第1讲　行　列　式

知识综述与应试导引

行列式是线性代数的基础，是研究线性代数主要问题的一种有力工具.例如，在讨论矩阵的可逆性、矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量以及判别二次型的正定性等问题中都要用到行列式.它的主要内容有行列式的概念和基本性质，行列式按行展开定理等.这一讲的要求是了解行列式的概念，掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式按行展开定理计算行列式.近几年，行列式也有和微积分结合的综合考题，但万变不离其宗，解决这类问题的关键仍然是行列式的基本概念、性质和计算方法.

1.1　行列式的概念

n 阶行列式是一个数，是由 n^2 个数排成 n 行 n 列的方阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所决定的.

例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2.$$

二阶行列式的一般计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}.$$

这个数是由两项的和构成的，每一项又是由取自不同行不同列的两个数的乘积组成的，且其中一项为正，一项为负.

三阶行列式的计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

在这个式子中，如果把二阶行列式展开，就得到 6 项，每一项由取自不同行不同列的 3 个数的乘积组成，其中 3 项为正，3 项为负.

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的是一个 $n-1$ 阶行列式，叫做 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.那么三阶行列式就可写作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

再进一步,称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 a_{ij} 的**代数余子式**,则三阶行列式就可写作:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

同样,n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

将其中的代数余子式全部展开,得到的是一个数,它是 $n!$ 项的代数和,其中每一项都是由取自不同行不同列的 n 个数的乘积组成,其中一半是正项,一半是负项.

显然,如果在一个行列式中有的元素是字母 x,那么行列式就是关于 x 的一个多项式.

例 1.1 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-1) = x^2 - x.$

由 n 阶行列式的定义,容易计算以下例子.

例 1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \cdots = n!.$

例 1.3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

形如例 1.2 的行列式叫对角行列式,形如例 1.3 的行列式叫上三角行列式,这两个例子可以当公式用.与例 1.3 类似的有下三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2　行列式的性质

行列式最基本的性质有以下 4 个. 为书写方便,下面的结果用三阶行列式给出,实际上对 n 阶行列式成立.

性质 1　行列式中行列互换,其值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这个性质说明,对于行成立的性质,对于列也同样成立,所以,以下的性质将“行”改成“列”也成立.

性质 2　行列式中两行(列)对换,其值变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 3　行列式中如果某行(列)元素有公因子,可以将公因子提到行列式外.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质 4　行列式中如果有一行(列)的每个元素都由两个数之和组成,行列式可以拆成两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由以上 4 条基本性质,还能推出下面几条性质:

性质 5　行列式中如果有两行(列)元素对应相等,则行列式的值为 0.

性质 6　行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为 0.

性质 7　行列式中如果有一行(列)元素全为 0,则行列式的值为 0.

性质 8　行列式中某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列),其值不变.

行列式主要依靠这些性质来简化计算,所以这 8 个性质不但要熟记,还要熟练应用.

例 1.4　计算 $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$.

[**分析**]　这个行列式不是对角行列式,但是可以通过换列化作对角行列式. 这里要注意阶数 n 的奇偶性. 当 n 是偶数时,一共要对换 $\dfrac{n}{2}$ 次;当 n 是奇数时,一共要对换 $\dfrac{n-1}{2}$ 次.

[解] $$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}n!, & n\text{ 是偶数;}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}n!, & n\text{ 是奇数.}\end{cases}$$ [解毕]

1.3 行列式的其他常用公式

(1) 范德蒙德(van der Monde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是方阵.

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵.

上面两个公式还可以推广为

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $n\times m$ 的矩阵.

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $n\times m$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 的矩阵.

例 1.5 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

[解] 这是一个典型的范德蒙德行列式,直接套用公式,得到

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}&=(-1-1)(2-1)(3-1)[2-(-1)][3-(-1)](3-2)\\ &=-2\times1\times2\times3\times4\times1\\ &=-48.\end{aligned}$$

[解毕]

例 1.6　计算 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$.

［**解**］　这是形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的行列式，可以套用公式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times n$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n!, & n\text{ 是奇数}; \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} n!, & n\text{ 是偶数}. \end{cases}$$

［解毕］

例 1.7　计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

［**分析**］　表面上看，该行列式和前面提到的几个行列式不同，但是可以通过换行换列化作形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的行列式. 先换第 2 列和第 4 列，再换第 2 行和第 4 行.

［**解**］

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3).$$

［解毕］

1.4　行列式的计算

行列式计算的主要思路是利用行列式的性质和展开定理，化繁为简，化未知为已知，化高阶为低阶. 所谓化繁为简，就是利用性质将非零的元素消成零，行列式中 0 越多就越容易计算. 从前面看到，行列式中有几个很特殊的行列式，例如，对角行列式、三角行列式、范德蒙德行列式等. 它们的结果是已知的，可以拿来当公式用. 所谓化未知为已知，就是把行列式化成这些特殊的行列式. 一般来说，低阶的行列式总是比高阶的行列式容易计算，所以利用性质将行列式中的一行或一列中除一个元素外其余元素全化为 0，利用展开定理就可以化作低一阶的行列式，达到简化的目的.

例 1.8 计算$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

［**分析**］ 在这个行列式中，每一列各元素的常数项都相同，利用性质可以消出很多 0，然后求解.

［**解法Ⅰ**］

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x+1 & x & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= x^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^4.$$

［解毕］

［**解法Ⅱ**］

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x+1 & x \\ 1 & x & 1 & 0 \\ x+1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 (-1)^{2\times 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 (1-x-1)^2$$

$$= x^4.$$

［解毕］

例 1.9　计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

［**解**］　按第 1 列展开

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n.$$　［解毕］

例 1.10　计算$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$.

［**解**］

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}=b_4\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=b_4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_1b_2-a_2b_1 & 0 & 0 & a_2 \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & 0 & a_3 \\ a_1b_4-a_4b_1 & a_2b_4-a_4b_2 & a_3b_4-a_4b_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=-a_1b_4\begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & 0 & 0 \\ a_1b_3-a_3b_1 & a_2b_3-a_3b_2 & 0 \\ a_1b_4-a_4b_1 & a_2b_4-a_4b_2 & a_3b_4-a_4b_3 \end{vmatrix}$$

$$=-a_1b_4(a_1b_2-a_2b_1)(a_2b_3-a_3b_2)(a_3b_4-a_4b_3).$$

［解毕］

1.5　按行展开定理

行列式的降阶计算其实并不一定要对第 1 行或第 1 列展开，也可以对任意一行或任意一列展开，这就是按行展开定理. 如果每行的元素乘的不是自己的代数余子式，而是其他行元素的代数余子式，那么其和是 0. 这是展开定理的另一层含义，是考研题的又一个考察点.

行列式按行展开定理包含两部分：

(1) n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的各元素与其对应代数余子式乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这一个性质意味着展开行列式时，不必拘泥于按第 1 行展开，这样省去了换行的步骤，能直接对任意一行展开.

(2) n 阶行列式 D 的某一行各元素与另一行对应元素代数余子式乘积的和等于 0. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

这两个性质合起来，可以用一个公式来表达：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=k, \\ 0, & i\neq k. \end{cases}$$

这两个性质中的行改成列，就是按列展开的定理：

(3) n 阶行列式 D 的某一列的各元素与其代数余子式的乘积的和等于行列式的值，即

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

(4) n 阶行列式 D 的某一列的各元素与另一列对应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad i\neq j.$$

(3)，(4)两个性质合起来，也可以用一个公式来表达：

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=\begin{cases} D, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases}$$

例 1.11　已知 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，求第 3 列各元素的代数余子式之和 $A_{13}+A_{23}+A_{33}$.

［分析］ $A_{13}+A_{23}+A_{33}$可以改写为 $1\times A_{13}+1\times A_{23}+1\times A_{33}$，只要将原行列式的第 3 列改为 3 个 1，就是所要求的.

［解］ $A_{12}+A_{23}+A_{33}=1\times A_{13}+1\times A_{23}+1\times A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$ ［解毕］

［特别提示］ 本题的另一种理解是，第 2 列的每个元素乘第 3 列对应元素的代数余子式的和，根据展开定理，得 0.

例 1.12 求行列式$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$第 4 行各元素的余子式的和.

［分析］ 本题有 3 种解法. 解法Ⅰ，用展开定理，类似例 1.11 的做法；解法Ⅱ，利用展开定理和余子式与代数余子式的关系，简化计算；解法Ⅲ，直接求 4 个余子式的和.

［解法Ⅰ］ $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+2}(-7)\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=7\times 2\times\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=14\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=28\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-28.$$

［解法Ⅱ］ 由展开定理有

$$2A_{41}+2A_{42}+2A_{43}+2A_{44}=0,$$

即

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0,$$

又易知

$$A_{42}=M_{42}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

于是

$$A_{41}+A_{43}+A_{44}=0,$$

即

$$-M_{41}-M_{43}+M_{44}=0,$$
$$M_{41}+M_{43}=M_{44},$$

于是

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=2M_{44}=2\times\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}=-28.$$

［解法Ⅲ］ $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$

$$=\begin{vmatrix}0&4&0\\2&2&2\\-7&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\0&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&0\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&0&4\\2&2&2\\0&-7&0\end{vmatrix}$$

$$=-56+0+42-14$$

$$=-28.$$

［解毕］

1.6 克拉默法则

克拉默法则是行列式在线性方程组问题中的一个应用，只在方程个数和未知数个数相同的特殊情况下有效.

设有 n 元线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

若系数行列式 D 不等于 0，即

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有惟一解，而且其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j-1}&b_1&a_{1j+1}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2j-1}&b_2&a_{2j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj-1}&b_n&a_{nj+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

克拉默法则只适用于方程个数和未知数个数相同的方程组. 对于方程个数和未知数个数不同的方程组，它的所有系数不能构成方阵，也就是说不能形成行列式，也就不能用克拉默法则来判断方程组是否有惟一解.

例 1.13 解线性方程组