第 1 讲　预备知识与序列极限

知识综述与应试导引

1.1　预 备 知 识

数学的学习与数学问题的处理，要求我们必须具备一定的预备知识，包括数学符号的规范化使用，常用基本不等式的类型，函数的初等性质与初等函数的基本性态（定义域与值域，曲线的走向与关键点的坐标值，以及 $x\to\pm\infty$时的极限状态等），命题表述及其逻辑属性等. 概括地说，就是要培养与训练自己具备一定的数学素质. 这种素质，无论对掌握数学的知识系统，还是对处理一个具体题目，或是对应试能力的全面提高，都具有潜移默化的影响. 比如，数学符号的规范化使用与命题（或数学定义）的等价描述，将有助于思维的敏捷清晰及卷面表达的规范整齐（这将给阅卷人良好的第一印象）. 再比如，基本不等式的灵活运用可诱发解题的重要思路，而对函数初等性质与初等函数基本性态的熟悉会使读者对大多数题目找到一个正确的切入点，这一切入点若有错误（往往由对初等函数的基本性态理解错误或失误而导致这类切入点的错误），则会进一步导致一个题目在解答上的全局性错误，这类错误引起的损失远远超过一个局部计算错误带来的损失. 因此，对本节列出的预备知识应给予足够的重视.

1. 基本不等式

（1）绝对值不等式：对任意实数 x，有 $|x|\geqslant 0$，且

$$0\leqslant |x|+x\leqslant 2|x|. \tag{1.1}$$

（2）三角不等式：对任意实数 x 与 y 均有

$$0\leqslant |x+y|\leqslant |x|+|y|, \tag{1.2}$$

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|. \tag{1.3}$$

（3）平均值不等式：对任意实数 x,y 均有不等式

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant xy,$$

特别当 $x>0,y>0$ 时有

$$\frac{1}{2}(x+y)\geqslant \sqrt{xy}. \tag{1.4}$$

更一般地，若 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)^{1/n}. \tag{1.5}$$

（4）对 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有不等式

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x. \tag{1.6}$$

(5) 若 $m>n>0, k>0$,则有

$$\frac{n}{m}<\frac{n+k}{m+k}. \tag{1.7}$$

2. 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$(实数集),称点集

$$N(x_0,\delta)=\left\{x \,\middle|\, |x-x_0|<\delta\right\}$$

为 x_0 的(一维)δ 邻域,其中 $\delta>0$. 而称点集

$$N^*(x_0,\delta)=\left\{x \,\middle|\, 0<|x-x_0|<\delta\right\}$$

为 x_0 的去心 δ 邻域.

对多维情形,设 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$,其邻域与去心邻域分别定义为

$$N(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\right\}, \qquad N^*(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, 0<\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\right\},$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2\right]^{1/2}$ 称为两点 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的距离,x_i 与 x_{i0} 分别为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 的第 i 个($i=1,2,\cdots,n$)分量.

3. 两条重要公理与命题的逻辑类型

对实数点集,有一系列公理. 在学习微积分或准备硕士研究生入学考试的复习中,有两条公理应予以注意,在一些场合它非常有用.

公理 1(比较公理) 对于任意实数 x 与 y 的比较关系,在 $x>y, x<y, x=y$ 三者中有且仅有一款成立.

公理 2 无穷有界实数点集 E 必有最小的上界与最大的下界.

所谓实数点集 E 有界是指 E 既有上界,又有下界,比如,对任意 $x\in E$,若 $\exists M\in\mathbf{R}$,使 $x\leqslant M$,则称 E 有上界,同时称 M 为 E 的上界. 类似可给出下界的描述.

公理 1 常常成为处理不等式或等式证明的理论根据. 作为逻辑思维的练习,读者可考虑下述命题的正确性:

(1) 对于数学常量 A(可以是一个表达式),若对任意的正数 ε 均有 $|A|<\varepsilon$,则必有 $A=0$.

(2) 对于数学常量 A(可以是一个表达式),$|A|=0$ 的充分必要条件(可以说是二者互为等价命题)是 $A=0$.

关于命题的逻辑类型有以下四种:

(1) 若 A,则 B(称 A 为 B 的充分条件,或 B 为 A 的必要条件).

(2) 若 B,则 A((1)的逆命题).

(3) 若 A 非,则 B 非((1)的否命题).

(4) 若 B 非,则 A 非((1)的逆否命题).

其中,(1)称为原命题,原命题总是与其逆否命题同时为真,在学习数学中的命题时,应从命题的叙述中立即判断出该命题的逻辑类型:是充分的,还是必要的?或是充分必要的

(等价条件)？另外，任何一款数学定义均构成充分必要条件，因此在应用定义时，可双向应用.

4. 函数及其初等性质

函数 $y=f(x)$(设为单值函数)的常用表达记号为 $f: X\to Y\subset\mathbf{R}$，其中 $X\subset\mathbf{R}$.

复合函数是指，对 $X,Y,U\subset\mathbf{R}$，满足

$$f: U\to Y，即\ y=f(u)，$$
$$g: X\to U，即\ u=g(x).$$

且 $u=g(x)$的值域 U 为 $y=f(u)$定义域 U^* 的子集(非空子集)，即 $U\subseteq U^*$，在特定情况下有 $U=U^*$.

反函数：$y=f(x)$的反函数常记为 $x=f^{-1}(y)$或 $y=f^{-1}(x)=g(x)$，前者变量记号未换，而后者则换了变量记号，即 $y=f(x)$的反函数为 $g(x)$，此时有 $f(g(x))=x$，或$g(f(x))=x$.

另外，互为反函数的一对函数，在换了记号的前提下，它们的两条曲线有对称轴 $y=x$，并且它们的定义域与值域具有对偶性，即 $y=f(x)$的定义域 X 为其反函数 $y=g(x)$的值域，反之亦然.

以下是函数的初等性质.

(1) 单调性

对任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上为单调增函数(非严格). 若取消不等式中的等号，该函数为严格单调. 若所论不等式反号，则称之为单调减函数.

判断方法包括初等方法(减法或除法，当用除法判断增减性时，前提是 $y=f(x)$恒取定号，即恒大于零或恒小于零)与解析方法(利用导数的正负号判断增减性，这是由拉格朗日中值定理得到的方法).

(2) 周期性

对任意实数 $x\in X$，若 $\exists\, T_1>0$ 使得 $f(x+T_1)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$在 X 上为周期函数. 一般讲，最小周期 $T=\min\left\{T_i \,\middle|\, i=1,2,\cdots\right\}$称为函数的周期.

周期性是函数的一种特定性质，在积分运算中有特殊的作用，并且，以周期函数 $u=u(x)$为中间变量的连续函数 $y=f(u)=f(u(x))$也为周期函数，例如 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$的周期为 2π.

(3) 奇偶性与对称性

$\forall\, x\in(-a,a)$ $(a>0)$或$(-\infty,+\infty)$，若满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为偶函数；而当满足 $f(-x)=-f(x)$时，则称 $y=f(x)$为奇函数.

对两个具有奇偶性的函数之积，其奇偶性有确定的结论：以偶函数 $u=u(x)$为中间变量的连续复合函数 $y=f(u(x))$仍为偶函数；偶函数没有反函数(在对称区间上)；对连续奇函数 $y=f(x)$，必有 $f(0)=0$；并且，以奇函数 $u=u(x)$为中间变量的复合函数 $y=f(u(x))$仍为奇函数.

一元函数的奇偶性在对称区间$[-a,a]$上的积分具有特定结果，并且，这种性质在多元函数的积分中也有重要的应用，这便是对称区域上多元函数的对称性. 例如，在单位圆围成的区域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leqslant 1\right\}$上，函数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{xy}}$在子区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,$

$y\geqslant 0\}$与子区域 $D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\leqslant 0,y\leqslant 0\}$上具有对应相等的取值. 在子区域 $D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\leqslant 0\}$与子区域 $D_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\leqslant 0,y\geqslant 0\}$上具有对应相等的函数值. 由此可判定二重积分

$$\iint_D \frac{1}{1+\mathrm{e}^{xy}}\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{xy}}\mathrm{d}\sigma + 2\iint_{D_4} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{xy}}\mathrm{d}\sigma.$$

以上对称性在二重积分、三重积分、曲线、曲面积分中均可得到重要应用.

更加广义的对称性有如下结果：

若 $y=f(x)$的图形有对称轴 $x=a$,则对任意实数必有

$$f(a-x)=f(a+x),\quad f(t)=f(2a-t),\quad t=a-x.$$

若 $y=f(x)$的图形有对称中心$(a,0)$,则对任意实数必有

$$f(a-x)=-f(a+x),\quad f(t)=-f(2a-t),\quad t=a-x.$$

对以上两种情形,分别令 $\varphi(x)=f(a-x)$,则 $\varphi(x)$分别具有奇偶性(前者 $\varphi(x)$为偶函数,后者 $\varphi(x)$为奇函数). 这类性质在分析与计算积分问题时也有重要用途.

(4) 有界性

常用的函数有界的描述有以下三种.

① 在区间上有界：若 $\forall x\in[a,b]$(或(a,b)),均有 $M>0$,使 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在$[a,b]$上有界.

② 在 x_0 附近有界(或 $x\to x_0$ 时有界)：若存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0,\delta)$及常数 $M>0$,使对任意 $x\in N(x_0,\delta)$满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在 x_0 附近有界.

③ $x\to\infty$时有界：若存在 $x_1>0$ 及常数 $M>0$,使当 $|x|>x_1$ 时恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在 $x\to\infty$时有界(注：$x\to\infty$包括 $x\to+\infty$与 $x\to-\infty$).

掌握有界性的描述方法是重要的基础训练.

1.2 序列极限

极限的概念与求极限的方法是分析与处理微积分的方法与工具,是全局性的基础.

本节内容的重点是对极限定义与概念的理解,极限的性质及运算规则的应用.

1. 定义与等价性描述(有限极限,无穷小量,无穷大量)

考虑序列$\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$,若 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N$ 及常数 A,使当 $n>N$ 时,恒有 $|a_n-A|<\varepsilon$,则称序列$\{a_n\}$以 A 为极限($n\to\infty$),记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 特别地,当 $A=0$ 时,称$\{a_n\}$为 $n\to\infty$时的无穷小量.

还可有如下等价性描述：

(1) $\forall\varepsilon>0$,$\exists N$ 与常数 A,使当 $a_n\in\{a_n\mid n>N\}$时,恒有 $a_n\in N(A,\varepsilon)$.

(2) $a_n=A+\alpha_n$,其中 $\alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$.

当上述的常数 A 不存在时,称$\{a_n\}$没有极限.

[**特别提示**] 对任何极限等式$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 的理解应包括两层含义：首先极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,其次才是该极限值等于 A. 任何一个极限等式与其他数学等式的差别即在于此.

若对任意(任意大)$M>0$,$\exists N$,使当 $n>N$ 时,恒有 $|a_n|>M$,则称 $\{a_n\}$ 为无穷大量($n\to\infty$),记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

在某些具体情形下,应注意区别正负无穷大量.

2. 运算性质

当极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 均存在时,有下列等式成立:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=cA$,$c$ 为常数.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=AB$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$,$B\neq 0$,$b_n\neq 0$.

[**特别提示**]　以上运算性质均为充分条件的命题,当$\{a_n\}$,$\{b_n\}$极限不存在时,运算结论为不定,需对具体问题进行具体分析.极限运算性质在应用中的错误是常见错误,应特别注意.

3. 解析性质

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$,则$\exists N$,使当 $n>N$ 时,恒有 $a_n>0$(保序性,也称为保号性).

(2) 若 $\exists N$,使当 $n>N$ 时,$a_n\geqslant 0$(或 $a_n>0$),且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在,则有 $A\geqslant 0$(保序性,也称为保号性).

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在,则$\{a_n\}$有界(有界性).

(4) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则常数 A 惟一(惟一性).

[**特别提示**]　在上述性质中,保序性在许多场合下都有重要应用,建议读者练习利用极限定义证明保序性.惟一性常用于求极限(见例 1.2).

4. 极限存在的三个准则

(1) 单调有界准则

若$\{a_n\}$单调增加(减少)且有上界(下界),则极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) 夹逼准则

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$,且对$\{c_n\}$ $\exists N$,使当 $n>N$ 时,满足 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,则$\{c_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$.

(3) 无穷小量与有界序列乘积准则

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\{b_n\}$有界,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

[**特别提示**]　在极限运算中,无穷大量不可以参与四则运算,常用方法是将无穷大量化为无穷小量,而无穷小量可以进行运算.

(1) 有限个无穷小量的和与积仍为无穷小量.

(2) 无穷大量的倒数(分母不能为零)为无穷小量.

(3) 无穷小量的比(分式)为不定型(见第 2 讲).

（4）涉及序列的复合极限形式，可用复合极限准则（见第 2 讲）.

（5）应熟悉无穷小量（或无穷大量）的比较与排序，并记住若干结论，在适当场合可直接引用，如：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\quad a>0, \tag{1.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1, \tag{1.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{a^{n}}=0,\quad \alpha>0,a>1, \tag{1.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n}}{n!}=0, \tag{1.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n}}=0. \tag{1.13}$$

常用的无穷大量由低阶到高阶排序有

$$\ln^{\lambda}n\,(\lambda\geqslant 1),\quad n^{\alpha}\,(\alpha>0),\quad a^{n}\,(a>1),\quad n!,\quad n^{n}.$$

此外，还有重要极限（由单调有界准则证明）

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}. \tag{1.14}$$

问题集粹

问题 1.1

如何意识到应用基本不等式？

［解答与导引］ 对不等式的证明、极限的存在性讨论、级数的收敛性讨论、广义积分收敛性判断，积分式的估值（包括定积分与重积分、曲线曲面积分）等类型问题，都应根据问题自身的特点及相关初等函数的类型，联想到是否可有相应的基本不等式可以引用，成功的引用往往需要对基本不等式进行适当变形，尤其是对变量记号及复合函数表达式的灵活运用，将是成功引用基本不等式的关键.

例 1.1 设 $x\in(1,\mathrm{e})$，则正确的是（　　）.

（A）$\sin(\ln x)<\ln x$　　　　（B）$\sin(\ln x)>\ln x$

（C）$\sin(\ln x)\leqslant\ln x$　　　　（D）（A）、（B）、（C）均不正确

［解］ 当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$0<\ln x<1<\frac{\pi}{2}$，因此应选（A）.　［解毕］

［注］ 不等式（1.6）中的等号仅在 $x=0$ 时成立.

例 1.2 设 $a_1=a>1,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明 $\{a_n\}$ 有极限，并求此极限值.

［解］ 由已知条件得 $a_n>0$，即有下界，只需证明 $\{a_n\}$ 单调减少.

［方法 1］ 由平均值不等式可有

$$a_{n+1}\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}\right)=\sqrt{a}>1,\quad 即\quad a\leqslant a_n^2,$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)-a_n\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_n^2}{a_n}\right)-a_n=0.$$

于是 $a_{n+1}\leqslant a_n$，即$\{a_n\}$单调减少，于是极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在. 且由极限的保序性可知 $A\geqslant 1$. 对已知递推式，令 $n\to\infty$，由极限的惟一性得

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right),$$

解得 $A=\sqrt{a}$（舍去负根），即有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

［**方法 2**］　由$\sqrt{a}\leqslant a_n$，则应有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a_n^2}\right)\leqslant 1.$$

因此$\{a_n\}$单调减少. 其余步骤同方法 1.

［**方法 3**］　由$\sqrt{a}\leqslant a_n$ 可得

$$a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_n^2}{a_n}\right)=a_n.$$

于是$\{a_n\}$单调减少，其余步骤同方法 1.　［解毕］

［**注**］　以上三个方法均用到平均值不等式，不同之处是采用不同方法证明单调减少.

问题 1.2

在大学数学学习中没有特别注意到极限的保号性，极限的这一性质很重要吗？

［**解答与导引**］　是的，极限的保号性很重要. 这一性质除了对极限本身有重要的分析意义外，还是连续函数保号性、积分保号性与估值定理的理论基础，因此应从极限定义本身加深对保号性（保序性）的理解.

例 1.3　已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>2$，则正确的是（　　）.

(A) 对任意自然数 n，有 $x_n>2$　　(B) $\exists N$，使当 $n>N$ 时，有 $x_n>2$

(C) $\forall N,\exists N_0>N$，使 $x_{N_0}=2$　　(D) 对任意 n，$x_n\neq 2$

［**解**］　令 $y_n=x_n-2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A-2>0$，即有：$\exists N$，使当 $n>N$ 时 $y_n=x_n-2>0$，即 $x_n>2$. 因此应选(B). (A)和(D)显然不对，至于(C)的结论，与保号性相抵触. 在有限项之内，可有个别项 $x_n=2$，但在足够大的项数之后，不能再有等于 2 的项，因而(C)不对.　［解毕］

例 1.4　假设存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有 $x_n>y_n$，已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$ 存在，则正确的是（　　）.

(A) $A\geqslant B$　　(B) $A\neq B$

(C) $A>B$　　(D) A 和 B 的大小比较关系不定

［**解**］　令 $a_n=x_n-y_n$，则有 $a_n>0\ (n>N)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=A-B\geqslant 0.$$

故应选(A). 可以有 $A=B$ 的情形，读者可自行举例. 因此(B)，(C)均不正确.　［解毕］

问题 1.3

在极限的夹逼准则与单调有界准则中，哪一个更重要？如何想到应用这两个准则？

[解答与导引] 极限的夹逼准则与单调有界准则各有不同的用场，不能简单地认为哪一个更加重要. 一般说来，在所论极限表达式中没有给定具体函数类型时，往往需要考虑试用单调有界准则；而在极限表达式中所涉及函数类型有明显的不等式放大与缩小关系时，应考虑试用夹逼准则. 前者可参见例 1.2. 以下再给出几个例题.

例 1.5 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2+k}$.

[解] 记

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k}=\frac{1}{2n^2+1}+\frac{2}{2n^2+2}+\cdots+\frac{n}{2n^2+n}.$$

应用夹逼准则，可发现

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+n}<x_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2},$$

于是有

$$\frac{1}{2n^2+n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}<x_n<\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，上述不等式两端有相同极限$\dfrac{1}{4}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2+k}=\dfrac{1}{4}$. [解毕]

例 1.6 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(4+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，$n\geqslant 2$.

[解] 利用初等函数性质，当 $n\geqslant 2$ 时可得到

$$3=(3^n)^{\frac{1}{n}}<(4+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}}.$$

当 $n\to\infty$ 时，则有$\lim\limits_{n\to\infty}(4+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$. [解毕]

[特别提示] 对于序列极限，我们关心的是 n 足够大时的极限状态，前端的有限项对极限的存在性无关大局，这正是本题限制 $n\geqslant 2$ 的理论根据. 其实有

$$\lim_{n\to\infty}(100+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$$

例 1.7 设 $a>0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

[证] 记 $x_n=\dfrac{a^n}{n!}$，则 $x_{n+1}=\dfrac{a}{n+1}\cdot x_n$.

(1) 设 $a>1$，则当 $n+1>a$ 时必有 $x_{n+1}<x_n$，即序列 $\{x_n\}$ 从第 $[a]$ 项开始单调减少，且 $x_n>0$，有下界，于是极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在. 对 $x_{n+1}=\dfrac{a}{n+1}\cdot x_n$，取 $n\to\infty$，则得到 $A=0\cdot A$，因此 $A=0$.

(2) 若 $0<a\leqslant 1$，则对任意 n 必有 $x_{n+1}<x_n$，即序列 $\{x_n\}$ 单调减少. 其余步骤同(1).

[证毕]

例 1.8 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

［证］ 注意到

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}.$$

由夹逼准则知，当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$. ［证毕］

例 1.9 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

［证］ 由复合极限运算准则，利用(1.9)式便有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\ln 1=0.$$ ［证毕］

例 1.10 设 $a_1=\sqrt{6}$，$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在，并求 A.

［解］ 考虑利用单调有界准则证明极限的存在性.

$$a_1=\sqrt{6}<6,\quad a_2=\sqrt{12}<6.$$

假设 $a_n<6$，则 $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}<\sqrt{12}<6$，因此 $\{a_n\}$ 有上界.

另外又有 $a_2>a_1$，假设 $a_n>a_{n-1}$，则

$$a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}>\sqrt{6+a_{n-1}}=a_n.$$

于是 $\{a_n\}$ 为单调增序列，由单调有界准则知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 存在. 由极限的惟一性，对已知递推式令 $n\to\infty$，得到

$$A=\sqrt{6+A}.$$

解得 $A=3$ 或 $A=-2$，注意到 $a_n>0$，由极限的保序性，必有 $A>0$，于是 $A=3$. ［解毕］

以下是将极限保序性用于积分的估值定理，也是利用单调有界准则的一个综合例题.

例 1.11 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续非负且单调减少，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots),$$

证明 $\{a_n\}$ 有极限.

［证］

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right)+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 单调减少，因此当 $x\in[k,k+1]$ 时，$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k)$，于是

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k).$$

又 $f(x)\geqslant0$，故 $a_n>0$（有下界）.

再证 $\{a_n\}$ 单调减少. 考虑

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\sum_{k=1}^{n+1}f(k)-\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\\&=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant0,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 单调减少，故 $\{a_n\}$ 有极限. ［证毕］

问题 1.4

计算数列极限的主要方法与技巧是什么？

［解答与导引］　对数列极限的计算问题，一般应认为其极限的存在性已经解决. 至于计算的方法和技巧，一般包括：

(1) 利用运算法则，包括复合函数极限运算准则. 这里必须再次提到的是，设法将表达式中的无穷大量转化为无穷小量，涉及的方法包括有理化、三角函数恒等变形.

(2) 利用重要极限(1.14).

(3) 引入函数记号，转化为计算函数的极限，涉及方法可能是导数定义，洛必达法则或无穷小量替换.

(4) 利用定积分定义转化为计算某一函数的定积分.

(5) 利用初等函数泰勒公式求极限也是一种重要方法.

例 1.12　设 $0<|a|<1, 0<|b|<1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$.

［解］　由等比数列求和公式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

［解毕］

例 1.13　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+4\sin\dfrac{n\pi}{2}}{5n^2}$.

［解］　应用运算法则，并注意将无穷大量转化为无穷小量即可完成运算.

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{5n}+\frac{4}{5n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{5}+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{5n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\\&=\frac{1}{5}+0=\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

［解毕］

例 1.14　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{4n^2-n})$.

［解］　利用三角函数诱导公式进行预处理.

$$\begin{aligned}\cos(\pi\sqrt{4n^2-n})&=\cos(\pi\sqrt{4n^2-n}-2n\pi)\\&=\cos\pi\left(\sqrt{4n^2-n}-2n\right)\\&=\cos\frac{\pi(4n^2-n-4n^2)}{\sqrt{4n^2-n}+2n}\\&=\cos\frac{-n\pi}{\sqrt{4n^2-n}+2n}.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}(\cos\pi\sqrt{4n^2-n})=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{-n\pi}{\sqrt{4n^2-n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{-\pi}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

［解毕］