

# 第 1 章

## 拉伸与压缩

### 1.1 内 容 提 要

#### 1.1.1 基本要求

- (1) 建立轴力的概念,熟练掌握轴力的计算和画轴力图的方法。
- (2) 正确建立应力的概念,掌握拉压直杆横截面和斜截面上正应力的计算。
- (3) 了解低碳钢和铸铁在拉伸和压缩时的力学行为。了解应力集中的概念。
- (4) 熟练掌握拉压杆 3 种强度问题的计算方法,建立安全因数的概念及了解确定许用应力的方法。
- (5) 熟练掌握用胡克定律计算拉压杆变形的的方法,明确弹性模量、泊松比、拉压刚度的概念。
- (6) 熟练掌握拉压静不定问题(包括温度应力和装配应力)的解法,掌握“以切代弧”求桁架节点位移的方法。
- (7) 建立应变能和应变能密度的概念,掌握拉压杆应变能和应变能密度的计算方法。

#### 1.1.2 重点与难点

##### 1. 轴向拉压杆的内力

轴向拉压杆横截面上的内力称为轴力,用符号  $F_N$  表示。求轴力采用截面法,以

使物体产生的变形来规定内力的正负号,轴力以拉为正、压为负。

## 2. 拉压杆横截面上的应力

轴向拉压杆横截面上的应力垂直于截面,为正应力,在整个横截面上均匀分布,其计算公式为

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

轴向拉压杆横截面上的正应力公式的适用范围:

- (1) 适用于弹性和塑性变形。
- (2) 适用于锥角小于  $20^\circ$ 、横截面连续变化的直杆。

## 3. 轴向拉压杆的强度计算

轴向拉压直杆的强度条件为

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$$

其中许用应力的计算式为

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$$

式中  $\sigma_u$  为材料的极限应力,对于塑性材料为材料的屈服极限  $\sigma_s$ ,对于脆性材料为材料的强度极限  $\sigma_b$ 。 $n$  为安全因数。

强度计算的 3 类问题

校核强度 
$$\sigma_{\max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$$

设计截面 
$$A \geq \frac{F_N}{[\sigma]}$$

确定许用载荷 
$$F_N \leq [\sigma]A$$

## 4. 轴向拉压杆的变形计算

轴力  $F_N(x)$  和横截面积  $A(x)$  沿轴线变化时,微段  $dx$  的轴向变形为

$$d(\Delta l) = \frac{F_N(x)dx}{EA(x)}$$

直杆轴向总变形为

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F_N(x)dx}{EA(x)}$$

上式适用于应力不超过材料比例极限的弹性范围内。当  $F_N, A, E$  均为常数时,可得

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

上式称为胡克定律。

对于阶梯形拉压杆件,其总变形应分段计算,再代数相加,即

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni} l_i}{EA_i}$$

拉压杆的轴向线应变为

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

拉压杆的横向线应变为

$$\epsilon' = -\mu\epsilon$$

式中  $\mu$  为泊松比,其表达式为

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|$$

## 5. 拉压杆的应变能

杆件在外力作用时杆内储存的能量称为应变能。若变形是弹性的,则为弹性应变能。在静载作用下,杆内弹性应变能的数值等于外力所做的功。轴向拉压杆的弹性应变能为

$$V_\epsilon = \frac{1}{2} F_N \Delta l = \frac{F_N^2 l}{2EA} = \frac{EA \Delta l^2}{2l}$$

杆件单位体积内储存的应变能称为应变能密度。若变形是弹性的,则为弹性应变能密度。轴向拉压杆的弹性应变能密度为

$$v_\epsilon = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E \epsilon^2}{2}$$

## 6. 拉压静不定问题

未知力的数目多于独立的静力平衡方程数,仅用静平衡方程不能求出全部未知数的问题,称为静不定问题。未知力的数目与独立静平衡方程数的差值,为静不定次数。必须根据变形几何关系和物理关系,列出补充方程。

解静不定问题的一般步骤如下:

- (1) 由静平衡条件列出平衡方程,确定静不定次数;
- (2) 根据结构变形的几何相容条件,列出变形的几何方程;
- (3) 由胡克定律,列出杆件变形与轴力之间的物理方程,代入几何方程,得补充方程;
- (4) 将补充方程和静平衡方程联立,求解全部未知数。

采用静力关系、几何关系、物理关系求解静不定问题的“三关系法”,是求解固体力学各种问题的基本方法,是材料力学方法的精髓。

## 1.2 例题精解

**例 1.1** 实心圆杆 1 在其外表面紧套空心圆管 2, 如图 1.1 所示。设杆的拉压刚度分别为  $E_1 A_1$  和  $E_2 A_2$ 。假设圆杆和圆管之间无相对滑动, 若此组合杆承受轴向拉力  $F$ , 试求其长度的改变量。

**解:** 设杆 1 和管 2 的轴力分别为  $F_1$  和  $F_2$ , 由平衡条件得

$$F_1 + F_2 = F \quad (\text{a})$$

2 个未知数 1 个方程, 为一次静不定。由杆 1 和管 2 的伸长量相同可得几何方程

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

将物理关系代入上式, 得力的补充方程

$$\frac{F_1 l}{E_1 A_1} = \frac{F_2 l}{E_2 A_2} \quad (\text{b})$$

联立式(a)和式(b), 解得组合杆的伸长量为

$$\Delta l = \frac{F_1 l}{E_1 A_1} = \frac{Fl}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

**例 1.2** 拉杆受载如图 1.2(a) 所示。已知均布载荷的集度为  $q$ , 试作拉杆的轴力图。

**解:** 以拉杆左端为原点, 建立水平向右的坐标轴  $x$ , 由截面法可得拉杆的轴力方程为

$$F_N(x) = qx \quad (0 \leq x \leq l)$$

由对称性, 可画出拉杆的轴力图如图 1.2(b) 所示。

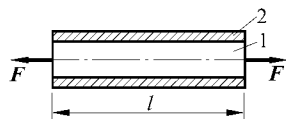
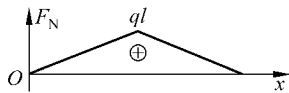


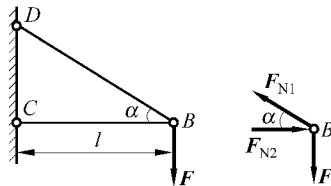
图 1.1



(a)



(b)



(a)

(b)

图 1.2

图 1.3

**例 1.3** 在图 1.3(a) 所示结构中, 杆  $BC$  和杆  $BD$  的材料相同, 且受拉和受压时的许用应力相等, 已知载荷  $F$ , 杆  $BC$  长  $l$ , 许用应力为  $[\sigma]$ 。试求使该结构的用料最省时的  $\alpha$  角。

解: 研究点  $B$  (图 1.3(b)), 设两杆轴力为  $F_{N1}$  和  $F_{N2}$ 。

由节点的平衡方程可得

$$F_{N1} = \frac{F}{\sin \alpha}, \quad F_{N2} = F \cot \alpha$$

若使两杆的应力均达到许用应力值, 则有

$$A_1 = \frac{F_{N1}}{[\sigma]} = \frac{F}{\sin \alpha [\sigma]}, \quad A_2 = \frac{F_{N2}}{[\sigma]} = \frac{F \cot \alpha}{[\sigma]}$$

该结构体积为

$$V = A_1 \frac{l}{\cos \alpha} + A_2 l = \frac{Fl}{\sin \alpha \cos \alpha [\sigma]} + \frac{Fl \cot \alpha}{[\sigma]}$$

若  $V$  为最小, 则有

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0$$

即

$$\frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 0$$

可得

$$\tan \alpha = \sqrt{2}, \quad \alpha = 54.74^\circ$$

当  $\alpha = 54.74^\circ$  时, 结构的用料最省。

**例 1.4** 圆锥形杆长  $l$ , 如图 1.4 所示, 已知两端的面积分别为  $A_0$  和  $A_1$ , 铅垂作用力  $F$ , 假设锥角  $\alpha$  远小于  $20^\circ$ , 试求:

(1) 杆的伸长量;

(2) 杆内贮存的应变能。

解: (1) 求杆的伸长量

建立图示坐标系, 由比例关系可得该杆横截面积为

$$A(x) = \frac{A_1 x^2}{l_1^2} \quad (\text{a})$$

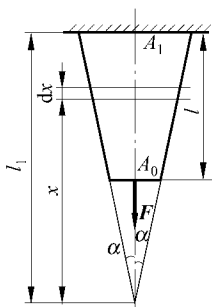


图 1.4

锥形杆总伸长为

$$\Delta l = \int_{l_1-l}^{l_1} \frac{F dx}{EA(x)} = \int_{l_1-l}^{l_1} \frac{Fl_1^2}{EA_1 x^2} dx = \frac{Fl l_1}{(l_1 - l) EA_1} \quad (\text{b})$$

当  $x = l_1 - l$  时,  $A = A_0$ , 由式(a)可得

$$A_0 = A_1 \frac{(l_1 - l)^2}{l_1^2}, \quad \text{即} \quad \frac{l_1}{l_1 - l} = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}}$$

代入式(b)得

$$\Delta l = \frac{FL}{E \sqrt{A_1 A_0}}$$

(2) 求杆内贮存的应变能

认为横截面上的应力仍是均匀分布的, 则  $x$  处横截面上正应力为

$$\sigma(x) = \frac{F}{A(x)} = \frac{Fl_1^2}{A_1 x^2}$$

应变能密度为

$$v_\epsilon(x) = \frac{[\sigma(x)]^2}{2E} = \frac{F^2 l_1^4}{2EA_1^2 x^4}$$

杆内总应变能为

$$V_\epsilon = \int_V v_\epsilon(x) dV = \int_{l_1-l}^{l_1} v_\epsilon(x) A(x) dx = \int_{l_1-l}^{l_1} \frac{F^2 l_1^2}{2EA_1 x^2} dx = \frac{F^2 l}{2E \sqrt{A_0 A_1}}$$

以上结果也可以由“外力功等于应变能”的功能原理得到

$$V_\epsilon = W = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{F^2 l}{2E \sqrt{A_0 A_1}}$$

**例 1.5** 两端固定的等直杆  $AB$ , 如图 1.5 所示。

已知沿轴向均匀分布的载荷集度为  $q$ , 杆长为  $l$ , 拉压刚度为  $EA$ , 试求:

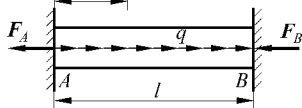


图 1.5

(1) 任一横截面的轴向位移;

(2) 横截面最大的轴向位移及其位置。

**解:** (1) 求杆  $AB$  任一横截面的轴向位移

研究杆  $AB$ , 由平衡条件得

$$F_A + F_B - ql = 0$$

由截面法求得轴力方程为

$$F_N(x) = F_A - qx$$

由“杆的总伸长量为零”的变形几何条件

$$\Delta l = \int_0^l \frac{F_N(x) dx}{EA} = \int_0^l \frac{(F_A - qx) dx}{EA} = \frac{F_A l}{EA} - \frac{ql^2}{2EA} = 0$$

可得

$$F_A = \frac{ql}{2}$$

杆  $AB$  任一横截面的轴向位移为

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{F_A - qx}{EA} dx = \frac{F_A x}{EA} - \frac{qx^2}{2EA} = \frac{qx(l-x)}{2EA}$$

(2) 求横截面最大轴向位移及其位置

由  $\frac{d\delta(x)}{dx} = 0$  得

$$ql - 2qx = 0$$

解得

$$x = \frac{l}{2}$$

即  $x = \frac{l}{2}$  处横截面的轴向位移最大, 其最大轴向位移为

$$\delta_{\max} = \delta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q \frac{l}{2} \left(l - \frac{l}{2}\right)}{2EA} = \frac{ql^2}{8EA}$$

**例 1.6** 支架如图 1.6(a) 所示, 杆 BCD 可视作刚体。已知: 作用力为  $F$ , 杆 1 和杆 2 的材料和截面积均相同, 即有  $E_1 = E_2, A_1 = A_2$ , 两杆的拉压许用应力分别为  $[\sigma_t]$  和  $[\sigma_c]$ , 试求两杆的截面积。

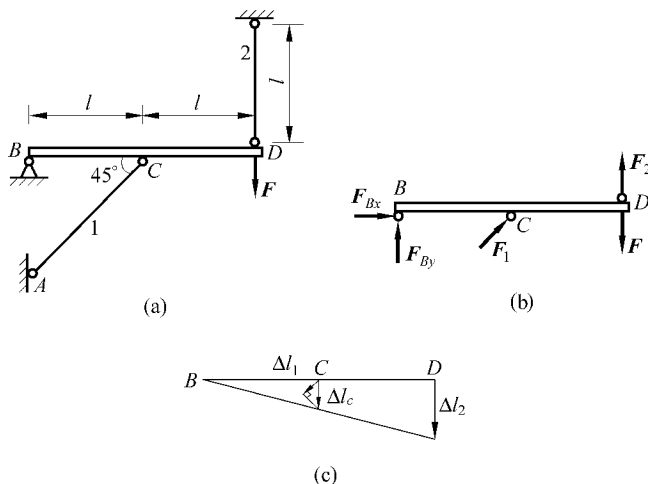


图 1.6

**解:** (1) 静力关系

研究杆 BCD (受力图如图 1.6(b) 所示):

$$\sum M_B = 0, F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot l + F_2 \cdot 2l - F \cdot 2l = 0$$

可得

$$\sqrt{2}F_1 + 4F_2 = 4F \quad (a)$$

2 个未知数 1 个方程, 为一次超静定。

(2) 几何关系

画杆 BCD 的变形图, 如图 1.6(c) 所示。得几何方程为

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_c = 2\sqrt{2}\Delta l_1 \quad (b)$$

## (3) 物理关系

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 \sqrt{2} l}{EA_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{F_2 l}{EA_2}$$

代入式(b), 得

$$\frac{F_2 l}{EA_2} = 2\sqrt{2} \frac{F_1 \sqrt{2} l}{EA_1}$$

解得

$$F_2 = 4F_1 \quad (c)$$

联立求解式(a)和式(c), 得

$$F_1 = \frac{4F}{\sqrt{2} + 16}, \quad F_2 = \frac{16F}{\sqrt{2} + 16}$$

杆1为压杆, 杆2为拉杆, 可建立两杆的强度条件为

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{4F}{(\sqrt{2} + 16)A_1} \leq [\sigma_c], \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{16F}{(\sqrt{2} + 16)A_2} \leq [\sigma_t]$$

由上式解得

$$A_1 \geq \frac{4F}{(\sqrt{2} + 16)[\sigma_c]}, \quad A_2 \geq \frac{16F}{(\sqrt{2} + 16)[\sigma_t]}$$

为保证安全, 两杆的横截面积应为

$$A = \max(A_1, A_2)$$

**例 1.7** 组合杆由两种材料组成, 如图 1.7(a)所示。已知拉力为  $F$ , 两种材料的弹性模量为  $E_1$  和  $E_2$ , 截面积分别为  $A_1$  和  $A_2$ , 截面形心到底边的距离分别为  $y_1$  和  $y_2$ 。若在拉伸变形过程中, 组合杆两端面保持平行移动, 试分别求各种材料所受到的轴力  $F_1$  和  $F_2$ , 应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 以及拉力作用点的位置  $e$ 。

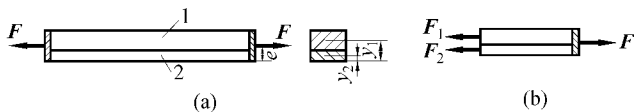


图 1.7

**解:** (1) 静力关系

研究组合杆右段的平衡 (见图 1.7(b)):

$$\sum F_x = 0, \quad F_1 + F_2 = F \quad (a)$$

$$\sum M = 0, \quad F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 = F \cdot e \quad (b)$$

3 个未知数 2 个方程, 为一次超静定。

(2) 几何关系

杆端面平行移动, 则有

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$$

## (3) 物理关系

将物理关系代入几何方程可得

$$\frac{F_1}{E_1 A_1} = \frac{F_2}{E_2 A_2} \quad (c)$$

联立求解式(a)和式(c)得

$$F_1 = \frac{E_1 A_1 F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad F_2 = \frac{E_2 A_2 F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

可得应力表达式为

$$\sigma_1 = \frac{E_1 F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \quad \sigma_2 = \frac{E_2 F}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

由式(b)可解得拉力作用点的位置

$$e = \frac{E_1 A_1 y_1 + E_2 A_2 y_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

**例 1.8** 许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 的钢丝绳沿铅垂方向绷紧在 A、B 两点之间,如图 1.8 所示,绳内预应力为 $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$ 。已知:绳长 $l = 1 \text{ m}$ ,弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ ,截面积 $A = 1 \text{ cm}^2$ ,在 $l_1 = 0.4 \text{ m}$ 处加一个向下的载荷 $F$ 。试求:

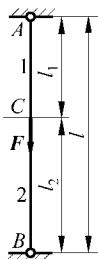


图 1.8

(1) 许用载荷 $[F]$ 以及点 C 的位移 $\Delta_C$ ;

(2) 若要提高许用载荷,施力点 C 应取在何处?  $[F]$ 可以提高到多少?

**解:** (1) 求许用载荷 $[F]$ 以及点 C 的位移 $\Delta_C$

由于钢丝绳内已有预应力,假设:外力 $F$ 所产生的应力与预应力叠加的结果不为压应力,则可将钢丝绳视为弹性杆求解。外力 $F$ 在钢丝绳 AB 段和 BC 段内产生的轴力为

$$F'_1 = \frac{l_2}{l} F, \quad F'_2 = -\frac{l_1}{l} F \quad (a)$$

AB 段的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{F'_1}{A} = \sigma_0 + \frac{l_2 F}{l A} = 100 \times 10^6 \text{ Pa} + \frac{0.6 \text{ m} \times F}{1 \text{ m} \times 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \leq [\sigma] \\ &= 160 \times 10^6 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (b)$$

可解得

$$F \leq 10 \times 10^3 \text{ N} = 10 \text{ kN}$$

由此,可求得 BC 段内应力叠加的结果为

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{F'_2}{A} = \sigma_0 - \frac{l_1 F}{l A} = 100 \text{ MPa} - \frac{0.4 \text{ m} \times 10000 \text{ N}}{1 \text{ m} \times 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 60 \text{ MPa}$$

为拉应力,因而前面的假设成立。可取许用载荷 $[F]=10\text{ kN}$ 。在此外力作用下,点C的位移为

$$\Delta_C = \frac{F'_1 l_1}{EA} = \frac{0.6\text{ m}(10 \times 10^3\text{ N})(0.4\text{ m})}{1\text{ m}(200 \times 10^9\text{ Pa})(1 \times 10^{-4}\text{ m}^2)} = 0.12 \times 10^{-3}\text{ m} \\ = 0.12\text{ mm}(\downarrow)$$

(2) 确定外载荷 $F$ 的作用点及许用载荷的最大值 $[F]_{\max}$

由式(b)可见,要提高许用载荷,应减小 $l_2$ ,同时,由式(a)可知, $l_2$ 变小会使BC段内的压应力增加,与预拉应力叠加后有可能产生压应力。因此,应使BC段的轴力不低于零以及AB段的应力恰好达到许用值这两个条件同时满足,即

$$F_{BC} = \sigma_0 A - \frac{l_1}{l} F = 0 \\ \sigma_{AC} = \sigma_0 + \frac{l_2}{l} \frac{F}{A} = \sigma_0 + \frac{l-l_1}{l} \frac{F}{A} = [\sigma]$$

联立求解以上两式,可得

$$[F]_{\max} = F = A[\sigma] = (1 \times 10^{-4}\text{ m}^2)(160 \times 10^6\text{ Pa}) = 16\text{ kN} \\ l_1 = \frac{\sigma_0 l}{[\sigma]} = \frac{(100\text{ MPa})(1\text{ m})}{160\text{ MPa}} = 0.625\text{ m}$$

即在距钢丝绳上端0.625 m处可施加最大的许用载荷为16 kN。

**例 1.9** 桁架由杆AB和杆BC组成,如图1.9(a)所示。已知两杆的横截面积均为 $A=20\text{ mm}^2$ ,长度均为 $l=300\text{ mm}$ , $\theta=30^\circ$ , $F=5\text{ kN}$ 。两杆材料相同,应力-应变曲线如图1.9(b)所示,弹性模量为折线变化。试求点B的铅垂位移 $\Delta_B$ 。

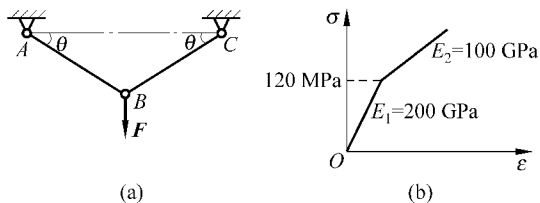


图 1.9

**解:** 从桁架的对称性可知两杆的轴力相等,设为 $F_N$ ,由节点B的平衡方程可得

$$\sum F_y = 0, \quad 2F_N \sin 30^\circ - F = 0 \\ F_N = F = 5\text{ kN}$$

当轴力 $F_{N0}=(120\text{ MPa})(20\text{ mm}^2)=2.4\text{ kN}$ 时,材料的弹性模量将会改变,可将加载过程分为两段来分析。

第一段:各杆轴力为 $F_N=0\sim 2.4\text{ kN}$ ,各杆伸长为

$$\Delta l_1 = \frac{F_N l}{E_1 A} = \frac{(2.4 \times 10^3\text{ N})(300\text{ mm})}{(200 \times 10^9\text{ N/m}^2)(20\text{ mm}^2)} = 0.18\text{ mm}$$

点 B 向下的铅垂位移为

$$\Delta_{B1} = \frac{\Delta l_1}{\sin 30^\circ} = 2(0.18 \text{ mm}) = 0.36 \text{ mm}$$

第二段: 各杆轴力为  $F_N = 2.4 \sim 5.0 \text{ kN}$ , 各杆伸长为

$$\Delta l_2 = \frac{F_{N2} l}{E_2 A} = \frac{[(5 - 2.4) \times 10^3 \text{ N}](300 \text{ mm})}{(100 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(20 \text{ mm}^2)} = 0.39 \text{ mm}$$

点 B 向下的铅垂位移为

$$\Delta_{B2} = \frac{\Delta l_2}{\sin 30^\circ} = 2(0.39 \text{ mm}) = 0.78 \text{ mm}$$

点 B 向下的总铅垂位移为

$$\Delta_B = \Delta_{B1} + \Delta_{B2} = 1.14 \text{ mm}$$

**例 1.10** 刚性平台由截面积相同(即  $A_1 = A_2 = A_3 = A$ ), 但材料不同的 3 根短柱支承, 其材料的弹性模量分别为  $E_1, E_2, E_3$ 。若要使平台在力  $F$  作用时水平下降, 试求力  $F$  的作用点位置坐标  $x_F$  和  $y_F$ 。

**解:** (1) 静力关系

设 3 根短柱对平台的支撑力分别为  $F_1, F_2$  和  $F_3$ , 如图 1.10 所示, 平台受到空间平行力系的作用, 有 3 个独立的静力平衡方程, 即

$$\sum F_z = 0, \quad F_1 + F_2 + F_3 = F$$

$$\sum M_x = 0, \quad F \cdot y_F - F_3 \cdot a = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad F \cdot x_F + F_1 \cdot a - F_2 \cdot a = 0$$

上述 3 个方程中有  $F_1, F_2, F_3, x_F$  和  $y_F$  共 5 个未知数, 为二次静不定问题。需建立两个几何方程。

(2) 几何关系

欲使平台水平下降, 则要求 3 根柱的压缩变形量相同, 由此可得两个几何方程为

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3$$

(3) 物理关系

$$\Delta l_i = \frac{F_i l}{E_i A} \quad (i = 1, 2, 3)$$

代入几何方程可得 3 根柱压力的补充方程为

$$\frac{F_1 l}{E_1 A} = \frac{F_2 l}{E_2 A} = \frac{F_3 l}{E_3 A}$$

将上述补充方程与静力方程联立求解, 可得 3 根柱轴力和外力作用点坐标为

$$F_i = \frac{E_i}{E_1 + E_2 + E_3} F \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{a})$$

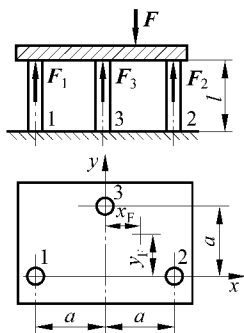


图 1.10

$$x_F = \frac{a}{F}(F_2 - F_1) = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2 + E_3}a \quad (b)$$

$$y_F = \frac{a}{F}F_3 = \frac{E_3}{E_1 + E_2 + E_3}a \quad (c)$$

**讨论** 由式(a)可以看出各杆的轴力  $F_i$  与该杆材料的弹性模量  $E_i$  成正比。实际上,静定结构各构件的内力只与结构的形状及其加载方式有关,而静不定结构各构件的内力还与其相对刚度有关,即静不定结构各构件的内力按其刚度分配。这是静不定结构的重要特性之一。

**例 1.11** 图 1.11(a)所示结构的 3 根杆用同一材料制成,弹性模量为  $E$ ,已知:杆 3 长为  $l$ ,杆 1 和杆 3 截面积  $A_1 = A_3 = A$ ,杆 2 的截面积  $A_2 = 2A$ ,载荷  $F$  作用在点  $A$ ,其作用线与铅垂线的夹角为  $\theta$ 。试求各杆的内力。

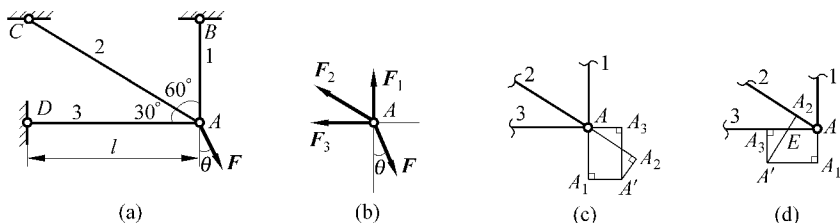


图 1.11

**解:** (1) 静力关系

假设节点  $A$  在载荷  $F$  的作用下,将向右下方移动,3 根杆均将伸长,其内力均为拉力。研究节点  $A$ ,受力图如图 1.11(b)所示,静力平衡方程为

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 \cos 60^\circ - F \cos \theta &= 0 \\ -F_3 - F_2 \cos 30^\circ + F \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

2 个方程有 3 个未知数,为一次静不定问题。

(2) 几何关系

在载荷  $F$  的作用下,节点  $A$  向右下方移动至点  $A'$ ,过点  $A$  作 3 根杆的垂线,垂足分别为  $A_1, A_2, A_3$ ,节点  $A$  的变形图如图 1.11(c)所示。注意到,  $AA_1 = \Delta l_1$ ,  $AA_2 = \Delta l_2$ ,  $AA_3 = \Delta l_3$ ,由变形图可得几何方程为

$$\Delta l_3 \cos 30^\circ + \Delta l_1 \sin 30^\circ = \Delta l_2$$

(3) 物理关系

物理方程为

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{F_1 l_1}{EA_1} = \frac{F_1 l}{EA} \tan 30^\circ \\ \Delta l_2 &= \frac{F_2 l_2}{EA_2} = \frac{F_2 l}{2EA \cos 30^\circ} \end{aligned}$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_3 l_3}{EA_3} = \frac{F_3 l}{EA}$$

将物理方程代入几何方程,可得力的补充方程,与静力方程联立求解得到

$$F_1 = \frac{(3\sqrt{3}+4)\cos\theta - 3\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}F$$

$$F_2 = \frac{2\cos\theta + 6\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}F$$

$$F_3 = \frac{-\sqrt{3}\cos\theta + 5\sin\theta}{3\sqrt{3}+5}F$$

由上述结果可见,当  $0^\circ \leq \theta < 71.9^\circ$  时,有  $F_1 > 0$ ,即  $F_1$  为拉力;当  $\theta > 71.9^\circ$  时, $F_1$  变为压力。当  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  时, $F_2$  始终为拉力。当  $0^\circ \leq \theta < 19.1^\circ$  时,有  $F_3 < 0$ ,即  $F_3$  为压力;当  $\theta > 19.1^\circ$  时, $F_3$  变为拉力;当  $\theta = 19.1^\circ$  时, $F_3$  等于零,即杆 3 的长度不变,点 A 只作铅垂向下的移动。

**讨论** 在上述解题过程中,由于夹角  $\theta$  可变化,因而不能确切判断三杆的真实方向。因此可假设点 A 沿右下方移动,并且各杆变形必须与内力协调一致,即:轴向拉力使杆伸长,轴向压力使杆缩短,按照以切代弧的规律画节点 A 的变形图,由变形确定各杆内力是拉还是压,依此建立方程,方可求出正确结果。但需注意,位移方向不能假设成特殊方向,如铅垂或水平方向,这相当于又额外增加了约束,与实际情况不符。

实际上,可以假设点 A 发生任意方向的位移,且该位移不一定是真实位移。但是,所假设的位移必须满足约束条件;内力与变形的假设必须协调一致;位移方向不能假设成特殊方向。根据求出的内力和变形的符号以及原先所作的假设,可确定其真实方向。例如,

可假设点 A 向左下方移动,其变形图如图 11.1(d)所示,相应的变形几何方程为

$$\Delta l_1 \tan 30^\circ + \Delta l_2 / \cos 30^\circ = \Delta l_3$$

由变形图可见,杆 1 伸长,杆 2 和杆 3 缩短,因此,为使内力与变形的假设协调一致,应假设  $F_1$  为拉力, $F_2$  和  $F_3$  为压力,画点 A 的受力图,可得相应的静力方程为

$$F_1 - F_2 \cos 60^\circ - F \cos \theta = 0$$

$$F_3 + F_2 \cos 30^\circ + F \sin \theta = 0$$

物理方程与例 1.11 相同。事实上,上述几何方程和静力方程与例 1.11 的对应方程是完全等价的,由此也将求出同样的结果。其求解过程,请读者自行完成。

**例 1.12** 对称桁架如图 1.12(a)所示,已知:尺寸  $l$ ,桁架各杆的拉压刚度相同,均为  $EA$ 。试求在铅垂载荷  $F$  的作用下,点 A 的位移。

**解:** 假设自结构中拆除杆 AB,其对节点 A 和 B 的作用由内力  $F_5$  代替,得到静定基如图 1.12(b)所示。由节点 A 和 B 的平衡,可得

$$F_1 = F_2 = \frac{F - F_5}{\sqrt{3}}$$

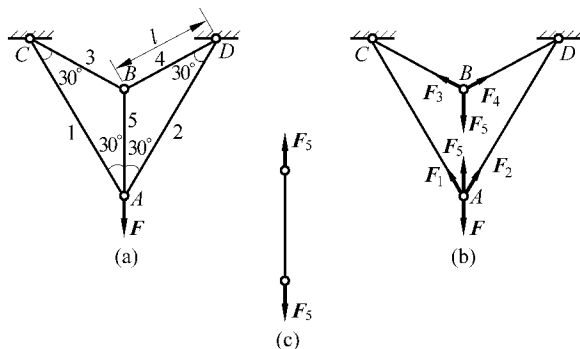


图 1.12

$$F_3 = F_4 = F_5$$

4 个方程,有 5 个未知数,为一次静不定问题。

由对称性可知,节点 A 和 B 的位移均沿铅垂方向,且节点 A 的位移减去节点 B 的位移应等于杆 AB 的伸长量,可得几何方程为

$$\Delta_A - \Delta_B = \Delta l_5$$

研究节点 A 和 B 的位移与杆 1 和杆 3 伸长量之间的关系可得

$$\Delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ} = \frac{F_1 l_1}{EA \cos 30^\circ} = \frac{2(F - F_5)l}{\sqrt{3}EA} \quad (a)$$

$$\Delta_B = \frac{\Delta l_3}{\cos 60^\circ} = 2\Delta l_3 = 2 \frac{F_3 l}{EA} = 2 \frac{F_5 l}{EA}$$

且有

$$\Delta l_5 = \frac{F_5 l}{EA}$$

将上述 3 个方程代入几何方程,可解出杆 AB 的内力  $F_5$  为

$$F_5 = \frac{2F}{2 + 3\sqrt{3}}$$

将  $F_5$  的结果代入式(a),可求出点 A 铅垂向下的位移为

$$\Delta_A = \frac{6Fl}{(2 + 3\sqrt{3})EA}$$

**例 1.13** 图 1.13(a)所示的桁架,已知:载荷  $F$ ,尺寸  $l$ ,夹角  $\theta$ ,各杆均用理想塑性材料制成,其应力-应变曲线如图 1.13(b)所示。当应力不超过材料的屈服极限  $\sigma_s$  时,应力-应变曲线是斜直线 OS;当应力超过材料的屈服极限  $\sigma_s$  时,材料产生塑性屈服,其应力-应变曲线为水平线 SB,即忽略材料的强化效应。若各杆的横截面积均为  $A$ ,材料的弹性模量为  $E$ ,试求:

(1) 结构开始出现屈服时的载荷  $F_s$ ;

(2) 结构开始出现屈服时, 点 A 的铅垂位移  $\Delta_A$ ;

(3) 结构的极限载荷  $F_P$ 。

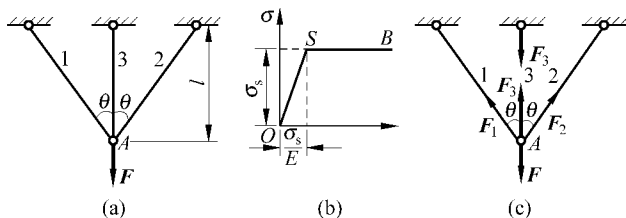


图 1.13

**解:** 研究节点 A 的平衡, 其受力图如图 1.13(c) 所示, 由点 A 的静力平衡方程可求得

$$F_1 = F_2 = \frac{F - F_3}{2 \cos \theta}$$

为一次静不定结构。

画点 A 的变形图, 可得几何方程为

$$\Delta l_3 = \Delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos \theta}$$

在线弹性范围内, 材料的物理方程为

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{EA} = \frac{(F - F_3) l}{2EA \cos^2 \theta}, \quad \Delta l_3 = \frac{F_3 l}{EA}$$

将物理方程代入几何方程, 可求得

$$F_3 = \frac{F}{1 + 2 \cos^3 \theta}$$

将上述结果代入静力方程, 可得

$$F_1 = F_2 = \frac{\cos^2 \theta}{1 + 2 \cos^3 \theta} F$$

(1) 求结构开始出现屈服时的载荷  $F_s$ 。

由三杆内力的计算结果可见,  $F_3 > F_1 = F_2$ , 即杆 3 的内力最大, 首先产生屈服。

由  $\sigma_3 = \frac{F_3}{A} = \sigma_s$ , 可求得结构开始出现屈服时的载荷为

$$F_s = (1 + 2 \cos^3 \theta) A \sigma_s$$

(2) 求结构开始出现屈服时, 点 A 的铅垂位移  $\Delta_A$

当  $F = F_s$  时, 杆 3 刚开始屈服, 而杆 1 和杆 2 仍处于弹性状态, 因此点 A 的铅垂位移  $\Delta_A$  由杆 1 和杆 2 的变形来控制, 可求得

$$\Delta_A = \frac{\Delta l_1}{\cos \theta} = \frac{F_1 l}{EA \cos^2 \theta} = \frac{F_s l}{EA (1 + 2 \cos^3 \theta)} = \frac{(1 + 2 \cos^3 \theta) A \sigma_s l}{EA (1 + 2 \cos^3 \theta)} = \frac{\sigma_s l}{E}$$

事实上,杆3刚开始屈服时,其应变量为 $\frac{\sigma_s}{E}$ (对应图1.13(b)中的点S的横坐标),因此,杆3的端点A向下的位移量为 $\frac{\sigma_s}{E}l$ ,即上式的计算结果。

### (3) 求结构的极限载荷 $F_P$

当杆1、杆2和杆3都屈服时,此时的载荷 $F$ 称为结构的极限载荷 $F_P$ 。这时各杆的轴力均为 $A\sigma_s$ ,原来静不定的问题变为静定的了,由节点A的平衡可得

$$F_P = A\sigma_s + 2A\sigma_s \cos \theta = (1 + 2\cos \theta)A\sigma_s$$

**例 1.14** 图1.14(a)所示的等截面直杆AC,抗拉刚度为 $EA$ ,受到铅垂载荷 $F$ 的作用。已知尺寸 $l$ ,且加载前直杆下端与基础之间的间隙为 $\delta$ 。现欲求储存于杆内的应变能,若用公式 $V_\epsilon = \frac{1}{2}F\delta_B$ (式中 $\delta_B$ 为力作用点B的位移)来计算,是否正确?

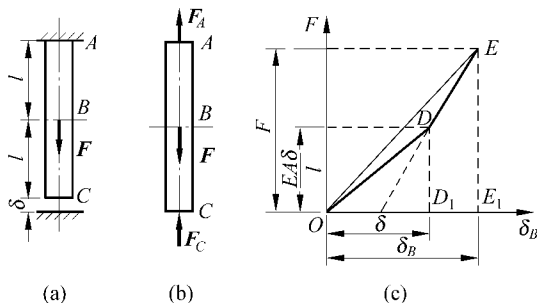


图 1.14

**解:** 当作用力 $F$ 的大小不同时,直杆下端与基础有两种状态:(1)没有接触或刚接触;(2)接触后抵紧。因此,需分别考虑。

#### (1) 杆下端与基础不接触

此时有 $F \leq \frac{EA}{l}\delta$ ,AB段的应力为 $\sigma_{AB} = \frac{F}{A}$ ,而BC段的应力为零。储存于杆内的应变能为

$$V_\epsilon = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \frac{\sigma_{AB}^2}{2E} Al = \frac{F^2 l}{2EA} = \frac{1}{2} F \cdot \frac{Fl}{EA} = \frac{1}{2} F\delta_B$$

因此当 $F \leq \frac{EA}{l}\delta$ 时,可以用公式 $V_\epsilon = \frac{1}{2}F\delta_B$ 计算应变能。

#### (2) 杆下端与基础抵紧

此时有 $F > \frac{EA}{l}\delta$ 。设直杆A端的约束力为 $F_A$ ,C端的约束力为 $F_C$ ,其受力图如

图1.14(b)所示,静力平衡方程为

$$F_A + F_C = F$$

为一次静不定问题。显然,杆 AB 段的伸长量减去 BC 段的缩短量应等于间隙  $\delta$ ,可得变形几何方程为

$$\Delta l_{AB} - \Delta l_{BC} = \delta$$

将物理关系代入上式,可得力的补充方程为

$$\frac{F_A l}{EA} - \frac{F_C l}{EA} = \delta$$

与静力方程联立求解,得

$$F_A = \frac{1}{2} \left( F + \frac{EA}{l} \delta \right)$$

$$F_C = \frac{1}{2} \left( F - \frac{EA}{l} \delta \right)$$

等截面直杆 AC 的总应变能等于 AB 段和 BC 段的应变能之和

$$\begin{aligned} V_\epsilon &= \frac{F_A^2 l}{2EA} + \frac{F_C^2 l}{2EA} = \frac{l}{2EA} (F_A^2 + F_C^2) = \frac{l}{2EA} \left[ \frac{1}{4} \left( F + \frac{EA}{l} \delta \right)^2 + \frac{1}{4} \left( F - \frac{EA}{l} \delta \right)^2 \right] \\ &= \frac{F^2 l}{4EA} + \frac{EA}{4l} \delta^2 \end{aligned}$$

点 B 的位移  $\delta_B$  等于 AB 段的伸长,所以有

$$\delta_B = \frac{F_A l}{EA} = \frac{l}{2EA} \left( F + \frac{EA}{l} \delta \right) = \frac{Fl}{2EA} + \frac{\delta}{2}$$

用题给公式求应变能,可得

$$\frac{1}{2} F \delta_B = \frac{F^2 l}{4EA} + \frac{F \delta}{4} > \frac{F^2 l}{4EA} + \frac{EA}{4l} \delta^2 = V_\epsilon$$

可见,  $\frac{1}{2} F \delta_B$  不等于杆件总应变能。因此,在第二种情况下,不能用  $\frac{1}{2} F \delta_B$  计算应变能。

**讨论** 为解释上题中结论的几何意义,可画出  $F \sim \delta_B$  曲线,如图 1.14(c)所示。

当  $F \leq \frac{EA}{l} \delta$  时,  $F \sim \delta_B$  曲线为直线 OD; 当  $F > \frac{EA}{l} \delta$  时,  $F \sim \delta_B$  曲线为直线 DE。

当  $F > \frac{EA}{l} \delta$  时,可用折线 ODE 下方的面积来计算杆件的总应变能为

$$\begin{aligned} V_\epsilon &= \frac{1}{2} \cdot \frac{EA \delta}{l} \cdot \delta + \frac{1}{2} (\delta_B - \delta) \left( F + \frac{EA \delta}{l} \right) = \frac{EA \delta^2}{2l} + \frac{1}{2} \left( \frac{Fl}{2EA} - \frac{\delta}{2} \right) \left( F + \frac{EA \delta}{l} \right) \\ &= \frac{F^2 l}{4EA} + \frac{EA}{4l} \delta^2 \end{aligned}$$

与上题中求得的总应变能结果完全相同。由图 1.14(c)可见,若用公式  $\frac{1}{2} F \delta_B$  计算杆件总应变能,其结果就等于直线 OE 下方的面积,显然,该面积大于折线 ODE 下方的面积。因此,在题设条件下,用公式  $\frac{1}{2} F \delta_B$  求出的杆件总应变能大于杆件实际的总应变能。

### 1.3 自测题与答案

**题 1.1** 桁架受力和选材有如图 1.15 所示 4 种方案,从材料力学的观点来看,哪种方案较为合理?

答: B

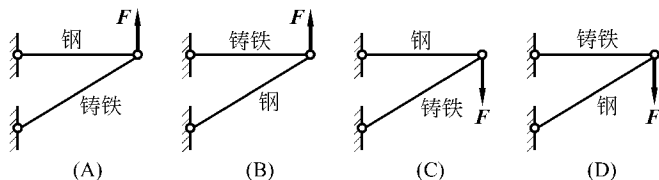


图 1.15

**题 1.2** 低碳钢拉伸时的应力-应变曲线如图 1.16 所示,试在图中标出点 D 的弹性应变  $\epsilon_e$ ,塑性应变  $\epsilon_p$  以及材料的延伸率  $\delta$ 。

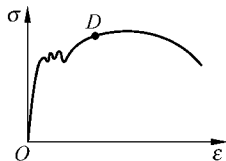


图 1.16

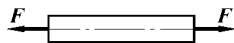


图 1.17

**题 1.3** 如图 1.17 所示钢杆在轴向拉力作用下,横截面上正应力超过了材料的屈服极限,此时轴向应变为  $\epsilon_1$ 。接着开始卸载,轴向拉力全部卸掉后,轴向残余应变为  $\epsilon_2$ 。该钢杆材料的弹性模量  $E =$  \_\_\_\_\_。

答:  $\frac{\sigma}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$

**题 1.4** 等截面直杆的轴力图如图 1.18 所示,试绘出该杆的载荷图。

答: 略。

**题 1.5** 如图 1.19 所示支架两杆的横截面积均为  $A$ ,材料的弹性模量均为  $E$ ,试验测得杆 1 和杆 2 的轴向线应变分别为  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_2$ ,试求载荷  $F$  及其方位角  $\theta$ 。

答:  $F = EA \sqrt{\epsilon_1^2 + \sqrt{2}\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2}$ ,  $\tan \theta = \frac{\epsilon_1 + \sqrt{2}\epsilon_2}{\epsilon_1}$

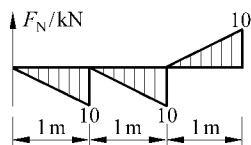


图 1.18

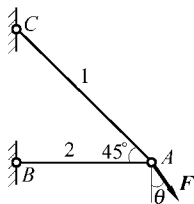


图 1.19

**题 1.6** 如图 1.20 所示等截面直杆  $AB$  的拉压刚度为  $EA$ ,

(1) 试求在力  $F$  和力  $X$  的作用下, 杆的弹性变形能;

(2) 若  $X$  为变量, 则其为何值时, 杆的变形能最小? 试求出此时杆  $AB$  的总伸长量。

答: (1)  $V_e = \frac{X^2 l}{2EA} + \frac{(F-X)^2 l}{EA}$

(2) 当  $X = \frac{2}{3}F$  时, 应变能最小, 且有  $\Delta l_{AB} = 0$

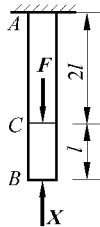


图 1.20

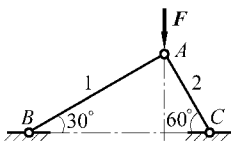


图 1.21

**题 1.7** 如图 1.21 所示支架两杆的横截面积  $A_1 = 800 \text{ mm}^2$ ,  $A_2 = 600 \text{ mm}^2$ , 材料的许用应力  $[\sigma_1] = 120 \text{ MPa}$ ,  $[\sigma_2] = 100 \text{ MPa}$ , 若不考虑稳定性问题, 试确定结构的许用载荷  $[F]$ 。

答:  $[F] = 69.28 \text{ kN}$

**题 1.8** 如图 1.22 所示结构,  $AC$  为刚性梁,  $BD$  为斜撑杆, 载荷  $P$  可沿梁水平移动, 为使斜杆的重量最小, 试求斜撑杆与梁之间的夹角  $\theta$ 。

答:  $\theta = 45^\circ$

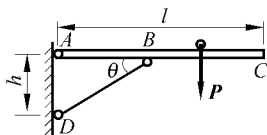


图 1.22

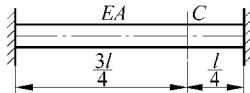


图 1.23

**题 1.9** 如图 1.23 所示两端固定的均质杆件均匀升温  $\Delta T$  时, 若材料的线膨胀系数为  $\alpha$ , 试求截面  $C$  的水平位移及杆端面的反力。

答:  $F = \alpha \Delta T E A, \Delta_{CH} = 0$

**题 1.10** 如图 1.24 所示结构, 载荷  $P$  可沿梁  $AB$  移动。已知杆 1, 2 与梁的许用应力均为  $[\sigma]$ , 杆 1 和杆 2 的横截面面积分别为  $A$  和  $2A$ , 梁的弯曲截面系数为  $W = lA/3$ , 试确定该结构的许用载荷  $[P]$ 。

答:  $[P] = [\sigma]A$

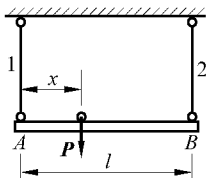


图 1.24

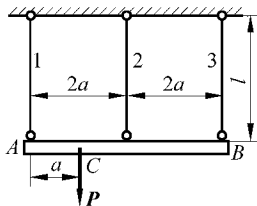


图 1.25

**题 1.11** 如图 1.25 所示, 刚性梁  $AB$ , 由 3 根材料相同、截面积相同的拉杆悬挂, 已知:  $P, EA, a$ 。试求力作用下三杆的轴力和变形。

答:  $F_1 = \frac{7}{12}P, F_2 = \frac{P}{3}, F_3 = \frac{P}{12}; \Delta l_1 = \frac{7Pl}{12EA}, \Delta l_2 = \frac{Pl}{3EA}, \Delta l_3 = \frac{Pl}{12EA}$

**题 1.12** 如图 1.26 所示结构中,  $AB$  为刚性杆, 已知杆 1 和杆 2 的横截面积分别为  $A_1 = 400 \text{ mm}^2, A_2 = 200 \text{ mm}^2$ , 其许用应力  $[\sigma] = 170 \text{ MPa}$ , 试校核杆 1 和杆 2 的强度。

答:  $\sigma_1 = 96.5 \text{ MPa} < [\sigma], \sigma_2 = 160.5 \text{ MPa} < [\sigma]$

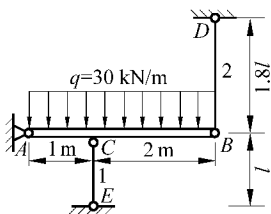


图 1.26

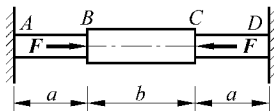


图 1.27

**题 1.13** 如图 1.27 所示变截面刚性杆  $ABCD$  两端固定, 中间部分  $BC$  段截面面积为  $A_b$ , 两端部分  $AB, CD$  横截面面积为  $A_a$ 。B, C 处作用一对相对的轴向力  $F$ , 试求杆件的轴力及横截面上的应力。

答:  $F_{AB} = F_{CD} = \frac{bA_a F}{2aA_b + bA_a}, F_{BC} = \frac{2aA_b F}{2aA_b + bA_a}$

$\sigma_{AB} = \sigma_{CD} = \frac{bF}{2aA_b + bA_a}, \sigma_{BC} = \frac{2aF}{2aA_b + bA_a}$