(k)} = 0$ 可得

$$\frac{\partial J(N_1, N_2)}{\partial \Delta\mathbf{u}(k)} = 2 \frac{\partial [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{w}(k+1)]}{\partial \Delta\mathbf{u}(k)} [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{w}(k+1)] + 2\lambda \Delta\mathbf{u}(k) = 0 \quad (3.8.36)$$

又因为

$$\frac{\partial [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{w}(k+1)]}{\partial \Delta\mathbf{u}(k)} = \mathbf{G}^T \quad (3.8.37)$$

所以

$$\mathbf{G}^T[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{w}(k+1)] + \lambda \Delta \mathbf{u}(k) = 0 \quad (3.8.38)$$

把式(3.8.35)代入式(3.8.38)可得使得性能指标式(3.8.13)取最小值的向量形式的最优控制律为

$$\Delta \mathbf{u}(k) = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k-1)] \quad (3.8.39)$$

3) 滚动优化和反馈校正

式(3.8.39)的含义在于,在 k 时刻,给定未来一段时间(长度为 N_1)的参考轨迹

$$\mathbf{w}(k+1) = [\mathbf{w}(k+1), \mathbf{w}(k+2), \dots, \mathbf{w}(k+N_1)]^T$$

根据当前及以前时刻的被控对象的输出 $\mathbf{y}(k), \mathbf{y}(k-1), \dots$ 以及以前时刻的控制输入 $\Delta \mathbf{u}(k-1), \Delta \mathbf{u}(k-2), \dots$ 可以确定未来一段时间(长度为 N_2)的控制序列

$$\Delta \mathbf{u}(k) = [\Delta \mathbf{u}(k), \Delta \mathbf{u}(k+1), \dots, \Delta \mathbf{u}(k+N_2-1)]^T$$

如果将上述控制序列输入被控对象,理论上应当使得性能指标式(3.8.13)达到极小。

由于模型本身的不确定性,预测控制采用滚动优化的方式,因此,在控制器闭环运行的过程中,在每一时刻,控制器只保留该控制序列的第一项 $\Delta \mathbf{u}(k)$ 作用到被控对象上,而将后面的控制序列 $\Delta \mathbf{u}(k+1), \dots, \Delta \mathbf{u}(k+N_2-1)$ 完全丢掉。在下一时刻,即 $(k+1)$ 时刻,采用最优控制律式(3.8.39)可以求得 $(k+1)$ 时刻开始到未来一段时间(长度为 N_2)的控制序列 $\Delta \mathbf{u}(k+1), \dots, \Delta \mathbf{u}(k+N_2)$,只保留控制序列的第一项 $\Delta \mathbf{u}(k+1)$,作为控制输入加到被控对象模型式(3.8.8),重复上述过程实现滚动优化和反馈校正。

每一个控制周期中,求控制序列需要采用式(3.8.16)和式(3.8.23)解 $(4 \times N_1)$ 个多项式 $E_j(z^{-1})$ 和 $F_j(z^{-1})$ 、 $H_j(z^{-1})$ 和 $G_j(z^{-1})$,计算量很大,为了节省计算时间,直接求 $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$,令 $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$ 的第一行元素为 $\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_{N_1}]$,并注意到 $\Delta \mathbf{u}(k)$ 的第一个元素是 $\Delta u(k)$,由式(3.8.39)可得当前的控制量 $u(k)$ 的递推求解公式为

$$u(k) = u(k-1) + \mathbf{P}^T [\mathbf{w}(k+1) - \mathbf{F}(z^{-1})\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(z^{-1})\Delta \mathbf{u}(k-1)] \quad (3.8.40)$$

求解 $\mathbf{P}^T$ 、 $\mathbf{F}(z^{-1})$ 、 $\mathbf{H}(z^{-1})$ 可以采用 Diophantine 方程的递推求解算法,详见文献[7]。

4) 性能分析

广义预测控制器必须要保证闭环系统的稳定性,即被控对象的输入和输出是均方有界的,即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.8.41)$$

并且使得性能指标式(3.8.9)达到最优,即使得被控对象 $(k+j)$ 时刻的输出 $y(k+j)$ 与参考输入 $\mathbf{w}(k+j)$ ($j=1, 2, \dots, N_1$)的误差平方的累加以及 $(k+j)$ 时刻的控制输入增量 $\Delta u(k+j-1)$ ($j=1, 2, \dots, N_2$)的平方累加之和的均值极小,即

$$J = E \left\{ \sum_{i=1}^{N_1} [p_i E_j(z^{-1}) \xi(k+j)]^2 \right\} = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\sum_{i=0}^{N_1-j} p_{i+j} e_i \right)^2 \sigma^2$$

闭环系统的稳定性由定理 3.8.1 给出。

定理 3.8.1 假定:

(1) 依概率 1 有 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty$;

(2) 凑试选择 N_1, N_2 和加权常数 $\lambda(N_1, N_2)$ 与 $\mathbf{G}$ 相关, λ 与 $\mathbf{P}^T = [p_1, p_2, \dots, p_{N_1}]$ 相关, $\mathbf{P}^T$ 与 $\alpha(z^{-1})$ 和 $\beta(z^{-1})$ 均有关使得下式成立

$$\bar{A}(z^{-1})[1 + z^{-1}\beta(z^{-1})] + z^{-1}B(z^{-1})\alpha(z^{-1}) \neq 0, \quad |z| \geq 1 \quad (3.8.42)$$

式中

$$P(z^{-1}) = p_{N_1} + p_{N_1-1}z^{-1} + \dots + p_1z^{-N_1+1} \quad (3.8.43)$$

$$\alpha(z^{-1}) = \sum_{j=1}^{N_1} p_j F_j(z^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{n_A} z^{-n_A} \quad (3.8.44)$$

$$\beta(z^{-1}) = \sum_{j=1}^{N_1} p_j H_j(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{n_B-1} z^{-n_B+1} \quad (3.8.45)$$

则, 广义最小预测控制律式(3.8.40)能保证系统是稳定的, 即依概率 1 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) < \infty \quad (3.8.46)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) < \infty \quad (3.8.47)$$

证明 由被控对象模型式(3.8.8)和控制器方程式(3.8.40)可得闭环系统方程

$$\begin{aligned} & [\bar{A}(z^{-1})(1 + z^{-1}\beta(z^{-1})) + z^{-1}B(z^{-1})\alpha(z^{-1})]y(k) \\ & = z^{-1}B(z^{-1})P(z^{-1})w(k + N_1) + [1 + z^{-1}\beta(z^{-1})]\xi(k) \end{aligned} \quad (3.8.48)$$

$$\begin{aligned} & [\bar{A}(z^{-1})(1 + z^{-1}\beta(z^{-1})) + z^{-1}B(z^{-1})\alpha(z^{-1})]u(k) \\ & = A(z^{-1})P(z^{-1})w(k + N_1) - \frac{\alpha(z^{-1})}{\Delta}\xi(k) \end{aligned} \quad (3.8.49)$$

由于 $\bar{A}(z^{-1})[1 + z^{-1}\beta(z^{-1})] + z^{-1}B(z^{-1})\alpha(z^{-1})$ 是稳定的, $w(k)$ 有界, $\xi(k)$ 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) < \infty, \text{ 使用附录中的引理 A. 1. 2, 再由式(3.8.49)和式(3.8.48)}$$

可得

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k) \leq \frac{K_1}{N} \sum_{k=1}^N w^2(k + N_1) + \frac{K_2}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_3}{N} < \infty \quad (3.8.50)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \leq \frac{K_4}{N} \sum_{k=1}^N w^2(k + N_1) + \frac{K_5}{N} \sum_{k=1}^N \xi^2(k) + \frac{K_6}{N} < \infty \quad (3.8.51)$$

此即式(3.8.46)和式(3.8.47)。

由广义预测控制律式(3.8.40)可得

$$P(z^{-1})w(k + N_1) = \Delta u(k) + \alpha(z^{-1})y(k) + \beta(z^{-1})\Delta u(k - 1) \quad (3.8.52)$$

则广义预测控制律式(3.8.40)极小化如下目标函数

$$J_1 = E\{[P(z^{-1})(y(k + N_1) - w(k + N_1) + \lambda Q(z^{-1})\Delta u(k + N_2 - 1))]^2\} \quad (3.8.53)$$

式中,多项式 $Q(z^{-1})$ 为 $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1}$ 的第一行元素 $\mathbf{q}^T$ 组成的多项式,即

$$\mathbf{q}^T = [q_1, \dots, q_{N_2}]$$

$$Q(z^{-1}) = q_{N_2} + q_{N_2-1}z^{-1} + \dots + q_1z^{-N_2+1}$$

给式(3.8.35)左乘 $\mathbf{G}^T$ 且两边相加 $\lambda \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}(k)$ 得

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T \mathbf{y}(k+1) + \lambda \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}(k) &= \mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}(k) + \lambda \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{G}^T \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{y}(k) \\ &\quad + \mathbf{G}^T \mathbf{H}(z^{-1}) \Delta \mathbf{u}(k-1) + \mathbf{G}^T \mathbf{e}_\xi(k) \end{aligned} \quad (3.8.54)$$

上式可写成

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(k) &= (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \{ \mathbf{G}^T [\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{e}_\xi(k) - \mathbf{F}(z^{-1}) \mathbf{y}(k) \\ &\quad - \mathbf{H}(z^{-1}) \Delta \mathbf{u}(k-1)] + \lambda \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}(k) \} \end{aligned} \quad (3.8.55)$$

上式的第一行可写成

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= P(z^{-1})y(k+N_1) + \lambda Q(z^{-1})\Delta u(k+N_2-1) - \alpha(z^{-1})y(k) \\ &\quad - \beta(z^{-1})\Delta u(k-1) - v(k+N_1) \end{aligned} \quad (3.8.56)$$

式中

$$v(k+N_1) = \sum_{j=1}^{N_1} p_j E_j(z^{-1}) \xi(k+j) \quad (3.8.57)$$

定义

$$\phi(k+N_1) = P(z^{-1})y(k+N_1) + \lambda Q(z^{-1})\Delta u(k+N_2-1) \quad (3.8.58)$$

则式(3.8.56)可以写成

$$\phi(k+N_1) - v(k+N_1) = \Delta u(k) + \alpha(z^{-1})y(k) + \beta(z^{-1})\Delta u(k-1) \quad (3.8.59)$$

把式(3.8.59)代入式(3.8.53)并注意到 $v(k+N_1)$ 与 $u(k), u(k-1), \dots$ 及 $y(k), y(k-1), \dots$ 是不相关的,则有

$$\begin{aligned} J_1 &= E\{[\alpha(z^{-1})y(k) + \beta(z^{-1})\Delta u(k-1) + \Delta u(k) - P(z^{-1})w(k+N_1)]^2\} \\ &\quad + E\{[v(k+N_1)]^2\} \end{aligned}$$

由广义预测控制律式(3.8.52)可知,上式第一项为零,故

$$J_1 = E\{[v(k+N_1)]^2\} \quad (3.8.60)$$

由式(3.8.57)可知

$$\min J_1 = E\left\{ \sum_{j=1}^{N_1} [p_j E_j(z^{-1}) \xi(k+j)]^2 \right\} = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\sum_{i=0}^{N_1-j} p_{i+j} e_i \right)^2 \sigma^2$$

5) N_1, N_2 以及 λ 的选择

广义预测控制方法由于采用了多步预测、滚动优化和反馈校正的控制策略,更多地利用了反映被控对象动态行为的有用信息,提高了对被控对象时延和阶次变化的鲁棒性,从而得到良好的控制性能。但是,由于广义预测控制采用多步预测的方式,与一般的单步预测比较,增加了预测时域长度 N_1 和控制时域长度 N_2 两个参数,而这两个参数以及加权系数对控制性能产生重要的影响。由性能分析可以看出,这两个参数以及加权系数的选择不仅关系到控制系统的稳定性,而且对控制性能产生

重要影响。下面给出选择它们的一般性原则。

(1) 预测时域长度 N_1 。为了使滚动优化真正有意义,应使得 N_1 包括被控对象的真实动态部分,也就是说应把当前控制影响较多的所有响应都包括在内,一般应大于 $B(z^{-1})$ 的阶次,或近似等于过程的上升时间。在实际应用中,建议用较大的 N_1 ,使它超过被控对象脉冲响应的时延部分或非最小相位特性引起的反向部分,并覆盖被控对象的主要动态响应。 N_1 的大小对于系统的稳定性和快速性有很大的影响, N_1 较小,虽然快速性好,但稳定性和鲁棒性较差; N_1 较大,虽然鲁棒性好,但动态响应慢,增加了计算时间,降低了系统的实时性。实际选择时,可在上述两者之间取值,使闭环系统既具有所期望的鲁棒性,又具有所要求的快速性。

(2) 控制时域 N_2 。 N_2 是一个很重要的设计参数,由于优化的输出预测最多只能受 N_2 个控制增量的影响,所以应有 $N_2 \leq N_1$ 。一般情况下, N_2 越小,则跟踪性能越差。为改善跟踪性能,就要求增加控制步数来提高对被控对象的控制能力,但随着 N_2 的增大,控制的灵敏度得到提高,被控对象的稳定性和鲁棒性随之降低;而且当 N_2 增大时,矩阵的维数增加,计算量增大,使系统的实时性降低。因此, N_2 的选择要兼顾快速性和稳定性,两者综合考虑。对于开环稳定但可能带有时延和非最小相位特性的被控对象,可以取 $N_2=1$;对于复杂被控对象,增大 N_2 直到控制和输出响应变化较小时,此时的 N_2 是最合适的。经过多次仿真研究表明, N_2 最少等于不稳定或阻尼极点的个数。另外,当 N_2 选取小于 N_1 时,矩阵 G 的列数将减小。当 $N_2=1$ 时, G 变为一列向量,这将大大减少控制算法的在线计算量。

(3) 控制加权常数 λ 。 λ 的作用是用来限制控制增量 $\Delta u(k)$ 的剧烈变化,以减少对被控对象的过大冲击。通过增大 λ 可以实现稳定控制,但同时也减弱了控制作用。一般 λ 取得较小,实际选择时,可先令 λ 为 0 或是一个较小的数值,此时若控制系统的控制量变化较大,则可适当增加 λ ,直到取得满意的控制效果为止。

总的说来,广义预测控制算法中的参数选择可以从两个方面来考虑。对于一般的过程控制,取 $N_1=1$, N_2 为被控对象的上升时间, $N_2=1$,则可获得较好的控制结果;对于性能要求较高的被控对象,建议选取较大一些的 N_2 。

大量的计算仿真研究表明 N_1 和 λ 是影响广义预测控制性能的两个重要参数,而且两者之间相互影响。当 N_1 增大时, λ 也相应增加,否则较小的 λ 和较大的 N_1 可能影响闭环系统的稳定性。这两个参数的增加将使被控对象的反应速度变慢;反之 N_1 小于某一值将导致被控对象的超调和振荡。

3.8.3 广义预测自适应控制器设计

1. 控制问题描述

被控对象仍然采用式(3.8.8)进行描述

$$\bar{A}(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + \xi(k) \quad (3.8.61)$$

式中,对象时延 $d=1$ 已知, $\bar{A}(z^{-1})=A(z^{-1})\Delta(z^{-1})=A(z^{-1})(1-z^{-1})$, 多项式 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的阶次 n_A 和 n_B 已知,但多项式 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的系数未知。

控制目标是,针对被控对象的数学模型式(3.8.61),设计广义预测自校正控制器,使得被控对象 $(k+j)$ 时刻的输出 $y(k+j)$ 与参考输入 $w(k+j)$ ($j=1,2,\dots,N_1$) 的误差平方的累加以及 $(k+j)$ 时刻的控制输入增量 $\Delta u(k+j-1)$ ($j=1,2,\dots,N_2$) 的平方累加之和的期望极小,即

$$\min J$$

式中

$$J(N_1, N_2) = E \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} [y(k+j) - w(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_2} [\Delta u(k+j-1)]^2 \right\} \quad (3.8.62)$$

2. 广义预测自适应控制器

由于 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 未知,因此广义预测控制器式(3.8.40)中的多项式 $P(z^{-1})$ 、 $F(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 未知,本节使用显式自校正控制算法,首先在线估计出 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的系数,然后用参数估计值通过控制器参数计算从而得到广义预测自校正控制算法。下面首先写出 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的参数辨识方程。

1) 被控对象参数辨识方程

把被控对象模型式(3.8.61)写成如下形式

$$\begin{aligned} \Delta y(k) = & -a_1 \Delta y(k-1) - \dots - a_{n_A} \Delta y(k-n_A) \\ & + b_0 \Delta u(k-1) + \dots + b_{n_B} \Delta u(k-n_B-1) + \xi(k) \end{aligned} \quad (3.8.63)$$

定义数据向量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(k-1) = & [-\Delta y(k-1), -\Delta y(k-2), \dots, -\Delta y(k-n_A), \\ & \Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots, \Delta u(k-n_B-1)]^T \end{aligned} \quad (3.8.64)$$

和参数向量

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_{n_A}, b_0, b_1, \dots, b_{n_B}]^T \quad (3.8.65)$$

于是式(3.8.63)可写成

$$\Delta y(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k-1) \boldsymbol{\theta} + \xi(k) \quad (3.8.66)$$

2) 参数估计算法和广义预测自适应控制器

考虑到被控对象参数可能慢时变的情况,因此选择具有遗忘因子的递推最小二乘算法,即

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{K}(k) [\Delta y(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k-1) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \quad (3.8.67)$$

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-1)}{\alpha + \boldsymbol{\varphi}^T(k-1) \mathbf{P}(k-1) \boldsymbol{\varphi}(k-1)} \quad (3.8.68)$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k) \boldsymbol{\varphi}^T(k-1)] \mathbf{P}(k-1) \quad (3.8.69)$$

式中, α 为遗忘因子,取值为 $0.95 < \alpha < 1$, $\mathbf{P}(-1)$ 为任意正定矩阵。

由式(3.8.67)~式(3.8.69)可得 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$ 。因此,广义预测自适应控制

器方程为

$$\hat{P}(z^{-1})w(k+N_1) = \Delta u(k) + \hat{\alpha}(z^{-1})y(k) + \hat{\beta}(z^{-1})\Delta u(k-1) \quad (3.8.70)$$

式中, $\hat{P}(z^{-1})$ 、 $\hat{\alpha}(z^{-1})$ 和 $\hat{\beta}(z^{-1})$ 由被控对象的估计值 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$ 并利用式(3.8.14)、式(3.8.23)以及式(3.8.43)~式(3.8.45)计算获得。

综上所述, 广义预测自适应控制算法的计算步骤总结如下:

- (1) 给定参数估计算法中的遗忘因子 α 、正定矩阵 $\mathbf{P}(-1)$ 和初始值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$, 给定预测时域长度 N_1 、控制时域长度 N_2 和控制加权系数 λ ;
- (2) 读取 $y(k)$;
- (3) 用具有遗忘因子的递推最小二乘算法式(3.8.67)~式(3.8.69)在线估计 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$;
- (4) 用 $\hat{A}(z^{-1})$ 和 $\hat{B}(z^{-1})$ 代替 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 递推计算出 $E_j(z^{-1})$ 、 $F_j(z^{-1})$ 和 $G_j(z^{-1})$;
- (5) 递推估计逆矩阵 $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1}$;
- (6) 计算 $(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T$ 的第一行 $\mathbf{P}^T$;
- (7) 求解控制序列 $\Delta \mathbf{u}(k)$, 保留第一项, 根据 $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ 计算控制量 $u(k)$;
- (8) $k = k+1$, 返回计算步骤(2)。

3.8.4 仿真实验

为了验证广义预测控制律和广义预测自适应控制律的有效性, 我们进行下列的仿真实验。

例 3.8.1 广义预测控制器的仿真实验

被控对象模型在下列的 5 个时间段中, 分别由下面不同的传递函数进行描述, 代表了动态特性大幅度变化的参数时变的被控对象。

当 k 在 1~159 期间, 被控对象模型为 $\frac{1}{1+10s+40s^2}$;

当 k 在 160~319 期间, 被控对象模型为 $\frac{e^{-2.7s}}{1+10s+40s^2}$;

当 k 在 320~479 期间, 被控对象模型为 $\frac{e^{-2.7s}}{1+10s}$;

当 k 在 480~639 期间, 被控对象模型为 $\frac{1}{1+10s}$;

当 k 在 640~800 期间, 被控对象模型为 $\frac{1}{10s(1+2.5s)}$ 。

设采样周期为 1s, 参考输入为幅值依次为 20、50、20、0 的周期性方波。每次仿真中共采样 800 点, 即每隔 160 个采样时刻被控对象均发生变化, 因此要用一种控制

方法能较好地控制上述动态特性变化较大的被控对象是很不容易的。

在仿真中,控制 $u(k)$ 具有 ± 100 的幅值限制。仿真中使用标准的带有遗忘因子的递推最小二乘法,取遗忘因子为 0.9; 参数估计初始值为 $\hat{\theta}(0)=[1,0,0,\dots]$ 。在每一次仿真中的前 20 次采样时刻,控制 $u(k)$ 被固定为 10,以便使参数估计算法投入。

我们分别采用广义最小方差控制、广义最小方差自校正控制、零极点配置控制、零极点配置自校正控制、广义预测控制、广义预测自适应控制对上述被控对象进行控制。

(1) 广义最小方差控制和广义最小方差自校正控制

采用本章所介绍的广义最小方差控制器, $F(z^{-1})$ 和 $G(z^{-1})$ 的阶次分别取为 2 和 5, 加权多项式取为 $P(z^{-1})=1, Q(z^{-1})=\lambda=0.18$ 。

被控对象模型参数已知时的广义最小方差控制器的仿真结果如图 3.8.1 所示。

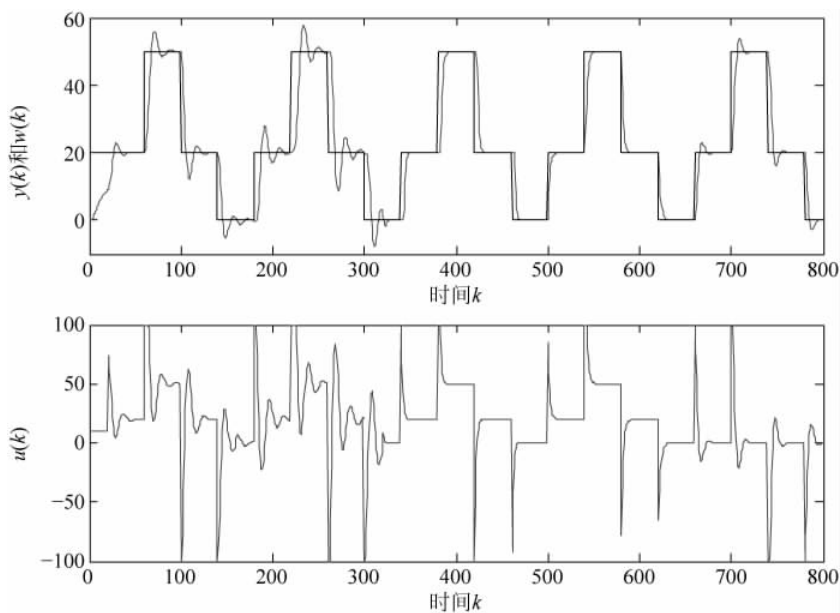


图 3.8.1 被控对象模型参数已知时的采用广义最小方差控制器的对象输出、参考输入和控制输入

当被控对象参数未知时,采用本章介绍的广义最小方差自校正控制器的仿真结果如图 3.8.2 和图 3.8.3 所示,其中图 3.8.2 为采用广义最小方差自校正控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线,图 3.8.3 为被控对象模型参数估计曲线。

(2) 零极点配置控制和零极点配置自校正控制

采用本章所介绍的零极点配置控制器, $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的阶次分别取为 2 和 6, 闭环特征多项式设定为 $T(z^{-1})=1-0.5z^{-1}$ 。

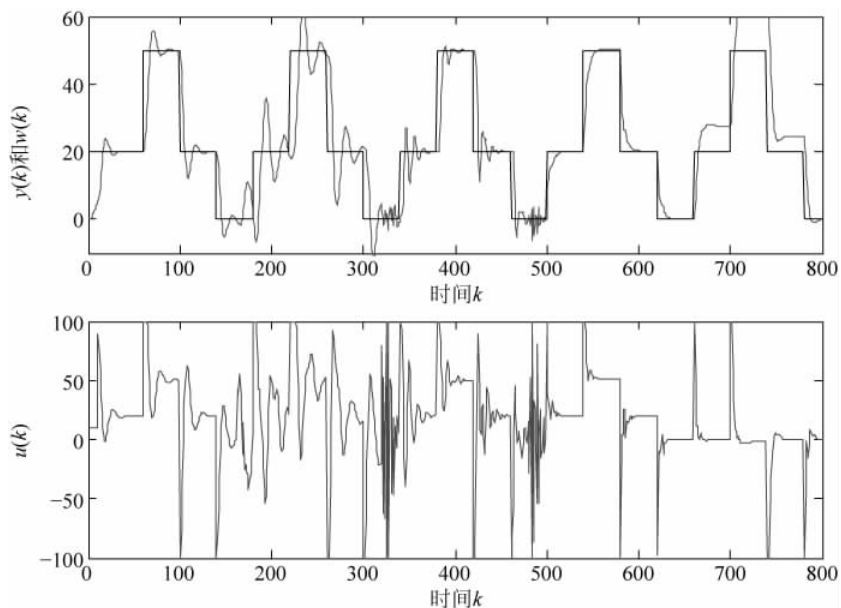


图 3.8.2 采用广义最小方差自校正控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

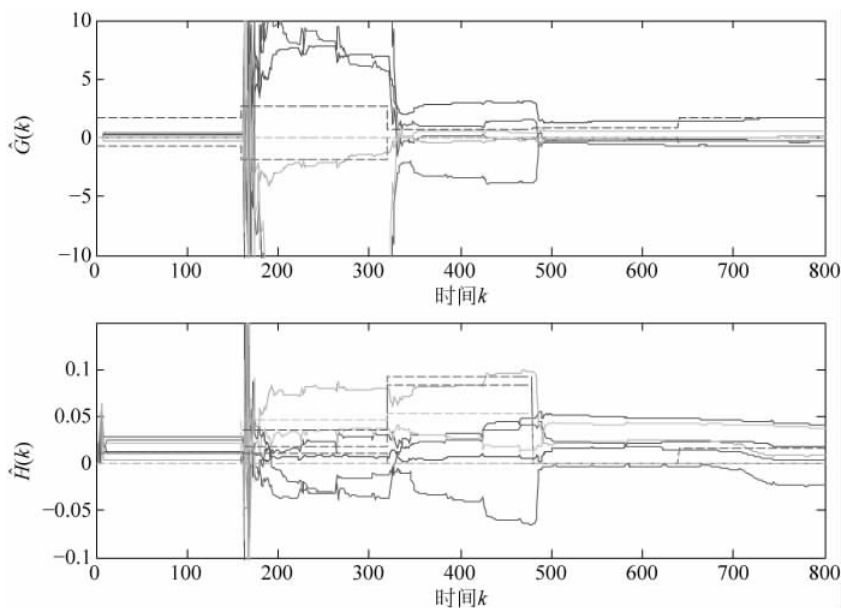


图 3.8.3 广义最小方差自校正控制器的控制器参数估计曲线

被控对象参数已知时的零极点配置控制器的仿真结果如图 3.8.4 所示。从图中可知,第 1、2、5 时间段的传递函数得到好的控制结果,但该方法对第 3、4 时间段的传递函数不起作用,这是因为第 3、4 时间段的传递函数为一阶,此时极点配置方程无法解出控制 $u(k)$ 。

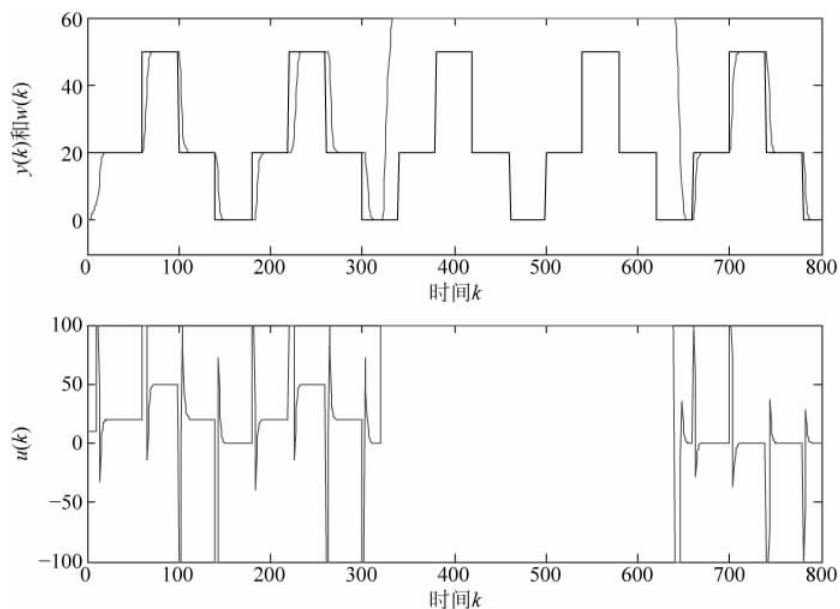


图 3.8.4 采用零极点配置控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

被控对象参数未知时的零极点配置自校正控制器的仿真结果如图 3.8.5 和图 3.8.6 所示,其中图 3.8.5 为采用零极点配置自校正控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线,图 3.8.6 为零极点配置自校正控制器的对象模型参数的估计曲线。

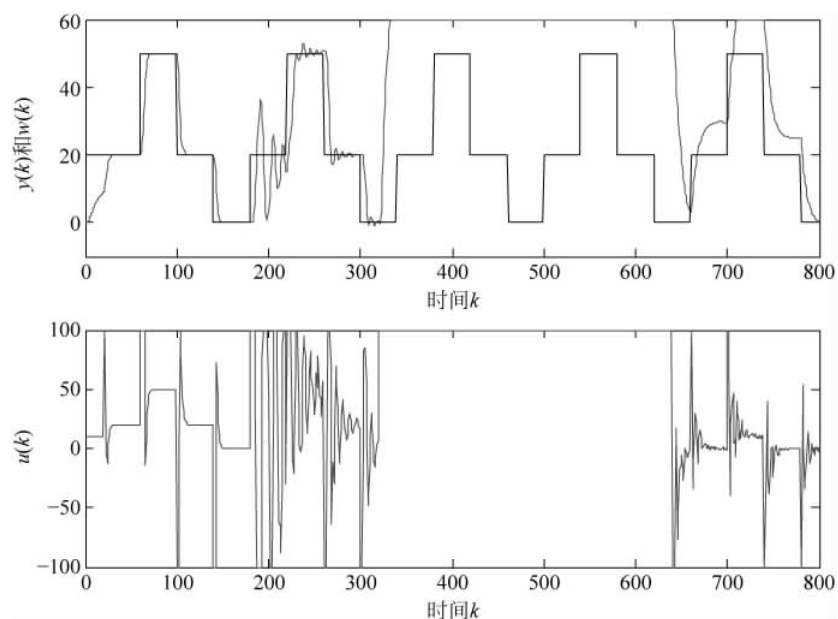


图 3.8.5 采用零极点配置自校正控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

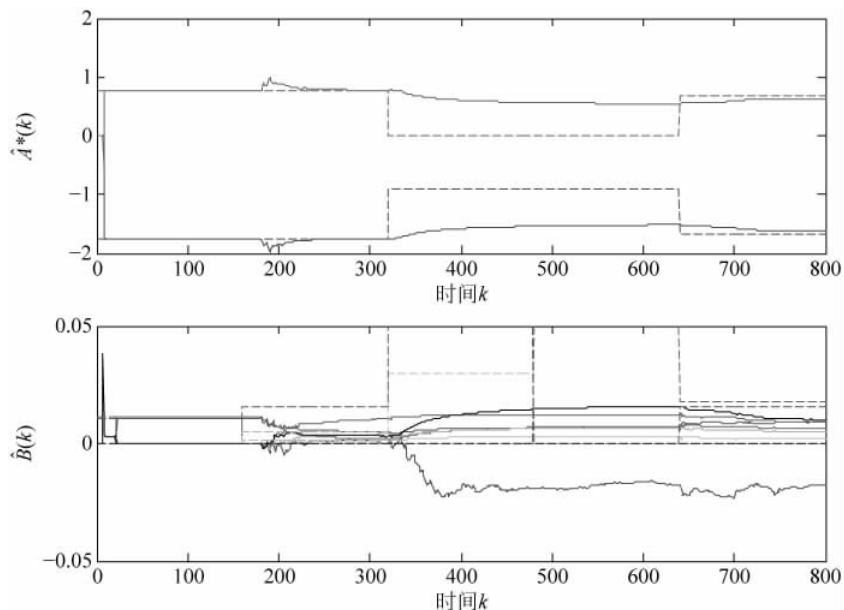


图 3.8.6 被控对象参数未知时的零极点配置自校正控制器的参数估计过程

(3) 广义预测控制和广义预测自适应控制

同极点配置方法一样, $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的阶次分别取为 2 和 6; 预测时域 $N_1 = 10$, 控制时域 $N_2 = 1$, $\lambda = 0.68$ 。被控对象参数已知时的广义预测控制器的仿真结果如图 3.8.7 所示。

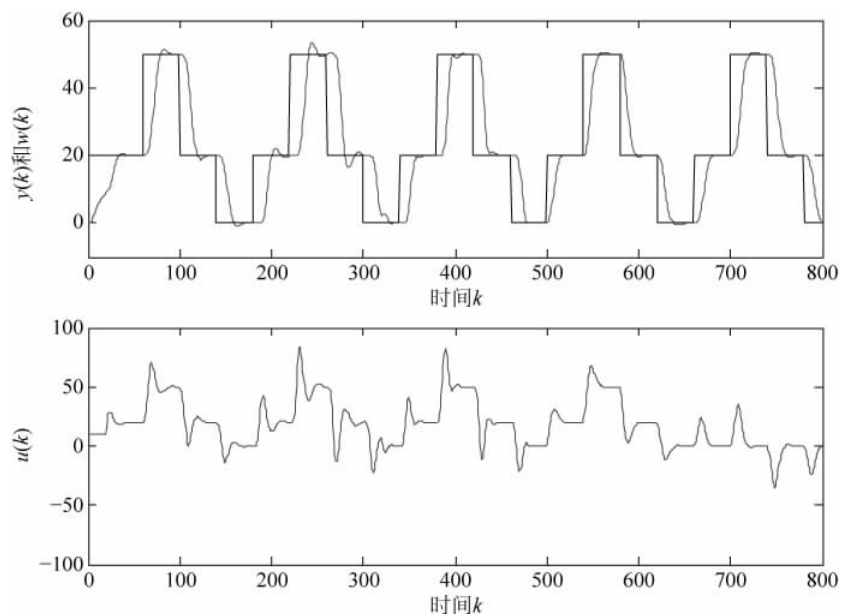


图 3.8.7 采用广义预测控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

被控对象参数未知时的广义预测自适应控制器的仿真实验结果如图 3.8.8 和图 3.8.9 所示。其中图 3.8.8 为采用广义预测自适应控制器时的被控对象输出 $y(k)$ 跟踪参考输入 $w(k)$ 以及对应的控制输入 $u(k)$ 的曲线, 图 3.8.9 为控制器参数估计的曲线。

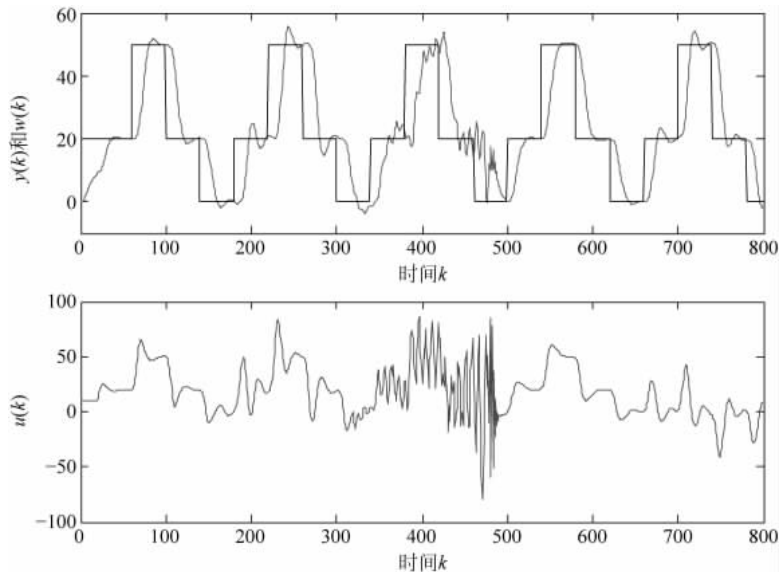


图 3.8.8 被控对象参数未知时的采用广义预测自适应控制器时的被控对象输出、参考输入和控制输入

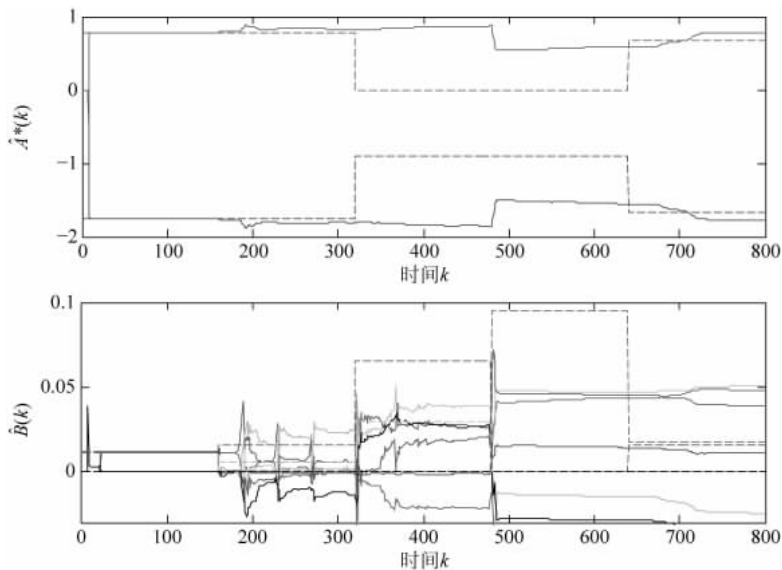


图 3.8.9 广义预测自适应控制器的控制器参数估计曲线

从该仿真例可知,与广义最小方差自校正控制和极点配置自校正控制相比,广义预测自适应控制方法对被控对象的时延和阶次的变化具有更好的鲁棒性和更好的适应性。

注:广义预测自适应控制算法可以采用隐式自校正算法直接辨识控制器参数,参数辨识方程为式(3.8.59),未知的控制器参数多项式为 $\alpha(z^{-1})$ 和 $\beta(z^{-1})$,因此,参数辨识方程可写成如下形式

$$\phi(k_1) = \Delta u(k - N_1) + \boldsymbol{\varphi}^T(k - N_1) \boldsymbol{\theta} + v(k) \quad (3.8.71)$$

式中,数据向量

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_A), \Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots, \Delta u(k-n_B)]^T \quad (3.8.72)$$

和参数向量

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_A}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n_B}]^T \quad (3.8.73)$$

具体算法详见文献[8]。

另外,需要说明的是,当 $C(z^{-1}) \neq 1$ 时的广义预测控制算法可将上述算法做相应的推广得到,有兴趣的读者可详见文献[7,8]。

思考题和习题

3.1 采用最小方差调节器对下列被控对象模型做仿真实验,分析仿真控制效果。

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) - 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

式中, $\xi(k)$ 是均值为0、方差为0.5的白噪声信号。

3.2 针对下列被控对象模型

$$y(k) + 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) - 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4) - 2v(k-4) - 1.2v(k-5) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

选择本章所介绍的最小方差和广义最小方差控制器设计方法,当参考输入为

$$w(k) = 5 + 5\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi k}{100}\right)$$

时,进行控制器设计,请写出具体的性能指标,选取适当的加权多项式,请给出对象输出或者广义输出的最优预报,给出控制器方程,进行仿真实验,并分析仿真效果。

3.3 当题3.2所给出的被控对象模型参数未知时,选择本章所介绍的最小方差和广义最小方差自校正控制器设计方法,给出控制器参数辨识方程,进行仿真实验,

并分析仿真效果。

3.4 针对下列确定性被控对象模型

$$y(k) + 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4)$$

$$y(k) - 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4)$$

将闭环极点配置为 0.5, 采用零极点配置控制器进行控制器设计, 给出设计步骤和控制器方程, 进行仿真实验, 并分析仿真效果。

3.5 针对下列随机性被控对象模型

$$y(k) + 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) - 0.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-3) - 1.4u(k-4) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

将闭环极点配置为 -0.85 和 0.5, 采用零极点配置控制器进行控制器设计, 给出设计步骤和控制器方程, 进行仿真实验, 并分析仿真效果。

3.6 当题 3.5 所给出的被控对象模型参数未知时, 将闭环极点配置为 -0.85 和 0.5, 设计零极点配置自校正控制器, 进行仿真实验, 并分析仿真效果。

3.7 针对如下被控对象模型

$$y(k) + 1.5y(k-1) = 0.7u(k-d) - 1.4u(k-d-1) + \xi(k) + 0.85\xi(k-1)$$

式中, 考虑时延 d 按下列两种方式取值:

① $d=5$, 且 d 已知;

② 当 $0 < k < 100$ 时, $d=3$, 当 $k > 100$ 时, $d=5$, 且 d 未知。

采用广义最小方差自校正控制器和零极点配置控制器进行仿真实验, 分析仿真效果。

3.8 针对下列被控对象模型

$$y(k) + 0.5y(k-1) + 0.3y(k-2) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4)$$

$$y(k) + 1.5y(k-1) + 0.3y(k-2) = 0.7u(k-3) - 0.3u(k-4)$$

当模型参数已知时请设计 PID 控制器, 当模型参数未知时设计自校正 PID 控制器, 进行仿真实验, 分析仿真效果。

3.9 针对下列被控对象模型

$$y(k) - 0.5y(k-1) = 2u(k-1) + 0.8u(k-2) + \frac{1}{1-z^{-1}}\xi(k)$$

设计广义预测控制器, 进行仿真实验, 分析仿真效果。

3.10 车辆悬架系统用以缓和不平路面给车身造成的冲击载荷, 缓冲和吸收来自车轮的振动。车辆悬架控制系统的目标是使路面波动对车体垂直方向速度的影响为最小, 意味着乘车人员的舒适感最佳。被控对象的输出为车体垂直方向速度 $v_b(t)$

$$y(t) = v_b(t) = \dot{x}_b(t)$$

式中,变量 $x_b(t)$ 表示车体相对基准平面的位移。被控对象的控制输入为力发生器的指令信号 u 。车辆悬架系统的数学模型可用下式来表示

$$y(k) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} \Delta u(k-1) + \frac{1 + c_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}} \xi(k)$$

式中,假设 $\xi(k)$ 为白噪声,表示路面波动带来的干扰。假定上式参数未知,请推导最小方差自校正调节器,使得被控对象 k 时刻的输出 $y(k)$ 的方差极小,即 $\min J$, 式中, $J = E\{y^2(k)\}$ 。

要求写出车辆悬架系统自校正调节律的设计过程,包括给出调节器方程和参数辨识方程(有关车辆悬架系统的详细介绍可参见 7.2 节内容)。

参考文献

- [1] Åström K J, Wittenmark B. On self-tuning regulators [J]. Automatica, 1973, 9(2): 155-199.
- [2] Åström K J. Adaptive control. [M]. 2nd Edition. Mass.: Addison-Wesley, 1995.
- [3] Clarke D W, Gawthrop P J. Self-tuning controller [J]. IEEE Proceedings Part D: Control Theory and Applications, 1975, 122(9): 929-934.
- [4] 柴天佑,秦守敬,段晓钢.鲁棒自适应前馈控制器及其在间歇式余热锅炉给水系统中的应用[J].自动化学报,1994,20(1): 106-109.
- [5] Wellstead P E, Prager D L, Zanker P. Pole assignment self-tuning regulator [J]. IEEE Proceedings Part D: Control Theory and Applications, 1979, 126: 781-787.
- [6] Åström K J, Wittenmark B. Self-tuning Controllers based on pole-zero placement [J]. IEEE Proceedings Part D: Control Theory and Applications, 1980, 127(3): 120-130.
- [7] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control-Par I: The basic algorithm [J]. Automatica, 1987, 23(2): 137-148.
- [8] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control-Par II: extensions and interpretations [J]. Automatica, 1987, 23(2): 149-160.
- [9] Wellstead P E, Zarrop M B. Self-tuning Systems: Control and Signal Processing [M]. Chichester: John Wiley & Sons, 1991.
- [10] 舒迪前,柴天佑,饶立昌.自适应控制[M].沈阳:东北大学出版社:1992.
- [11] Chai T Y. An indirect stochastic adaptive scheme with online choice of weighting polynomials [J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 1990, 35(1): 82-85.
- [12] Chai T Y. Globally convergent self-tuning controllers [J]. International Journal of Control, 1988, 48(2): 417-434.
- [13] Richalet J, Rault A, Testud J L, et al. Model predictive heuristic control: applications to industrial processes [J]. Automatica, 1978, 14(5): 413-428.
- [14] Cutler C R, Ramaker B L. Dynamic matrix control-a computer control algorithm [C]. Proc. Joint Automatic Control Conference, 1980, San Francisco, California. wp5-b/6.
- [15] Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control [J]. Automatica, 1989, 25(6): 859-875.

- [16] Elshafei A L, Dumont G, Elnaggar A. Stability and convergence analyses of an adaptive GPC based on state-space modeling [J]. Int J Control, 1995, 60(1): 193-210.
- [17] Warwick K, Clarke D W. Weighted input predictive controller [J]. IEE Proc. D, Control Theory & Application, 1988, 135(1): 16-20.
- [18] Nicolao G D, Scattolini R, Sala G. An adaptive predictive regulator with input saturations [J]. Automatica, 1996, 32(4): 597-601.