第1章

集　合

集合论是现代数学的基础，几乎与现代数学的各个分支都有着密切联系，并且渗透到所有科技领域。集合论的内容极其丰富，本章主要介绍朴素集合论的基本内容，包括什么是集合以及有关子集、空集、全集、补集、幂集等概念；集合的基本运算和集合代数的有关公式。

1.1　集合的基本概念

集合是具有某种特点的对象的聚合，每一个对象称为这个集合的元素。例如北京工业大学学生的全体可以构成一个集合，而北京工业大学的每一个学生就是这个集合中的一个元素。又如正整数的全体构成一个集合，而每一个正整数就是这个集合的元素。通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 代表集合，用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的一个元素，称 a 属于 A，并记作 $a\in A$。如果 a 不是集合 A 中的元素，称 a 不属于 A，并记作 $a\notin A$。

集合有多种表示方法，这里介绍常用的两种方法。一是列举法（或称穷举法），这种表示方法是将集合中的所有元素一一列举出来，元素之间用逗号分开，并用花括号将它们括起来。如：

$A=\{2,4,6,8,10\}$，这表示集合 A 由 5 个元素组成，它们分别是 2，4，6，8，10。又如：$B=\{a,e,i,o,u\}$，这表示集合 B 由 5 个元素组成，它们分别是 a,e,i,o,u。

由此可见，$4\in A$，$a\in B$；而 $5\notin A$，$b\notin B$。

集合的另一种表示方法是特征法，它是以某个小写的英文字母统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如：

$$C=\{x\mid x\text{ 是不大于 10 的偶数},x>0\}$$

这里，符号“|”读作“系指”，花括号内的逗号读作“并且”。因此集合 C 中的元素是一些不大于 10 的偶数，并且大于 0，或者简单地说，C 是由不大于 10 的正偶数组成。实际上集合 C 的元素应该是 2，4，6，8，10。可见集合 C 和列举法中所提到的集合 A 的元素是完全相同的。又如：

$$D=\{x\mid x\text{ 是英文字母},x\text{ 是元音}\}$$

很明显,D 中元素和上述集合 B 中的元素是相同的。

当两个集合 X 和 Y 有相同的元素时,称这两个集合相等,记作 $X=Y$。很显然,上面提到的集合 A,B,C,D 中,有 $A=C$ 和 $B=D$。

有一些集合,以后常常要用到,所以用固定的符号表示,如:

$\mathbf{N}$ 是自然数集合:$0,1,2,\cdots$;

$\mathbf{I}$ 是整数集合:$\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$;

$\mathbf{I}_+$ 是正整数集合:$1,2,3,\cdots$;

$\mathbf{Q}$ 是有理数集合;

$\mathbf{R}$ 是实数集合;

$\mathbf{C}$ 是复数集合。

一般地讲,用列举法来表示集合时,往往显得冗长而复杂,但当我们对集合的某些特征作抽象的讨论时,列举法能使问题显得直观和容易理解。

如果集合 A 中的每一个元素又都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的子集,也可以说 A 含在 B 中,或 B 含有 A,这种关系写作

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A$$

如果 A 不是 B 的子集,即在 A 中至少有一个元素不属于 B 时,称 B 不包含 A,记作

$$B \not\supseteq A \quad 或 \quad A \not\subseteq B$$

例如:设集合 $A=\{1,3,4,5\}$,$B=\{1,2,5\}$,$C=\{1,5\}$。易见 C 是 A 的子集,C 又是 B 的子集,但 B 不是 A 的子集,因为元素 $2\in B$ 而 $2\notin A$;同理 A 也不是 B 的子集,因为 $3\in A$ 而 $3\notin B$。

由集合间的包含关系,容易得到:

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

这一结论在证明两个集合相等时,往往是一种有效而简便的方法。

如果 A 是 B 的子集,但 A 和 B 不相等,也就是说在 B 中总有一些元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集。记作 $B\supset A$。如集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,那么 A 是 B 的真子集。

不含有任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$或$\{\}$,如:

$$A=\{x \mid x 是在 2000 年跳过 2.50 米的人\}$$

由于 2000 年还没有人跳过这个高度,所以 A 是空集,即 $A=\varnothing$。

由空集的定义可知,空集是一切集合的子集。

在实际工作中,我们所研究的对象总是限制在一定的范围内。比如,要研究北京市大学生的学习情况时,研究对象可以是清华大学的学生,也可以是北京工业大学的学生,但研究的对象总是限制在北京市大学生这个范围内。在这种情况下,我们称“北京市大学生的全体”组成的集合为全集。又如在初等数论中,研究的对象是整数,在这种情况下,全体整数组成的集合就是全集,全集通常用 U 表示。

请注意,全集的概念和研究对象所处的范围密切相关,不同的情况就有不同的全集。例如,当我们研究人口问题时,全世界所有的人就构成了全集;当我们研究中国妇女的生

活现状时，全中国所有的妇女构成了全集；甚至当研究的对象仅限制在一个较小的范围时，如仅研究北京工业大学一年级学生的学习情况时，北京工业大学一年级学生的全体就是全集。总之，全集是和研究对象密切相关的。简单地讲，当我们的讨论总是限制在某个集合的子集时，这个集合就是全集。

A 是一个集合，由属于全集 U 但不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集，记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$。例如

$$U=\{x \mid x\text{ 是北京工业大学的学生}\}$$
$$A=\{x \mid x\text{ 是北京工业大学的女学生}\}$$

则 A 的补集

$$\overline{A}=\{x \mid x\text{ 是北京工业大学的男学生}\}$$

又如

$$U=\{x \mid x\text{ 是正整数}\}$$
$$A=\{x \mid x\text{ 是正偶数}\}$$

则 A 的补集

$$\overline{A}=\{x \mid x\text{ 是正奇数}\}$$

集合中的元素可以是多种多样的，因此一个集合作为另一个集合的元素是完全可以的。例如，集合 $A=\{a,b,\{c,d\}\}$，这表明集合 A 含有 3 个元素：$a,b,\{c,d\}$，这里集合 $\{c,d\}$ 就成为集合 A 的一个元素了。

一般地讲，从属关系"$\in$"是元素和集合之间的关系，包含关系"$\supseteq$"则是集合和集合之间的关系，但也存在着这样的情况：集合 A 属于 B，集合 A 又含在 B 中，如：

$$A=\{a,b\}$$
$$B=\{a,b,\{a,b\}\}$$

这里就有 $A\subset B$ 和 $A\in B$ 同时成立。

当一个集合中的元素个数为有限时，该集合称为有限集；集合中元素的个数为无限时，该集合称为无限集。有限集 A 中元素的个数称为集合 A 的基，记作 $|A|$，如 $A=\{a,b,c\}$，则 $|A|=3$。

A 是有限集合，由 A 的所有子集作为元素而构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$，如

$$A=\{a,b,c\}$$

则

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

又如

$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

显然，当 $|A|=3$ 时，$|P(A)|=8$；当 $|A|=4$ 时，$|P(A)|=16$，在一般情况下有：

定理 1.1.2 A 是有限集，$|A|=n$，则 A 的幂集 $P(A)$ 的基为 2^n。

证明 由排列组合的知识可知，

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

又由二项式定理可知，

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^n \cdot b + \cdots + C_n^{n-1} \cdot ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

特别取 $a=b=1$，则有：

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

所以可得

$$|P(A)| = 2^n$$

1.2 集合的运算

集合上的运算是以给定的集合(称为运算对象)按某种规则去确定一个新的集合(称为运算结果)。

1. 集合的并运算

定义 1.2.1 两个集合 A、B 的并记作 $A\cup B$，它也是一个集合，由所有属于 A 或者 B 的元素合并在一起而构成的，即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad 或 \quad x \in B\}$$

例如

$$A = \{a,b,c\}$$
$$B = \{a,b,c,d,e\}$$

则

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$$

又如

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$$

集合的运算可以用文氏图形象地表示，在图 1.2.1 中，矩形表示全集 U，两个圆分别表示集合 A 和集合 B，阴影部分就是 $A\cup B$。

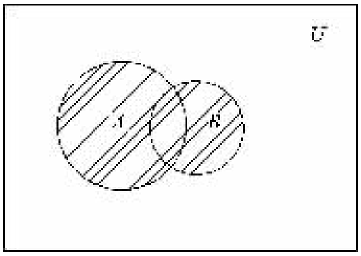

图 1.2.1

由集合并运算的定义可知，并运算具有以下性质：

(1) $A\cup A=A$

(2) $A\cup\varnothing=A$

(3) $A\cup U=U$

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

(5) $A \cup B = B \cup A$

2. 集合的交运算

定义 1.2.2 两个集合 A 和 B 的交记作 $A \cap B$,它也是一个集合,由属于 A、B 两集合的所有共同元素构成,即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

例如

$$A = \{a,b,c\}$$
$$B = \{a,b,d,f\}$$

则

$$A \cap B = \{a,b\}$$

又如

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

则

$$A \cap B = \{1,3\}$$

如果集合 $A \cap B = \varnothing$,也就是说 A 和 B 没有共同元素,则称 A、B 不相交,例如

$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{4,5,6\}$$

那么 $A \cap B = \varnothing$,即 A、B 不相交。

集合的交运算的文氏图表示,见图 1.2.2,其中阴影部分就是 $A \cap B$。

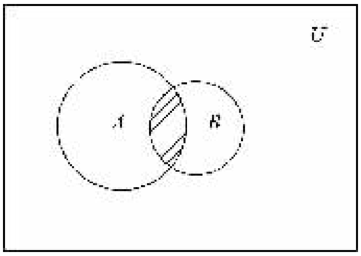

图 1.2.2

由集合交运算的定义可知,交运算具有以下性质:

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $A \cap U = A$

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(5) $A \cap B = B \cap A$

定理 1.2.1 设 A,B,C 为 3 个集合,则下列分配律成立:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明 这里只证明第一个等式,第二个等式的证明与第一个类似。

如果 $x \in A \cap (B \cup C)$,即 $x \in A$,且 $x \in B \cup C$,也即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$,也就是说 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$,所以 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,即有 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \supseteq A \cap (B \cup C)$。

另外,如果 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,则 $x \in (A \cap B)$ 或 $x \in (A \cap C)$,即 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或者 $x \in A$ 且 $x \in C$,也即 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$,所以有 $x \in A \cap (B \cup C)$,于是 $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$,由此可得 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

定理 1.2.2 设 A、B 为集合，则下列关系式成立：

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

读者可以用文氏图验证之。

定理 1.2.3 设 A、B 为集合，则下列关系式成立：

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

这里 $\overline{A}$ 为 A 的补集，补集的定义可参阅 1.1 节。

定理的证明从略，读者也可用文氏图验证之。定理 1.2.2 称为吸收律；定理 1.2.3 称为摩根定律，它们在集合的运算中有较大的用途。

3. 集合的减运算

定义 1.2.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差，记作 $A-B$，即

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

例如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{a, b\}$$

则

$$A - B = \{c\}$$

又如

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{a, b, e, f\}$$

则

$$A - B = \{c, d\}$$

再如

$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{e, f\}$$

则

$$A - B = \{a, b, c\}$$

集合的减运算，其文氏图表示见图 1.2.3。

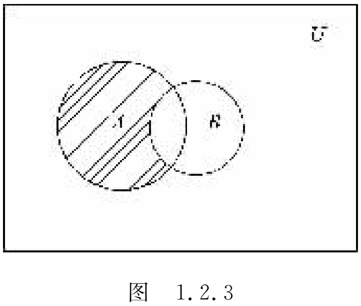

图 1.2.3

由减运算的定义可知，A 的补集就是全集减 A 的差，即

$$\overline{A} = U - A$$

集合的减运算有以下性质：

(1) $A-A=\varnothing$

(2) $A-\varnothing=A$

(3) $A-U=\varnothing$

(4) $A-B=A\cap\overline{B}$

性质(1),(2),(3)是显然的,性质(4)也可由减运算的定义直接得到。

例 1-1 设 A、B、C 为集合,证明:

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证明 利用性质(4),右式

$$\begin{aligned}(A\cap B)-(A\cap C)&=(A\cap B)\cap(\overline{A\cap C})\\&=(A\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\\&=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap\overline{C})\\&=A\cap B\cap\overline{C}\\&=A\cap(B-C)\end{aligned}$$

4. 集合的对称差

定义 1.2.4 集合 A 和 B 的对称差记作 $A\oplus B$,它是个集合,其元素或属于 A,或属于 B,但不能既属于 A 又属于 B。即

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

例如

$$A=\{a,b,c,d\}$$
$$B=\{a,c,e,f,g\}$$

那么

$$A\oplus B=\{b,d,e,f,g\}$$

集合的对称差的文氏图表示见图 1.2.4。

由对称差的定义易得下列性质:

(1) $A\oplus A=\varnothing$

(2) $A\oplus\varnothing=A$

(3) $A\oplus U=\overline{A}$

(4) $A\oplus B=B\oplus A$

(5) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(6) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

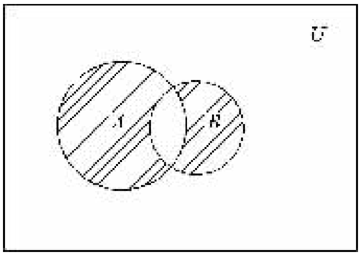

图 1.2.4

1.3 包含排斥原理

本节讨论有限集元素的计数问题。我们已经知道,有限集 A 中的元素个数记作 $|A|$。当有限集 A、B 不相交时,显然有 $|A\cup B|=|A|+|B|$,而当 A、B 相交时,由并运算的文氏图表示可知,应有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

这个结论常称作包含排斥原理。

对于3个集合的并的元素计数公式是：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \quad \text{（见图 1.3.1）}$$

这是因为

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &=|A\cup(B\cup C)|\\ &=|A|+|B\cup C|-|A\cap(B\cup C)|\\ &=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|\\ &\quad -|(A\cap B)\cup(A\cap C)|\\ &=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|\\ &\quad -(|A\cap B|+|A\cap C|\\ &\quad -|A\cap B\cap A\cap C|)\\ &=|A|+|B|+|C|-|B\cap C|\\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

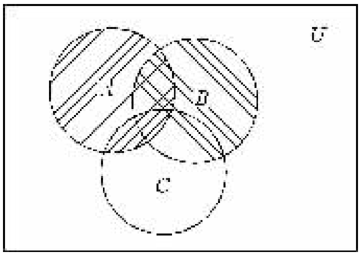

图 1.3.1

同理还可得到4个集合并的元素计数公式：

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D| &=|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|\\ &\quad -|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|\\ &\quad +|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|\\ &\quad +|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

用归纳法容易得到一般情况下的包含排斥原理。

定理 1.3.1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为有限集合，则

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| &=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|\\ &\quad +\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots\\ &\quad +(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

例 1-2 在20个大学生中，有10人戴眼镜，有8人爱吃口香糖，有6人既戴眼镜又爱吃口香糖，问不戴眼镜又不爱吃口香糖的人数是多少？

解 设 A 是戴眼镜大学生的集合，B 是爱吃口香糖的大学生的集合，由题意可知：$|A|=10$，$|B|=8$，$|A\cap B|=6$。由包含排斥原理可得：

$$\begin{aligned}|A\cup B| &=|A|+|B|-|A\cap B|\\ &=10+8-6=12\end{aligned}$$

而不戴眼镜又不爱吃口香糖的大学生数是 $20-|A\cup B|=8$。

例 1-3 对100名大学生进行调查的结果是：34人爱好音乐，24人爱好美术，48人爱好舞蹈；13人既爱好音乐又爱好舞蹈，14人既爱好音乐又爱好美术，15人既爱好美术又爱好舞蹈；有25人这三种爱好都没有，问这三种爱好都有的大学生人数是多少？

解 设 A 是爱好音乐的大学生的集合，B 是爱好美术的大学生的集合，C 是爱好舞蹈的大学生的集合。

由题意可知：

$$|A| = 34 \qquad |B| = 24 \qquad |C| = 48$$
$$|A \cap B| = 14 \qquad |A \cap C| = 13 \qquad |B \cap C| = 15$$
$$100 - |A \cup B \cup C| = 25$$

由包含排斥原理可知：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$75 = 34 + 24 + 48 - 14 - 13 - 15 + |A \cap B \cap C|$$

所以 $$|A \cap B \cap C| = 11$$

这三种爱好都有的大学生人数是 11。

例 1-4 某班有学生 60 人，其中有 38 人学习 PASCAL 语言，有 16 人学习 C 语言，有 21 人学习 COBOL 语言；有 3 人这三种语言都学习，有 2 人这三种语言都不学习，问仅学习两门语言的学生数是多少？

解 设 A 为学习 PASCAL 语言的学生的集合；B 为学习 C 语言的学生的集合；C 为学习 COBOL 语言的学生的集合。

由题意可知：

$$|A| = 38 \qquad |B| = 16 \qquad |C| = 21$$
$$|A \cap B \cap C| = 3 \qquad 60 - |A \cap B \cap C| = 2$$

因为 $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

得 $$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 20$$

请注意，仅学两门语言的人数不是 20，因为 $A \cap B \supset A \cap B \cap C$，所以仅学习 PASCAL 语言和 C 语言的学生数应是 $|A \cap B| - |A \cap B \cap C| = |A \cap B| - 3$。同样理由，仅学习 PASCAL 语言和 COBOL 语言的学生数是 $|A \cap C| - |A \cap B \cap C| = |A \cap C| - 3$；仅学习 C 语言和 COBOL 语言的学生数是 $|B \cap C| - |A \cap B \cap C| = |B \cap C| - 3$，所以仅学习两门语言的学生数应是

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3 |A \cap B \cap C| = 11$$

例 1-5 75 个儿童到公园游乐场，他们在那里可以骑旋转木马，坐滑行铁道车，乘宇宙飞船。已知其中有 20 人这三种东西都乘坐过，其中 55 人至少乘坐过其中的两种，若每样乘坐一次的费用是 5 元钱，公园游乐场总共收入 700 元钱。试确定有多少儿童没有乘坐过其中的任何一种。

解 设 A 是骑旋转木马的儿童的集合；B 是乘坐滑行铁道车的儿童的集合；C 是乘坐宇宙飞船的儿童的集合。

由题意可知：

$$|A| + |B| + |C| = 140$$

仅乘坐过其中两种的儿童数为：$55 - 20 = 35$，由例 1-4 的分析可知，$35 = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C|$，所以 $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| = 95$，而

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$= 140 - 95 + 20 = 65$$

所以没有乘坐过任何一种玩具的儿童人数为 75－65＝10(人)。

例 1-6 求 1 到 250 间能被 2、3、5 和 7 中任何一个整除的整数的个数。

解 设 A 表示 1 到 250 间能被 2 整除的整数集合，B 表示 1 到 250 间能被 3 整除的整数集合，C 表示 1 到 250 间能被 5 整除的整数集合，D 表示 1 到 250 间能被 7 整除的整数集合，用$\lfloor x \rfloor$表示对 x 取整，如$\lfloor 4.5 \rfloor=4$。

$$|A|=\left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor=125$$

$$|B|=\left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor=83$$

$$|C|=\left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor=50$$

$$|D|=\left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor=35$$

$$|A\cap B|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 3} \right\rfloor=41$$

$$|A\cap C|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 5} \right\rfloor=25$$

$$|A\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 7} \right\rfloor=17$$

$$|B\cap C|=\left\lfloor \frac{250}{3\times 5} \right\rfloor=16$$

$$|B\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{3\times 7} \right\rfloor=11$$

$$|C\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{5\times 7} \right\rfloor=7$$

$$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 5} \right\rfloor=8$$

$$|A\cap B\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 7} \right\rfloor=5$$

$$|A\cap C\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 5\times 7} \right\rfloor=3$$

$$|B\cap C\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{3\times 5\times 7} \right\rfloor=2$$

$$|A\cap B\cap C\cap D|=\left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor=1$$

于是有

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D|&=125+83+50+35-41-25-17-16-11-7+8\\&\quad+5+3+2-1\\&=193\end{aligned}$$