第 1 讲　事件概率和等可能概型

知识综述与应试导引

- 理解概率论的两个最基本概念:“事件”和“概率”.所谓事件,粗略地可视为随机试验的结果,事件间的关系和运算可借用集合的关系和运算.概率的定义和性质保证所定义的“概率”确实是“量度”事件发生可能性大小的数量指标.
- 介绍并比较两个常见的、有等可能性的简单概率模型(概型):古典概型和几何概型.前者是离散的,主要研究工具是排列和组合;后者是连续型的,主要研究工具是几何方法(求长度、面积和体积等),因而会用到微积分.要会判断和计算这两类概型,而要正确计算必须注重样本空间的选取.排列组合公式很多,本讲列出应该掌握的常用组合公式.
- 由古典概型的研究还引出二项分布和超几何分布,它们都是大纲明确要求掌握的.几何概型既是第 4 讲均匀分布的产生背景,也对求均匀分布随机变量(包括随机向量)的函数分布和矩,提供更加简捷和直观的方法,还可将二重积分计算化为一重定积分计算,从而降低难度,减少计算错误,参看例 5.4.3 和例 5.4.5.
- 概率的公式中最为活跃的、常考的是概率的加法公式和逆事件公式.本讲列出加法公式常用形式;逆事件公式常使问题一下子变得很简单(参看例 1.4.3、例 1.5.2 和例 1.8.1).这两个公式,连同第 2 讲的条件概率及有关的乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式,以及独立性定义与性质的公式,都是考查的热点,必须在理解基础上熟练掌握.

1.1　事件与概率

1.1.1　事件的概念与性质

1. 概率论研究的对象和任务

“天有不测风云,人有旦夕祸福”,精炼地概括了自然界和人类社会活动中广泛存在着随机现象.概率论是研究随机现象的数量规律的数学分支,其基础是概率空间.概率空间由三部分组成:样本空间——考察的对象,事件体——所有随机现象中随机事件的全体,以及概率(测度)——事件发生的可能性的数量指标.

随机现象中事件发生的可能性大小是客观存在的,量度的数量指标就是概率.

2. 事件的概念

“事件”和“概率”是概率论基础的两个最基本概念.

随机试验是指这样的一种试验:试验可以重复进行;每次试验的结果不止一个;每次试验前不能肯定会出现哪一个结果.随机试验里最基本的不能再分解的结果叫基本结果,也叫基本事件.由若干基本结果组成的,称为复合事件.基本事件和复合事件,泛称事件.特别地,包含所有基本结果的,称为必然事件,也称为样本空间,其反面也认为是一个事件,就是不可能事件.所有事件的全体称为事件体.必然事件、不可能事件及事件体分别专记为 Ω,$\varnothing$ 及 $\mathscr{F}$.

从 1,2,3 三个数中随机取一个数,基本事件就是$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$,必然事件 $\Omega=\{1,2,3\}$,事件$\{1\}$的逆事件为$\{2,3\}$,而事件体为

$$\mathscr{F}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\Omega,\varnothing\} \tag{1.1}$$

如果只是关心是否取出“3”,则此时所有的事件便只有 4 个,$\mathscr{F}=\{\{3\},\{1,2\},\Omega,\varnothing\}$,这实际上变为伯努利试验(参看第 3 讲)的事件体.

上例中 Ω 是一个有限的点集,事件体可以全部列出来.而在考察电视机寿命时,Ω 就是一个实数区间.

3. 事件的运算和性质

基于集合论建立了“事件”这一概念,自然可以借用集合间的关系和运算来刻画现实中事件间的关系和运算.A,B 集合求交的运算常略“$\cap$”不写,即 $AB=A\cap B$.在上面取数例中,如果事件“取出前两个数”记为 A,“取出不是 1”记为 B,那么一次试验中取出“1”时,那就可以说事件 A 出现了,当然也可以说事件 B 未出现,用集合论中的表示法分别记为 $1\in A$ 和 $1\notin B$,也记为 $\omega_1\in A$ 和 $\omega_1\notin B$.当然也有 $\omega_1\in A\overline{B}=A-B$.而如果取出“2”,则 $\omega_2\in AB$,此时事件 A 和 B 同时发生了.这样可以在集合的关系和运算与事件的关系和运算之间建立对应,如表 1.1 所示.

表 1.1

集合的关系和运算	事件的关系和运算
$\omega\in A$	事件 A 发生
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 必发生
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生
$\bigcup_i A_i$	事件 A_i,$i=1,2,\cdots(,n)$,中至少有一个发生
$A\cap B$ 或 AB	事件 A 与事件 B 同时发生
$\bigcap_i A_i$	所有事件 A_i,$i=1,2,\cdots(,n)$,都同时发生
$A\overline{B}$ 或 $A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生

因而事件间运算成立以下定律.

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$

交换律:$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$, $C(A\cup B)=(CA)\cup(CB)$

对偶原理:$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}$, $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}$

常称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的和事件,而称 AB 为积事件.如果 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互

斥，或不相容，有时也说不相交. 如 $A_iA_j=\varnothing$，$\forall\, i\neq j$，则诸事件 A_i 两两不交.

1.1.2　概率的概念与性质

1. 概率的概念

"概率"是概率论的又一最基本的概念. 事件的概率值可以看成以事件(用集合论的话说，是集合)为自变量的一个函数值，它们在$[0,1]$之中. 严格的定义如下.

定义 1.1　设 P 是定义在事件体 $\mathscr{F}$ 上的实值集函数，满足

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$，$\forall\, A\in\mathscr{F}$；

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots$，且两两不交，即 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，则

$$P\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 P 为定义在事件体 $\mathscr{F}$ 上的**概率**，称 $P(A)$ 是**事件 A 的概率**.

$\Omega,\mathscr{F},P$ 合称概率空间. 这里 Ω 是所观测的对象全体，也称样本空间，$\mathscr{F}$ 是事件全体，而 P 为概率.

2. 概率的运算和性质

下面的概率的性质定理保证上述定义的"概率"确实能作为事件发生可能性大小的数量指标. 比如说，不可能事件的概率应该为 0，在定义中没有写明，但能得到证明；又比如说，事件 B 如果包容了事件 A，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，那么 $P(A)$ 应该不大于 $P(B)$ 等，也都能得到证明.

定理 1.1(概率的性质)　设 P 是事件体 $\mathscr{F}$ 上的概率，则

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 有限可加性：设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，且两两不交，则 $P\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3) 设 $A\in\mathscr{F}$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(4) 单调性：如果 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

(5) 连续性：设 $A_i\in\mathscr{F}$，且单调，即 $A_i\subset A_{i+1}$ 或 $A_i\supset A_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$，此时分别定义 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

对于 n 个不相交事件的和事件，其概率计算有一般加法公式.

定理 1.2(加法公式)　设 $A_i\in\mathscr{F}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=s_1-s_2+s_3+\cdots+(-1)^{n+1}s_n \tag{1.2}$$

其中

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\quad s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$s_3 = \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k), \cdots, \quad s_n = P(A_1A_2\cdots A_n)$$

可见 s_j 是这 n 个事件中每 j 个事件同时发生的概率的和.

特别地,当这 n 个事件彼此不交时,式(1.2)就是有限可加性(定理 1.1 的(2)).常用的加法公式是 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形.

当 $n=2$ 时,式(1.2)变为

$$P(A_1\cup A_2) = P(A_1 + A_2\overline{A}_1) = P(A_1) + P(A_2\overline{A}_1) \tag{1.3}$$

把 $P(A_2)=P(A_2A_1)+P(A_2\overline{A}_1)$ 代入式(1.3),得

$$P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \tag{1.4}$$

此即 $n=2$ 时的式(1.2).

当 $n=3$ 时,式(1.2)变为

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \tag{1.5}$$

从图 1.1 可以直观地得到上式的证明.事实上,如用 p_k 表示图 1.1 中对应的彼此不相交的第 k 个事件的概率,容易看到 $P(A_1\cup A_2\cup A_3) = \sum_{k=1}^{7} p_k$;而式(1.5)右方的计算列表如表 1.2 所示.

表中"+"表示加上在这一行上此列对应的概率值,而"−"表示减去这个概率值.容易确认式(1.5)成立.

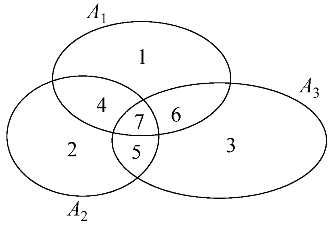

图 1.1　图解加法公式

表　1.2

		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
$+s_1$	$+P(A_1)=$	+			+		+	+
	$+P(A_2)=$		+		+	+		+
	$+P(A_3)=$			+		+	+	+
$-s_2$	$-P(A_1A_2)=$				−			−
	$-P(A_1A_3)=$						−	−
	$-P(A_2A_3)=$					−		−
$+s_3$	$+P(A_1A_2A_3)=$							+

3. 值得注意的几个问题

对于两个事件的和,常用处理方法有:

$$\begin{aligned} P(A_1\cup A_2) &= P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2) && \text{(一般加法公式)} \\ &= P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2) = P(A_2)+P(A_1\overline{A}_2) && \text{(有限可加性)} \\ &= P(A_1\overline{A}_2)+P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2) && \text{(有限可加性)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

注意集合的减法与数的减法的不同.一般地,$P(A-B)\neq P(A)-P(B)$.

实际上,概率的减法公式为

$$P(A-B) = P(A-AB) = P(A) - P(AB)$$

只有 $B \subset A$ 时，才有

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

1.2　有等可能性的两个概型

有等可能性的两个简单概率模型（概型）是：古典概型和几何概型. 古典概型是离散的，主要研究工具是排列和组合；几何概型是连续型的，它是第 3 讲中的均匀分布的实际背景，其主要研究工具是几何方法，也会用到微积分. 几何概型的研究对随机变量（包括随机向量）的函数分布和矩的计算很有帮助（参看例 5.4.3 和例 5.4.5）.

1.2.1　古典概型与几何概型的定义

定义 1.2　基本事件个数有限且等可能的概率模型称为古典概型.

定义 1.3　设 $\Omega, A(\subset\Omega)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中有 n 维体积的区域，用 $L(\Omega)$ 和 $L(A)$ 表示它们的 n 维体积，且 $0<L(\Omega)<\infty$. 令

$$P(A)=L(A)/L(\Omega), \qquad \forall A\subset\Omega$$

则此种概型称为几何概型.

它们的共同点是等可能性，而不同之处在于：古典概型的样本空间是有限多个，而几何概型的样本空间却是无穷多个（且不是可列的）.

例如在红色、黑色、白色三种小球数量相等的袋子中任取一球，取出的球的颜色构成三个等可能性的基本事件；闰年里一个人的生日有 366 个等可能性的基本事件（人为因素除外）. 这些概率模型，都是古典概型. 什么是几何概型？举个例子：明天清早会有一个馅饼从天上掉到学校礼堂前的草地上，让你去接. 你一定会找一个最大的饭盆去接. 因为饭盆的面积大，准确地说是饭盆的面积与这块草地面积之比大，接到这个馅饼的概率也就大. 至于在草地的什么地方去接，都没有关系，因为这饼掉向草地的任何一个“面积元”上，都是等可能的. 这就是几何概型问题.

1.2.2　等可能概型的计算

古典概型中可记样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$，每一个 ω_i 为一个样本点或基本场合，基本事件 $\{\omega_i\}$ 的概率 $P(\omega_i)\xlongequal{\text{def}}P(\{\omega_i\})=1/N, i=1,2,\cdots,N$.

古典概型问题中事件 A 的概率

$$P(A)=n_A/n_\Omega \tag{1.7}$$

其中，n_Ω：基本事件的总个数，也即样本空间 Ω 的点数；

n_A：事件 A 中的基本事件个数，也即 A 的点数.

古典概型问题的主要计算工具是排列和组合. 一般说组合概念考虑清楚了，排列也就容易得到. 由此看来，更要注意组合方法和计算公式（参看问题 1.7）.

几何概型问题中事件 A 的概率

$$P(A)=L(A)/L(\Omega),0<L(\Omega)<+\infty$$

其中，$L(\Omega)$：n 维空间 Ω 的 n 维体积，$L(A)$：n 维区域 $A(\subset\Omega)$ 的 n 维体积.

所谓 n 维体积，在 $n=1$ 时的一维体积为长度，二维时为面积，三维时则是通常说的体积.

几何概型问题中的主要计算工具是用几何方法计算长度、面积等，也会用到微积分计算.

古典概型的难点在于正确建立样本空间（参看问题 1.3），而几何概型难在模型化：如何化为数学问题（参看例 1.8.1 和例 1.8.2）.

1.2.3 等可能概型间的关系

几何概型与古典概型都有某种等可能性，或者说“均匀性”. 前述馅饼的几何概型例子中，如果你在那块草地实行“圈地运动”，圈得草地的 1/16，那么你接到那只馅饼的可能性就是 1/16. 这实际上已经变成古典概型问题了：每个 1/16 的草地都成为一个基本事件. 两个概型的

(3) $\overline{A\cup BC}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$　　　　(4) $(AB)(\overline{A}\overline{B})=\varnothing$

(5) 若 $A\subset B$,则 $A=AB$　　　　(6) 若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$

[**解**]　(1)成立 (2)不成立 (3)不成立 (4)成立 (5)成立 (6)成立

[**特别提示**]　由对偶原理及分配律有

$$\overline{A\cup BC}=\overline{A}\cap(\overline{BC})=\overline{A}(\overline{B}\cup\overline{C})=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}$$

一般地,$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\neq\overline{A}\,\overline{B}\overline{C}$,故(3)不成立.

例 1.1.3　设某箱装有 100 件产品,其中一、二和三等品分别为 80,10 和 10 件,现在从中随机抽取一件,记 $A_i=$"抽到 i 等品",$i=1,2,3$. 试求:$P(A_1A_3)$,$P(A_1\cup A_3)$和 $P(A_1\cap\overline{A}_3)$.

[**解**]

$$P(A_1A_3)=0$$

$$P(A_1\cup A_3)=P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0.1=0.9$$

$$P(A_1\cap\overline{A}_3)=P(A_1)=0.8$$

例 1.1.4　设 A,B 是事件,$P(A)=0.5$,$P(B)=0.7$,求 $P(A\cup B)$的最大值与最小值.

[**解**]　注意 $P(A)+P(B)=0.5+0.7>1$,此时 $AB\neq\varnothing$,$P(A\cup B)$最大值应该为 1(此时必 AB 最小,$P(AB)=0.2$). 而当 $A\subset B$ 或 $A\supset B$ 会使 $A\cup B$ 最小,本题应取 $A\subset B$,从而 $P(A\cup B)=P(B)=0.7$ 为最小值.

例 1.1.5　$P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$______.

[**解**]　0

[**特别提示**]　一般方法是基于事件运算律作整理化简,然后利用概率的性质得到计算结果. 但是此处可利用和事件与积事件(并与交)的特点作快速判断:前两个和事件都有 B,而 A 与 $\overline{A}$ 的交为$\varnothing$,因此$(\overline{A}+B)(A+B)=B$(注意交叉的交都是 B 子集). 类似地,后两个和事件的交为 $\overline{B}$,因此本题应填 0.

问题 1.2

概率的定义中为什么要规定可列可加性?

[**解答与导引**]　"概率"是量度事件发生可能性大小的"尺子". 在学习概率的定义时,绝大部分初学者不明白为什么要有"可列可加性"的规定. 我们来看大家熟知的"长度"的概念. 一个区间的"长度"是非负的集函数,我们将用 $L(A)$表示.

令

$$\Omega=(0,1],A_1=\left(0,\frac{1}{2}\right],\text{对 } n>1,A_n=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^n}\right]$$

易知 $L(A_n)=\dfrac{1}{2^n}$,注意诸 A_n 不交,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1]$. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}L(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1=L(0,1]$$

因此 $L\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}L(A_n)$,这就是可列可加性. 可见作为一个量度的"尺度",应该有可列可加性的要求. 实际上(0,1]上的任一个子区间的长度,也可视为 $\Omega=(0,1]$上该子区间的概率.

由于一个点的长度为0，所以研究长度时，$(0,1]$与$[0,1]$不作区别.

问题 1.3

样本空间如何选取？

[解答与导引] 要注意弄清随机试验的最终结果是什么，参加试验的个体是可辨还是不可辨的. 例如例1.3.1之(3)是按照规则至多抽取4个产品的检查结果，而不是无规则地抽取4个产品；又如例1.3.2试验的结果是n个人(当然是可辨别)的一次排队，而不是这n个人本身.

例 1.3.1 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分)；

(2) 对某工厂出厂的一批产品进行检查，合格的记上"正品"，不合格的记上"次品"，如连续查出2个次品时就停止检查，否则检查了4个产品时也就停止检查，记录检查的结果；

(3) 将一尺之棰折成三段，观察各段的长度.

[解] (1) $\Omega=\left\{\frac{i}{n}\,\middle|\,i=0,1,\cdots,100n\right\}$，其中，$n$为此小班的人数；

(2) $\Omega=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}$，其中0表示次品，1表示正品；

(3) $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}$，其中$x,y,z$分别表示第一、二、三段长度，或者

$\Omega=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0,1-(x+y)>0\}$，其中$x,y$分别表示第一、二段长度.

[特别提示] 弄清随机试验的最终的基本结果，是正确选取样本空间的关键. 例如本例之(2)是按照规则至多抽取4个产品的检查结果，而不是无规则地提取4个产品. (3)则是将一尺之棰任意折成三段，于是有三个有约束的长度. 如果将棰的左端点取为坐标原点，x,y分别表示折断点的坐标，则又可写

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<y<1\}$$

例 1.3.2 包括a和b两人在内共n人排队，问a,b间恰有r人的概率p.

[解] 事件"a,b间恰有r人"记为A. 所做的试验是n人排队，所有可能的排队结果是有限并且等可能的，因此是古典概型. 人与人间是有区别的，因此$n_\Omega=n!$. 下面来求n_A.

如果a排在b的左边且占在第1位，则符合A要求的排队结果一定是b占在第$r+2$个位置上，而其余$n-2$个人没有限制，不论是在a,b之间还是之外，只要有$0\leqslant r\leqslant n-2$，此时应有$(n-2)!$种可能. a可以退到第2位、第3位，直到第$n-r-1$位(这时b必相应地后退到最后边了). 考虑到b也可在a的左边，因此当$0\leqslant r\leqslant n-2$时，$n_A=2(n-r-1)(n-2)!$. 故当$0\leqslant r\leqslant n-2$时，$p=2(n-r-1)(n-2)!/n!=2(n-r-1)/n(n-1)$，否则$p=0$.

[特别提示] n个人的任意一种排队视为一个试验结果，而不是从这n人中任意选出a，b两个或r个人. 随机试验清楚了，样本空间清楚了，计算的正确性才有保证.

问题 1.4

为什么说概率的加法公式常可保证概率计算正确？

[解答与导引] 当各个事件是相交(相容)时，概率的加法公式看起来很复杂，但是它常

可保证对较为复杂的和事件的概率计算的正确性. 因此在审题时，如果和事件中各个事件是相交的，则应该按一般加法公式去算.

例 1.4.1　设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$. 求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

［**解**］　由概率的单调性及题设 $P(AB)=0$，知 $P(ABC)=0$.

由加法公式

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=3\times P(A)-P(AC)=3\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

［**特别提示**］　求至少有一个事件发生的概率，应该立即想到是求和事件的概率，因此用概率的加法公式.

例 1.4.2　设有电路如图 1.2 所示，其中 1，2，3，4 为继电器接点，它们闭合的概率均为 p. 设各继电器接点闭合与否相互独立，求 L 和 R 间成通路的概率.

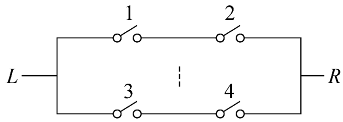

图 1.2　电路图

［**解**］　记事件 A_i：第 i 个继电器闭合，$i=1,2,3,4$；

事件 A：L 和 R 间成通路.

则 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$，由诸 A_i 独立，$P(A_iA_j)=p^2$，$i\neq j$.

注意 $(A_1A_2)\cap(A_3A_4)=A_1A_2A_3A_4$，于是由一般加法公式，所求概率为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=2p^2-p^4\end{aligned}$$

［**特别提示**］　要首先弄清 L 和 R 间成通路有几条，而至少有一条 L 和 R 间才能成通路，因此是求和事件的概率. 这样不会出现重复计算或者漏算的失误. 作为一个练习，如果在图 1.2 中间加一连线(虚线所示)，概率又将如何计算，答案是 $4p^2-4p^3-p^4$，希望你没有重算或漏算的失误.

例 1.4.3　设某类元件的可靠度均为 $r\in(0,1)$，且各元件能否正常工作是相互独立的. 现在将 $2n$ 个元件组成如图 1.3 所示的两种系统，试求两系统的可靠性.

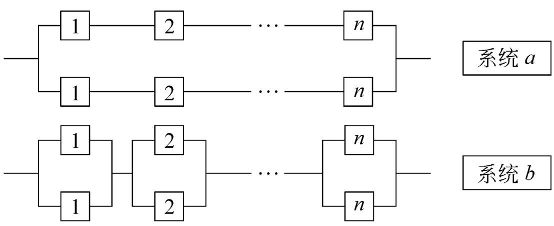

图 1.3　两种系统图

［**解**］　两系统的可靠性分别记为 R_a 和 R_b. 系统 a 的每条支路如果成通路(分别记为事件 A_1 和 A_2)，它的 n 个元件必须都处在正常工作状态，因此它的可靠性为 r^n. 而系统 a 通路必须至少有一条支路成通路，因此由一般加法公式

$$\begin{aligned}R_a&=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\\&=r^n+r^n-r^{2n}=r^n(2-r^n)\end{aligned}$$

另一个计算方法是利用逆事件. 两条支路都不通的概率为$(1-r^n)^2$,故也得

$$R_a = 1-(1-r^n)^2 = r^n(2-r^n)$$

现在来看系统 b. 每对并联元件部分的可靠性为$1-(1-r)^2=r(2-r)$,系统 b 的可靠性为

$$R_b = r^n(2-r)^n$$

［**特别提示**］ (1) 对一个元件或系统,它能正常工作的概率称为它的可靠度. 由元件串联或并联,可以构造多种系统,这类问题值得重视. 不需要记忆许多公式,重要的是抓住入手分析的两个关键:串联成通路是所有元件成通路(同时发生,积事件),并联是至少有一条支路成通路(和事件).

系统 a 是例 1.4.2 的推广:从 2 个元件串联到一般的 n 个元件串联,而系统 b 中每个并联部分则是例 1.4.2 的 2 个元件串联变成 1 个元件(串联)的情况. 所以利用例 1.4.2 立即得到

$$R_a = 2r^n - r^{2n}, \qquad R_b = (2r-r^2)^n$$

(2) 由于$0<r<1$,故$r^n(2-r^n)>r^n>r^{2n}$,这说明系统 a 的可靠性比其每条支路的可靠性大,比将 $2n$ 个元件组成串联系统可靠性更大. 由于 $n\geqslant 2$ 时,归纳可证$(2-r)^n>2-r^n$,从而 $n\geqslant 2$ 时 $R_b>R_a$,即系统 b 更优越.

(3) 注意逆事件概率公式的应用.

问题 1.5

请给出古典概型的典型题及有关重要的概型.

［**解答与导引**］ 下面例 1.5.1 有典型意义,它还引出两类重要的概率分布规律:二项分布和超几何分布.

例 1.5.1 设有 a 件正品 b 件次品,从中按有放回和无放回两种方式逐一随机抽 n 次,求恰抽出 k 件正品(记此事件为 A)的概率 p_k.

［**解**］ 有放回——此时为古典概型问题,空间的样本点个数 $n_\Omega=(a+b)^n$,而符合事件 A 要求的样本点个数 $n_A=C_n^k a^k b^{n-k}$,故

$$p_k = n_A/n_\Omega = C_n^k a^k b^{n-k}/(a+b)^n, \qquad k=1,2,\cdots,n \tag{1.8}$$

不放回——由于抽取不放回,后一次抽取时产品数已经比上一次抽取时少一个. 既然每次抽取不放回,因此逐一抽取 n 次也可以看成是从 $a+b$ 个产品中一次抽走了 n 个,因此 $n_\Omega=C_{a+b}^n$. k 件正品取自总的 a 个正品,可能的取法有 C_a^k 种,同理 $n-k$ 件次品的取法有 C_b^{n-k} 种,从而符合 A 的抽取的应有 $C_a^k C_b^{n-k}$ 种可能,故

$$p_k = C_a^k C_b^{n-k}/C_{a+b}^n, \qquad k=1,2,\cdots,n \tag{1.9}$$

此时还应有 $k\leqslant a$, $n-k\leqslant b$.

［**特别提示**］ (1) 有放回时,每一次抽取都是在 $a+b$ 个产品中任意抽取,并且 $a+b$ 个产品都是等可能地被抽到,这样,任意两次抽取应有$(a+b)^2$ 种等可能的结果,因此有放回抽取 n 次时,空间的样本点个数 $n_\Omega=(a+b)^n$. 为求 n_A,先假定前 k 次都抽到正品,那么后 $n-k$ 次就只能抽取到次品了. 仿 n_Ω 的计算,k 件正品的抽取应有 a^k 种等可能的情况,而 $n-k$ 件次品的抽取应有 b^{n-k}种等可能的情况,由于要抽 n 次,从而符合事件 A 要求的样本点个数,应该为 $a^k b^{n-k}$. 由于 n 次抽取中究竟哪 k 次抽取到正品(另外 $n-k$ 次应该抽出次品)是没有限制的,因此 $n_A=C_n^k a^k b^{n-k}$.