第 1 章

集　合

1.1 内容提要

1.1.1 集合的基本概念

集合是具有某种特点的研究对象的聚合，其中每一个对象称为这个集合的元素。通常用大写的英文字母 $A,B,\cdots$ 表示集合，用小写的英文字母 $a,b,\cdots$ 表示集合中的元素。当 a 是集合 A 中的元素时，称 a 属于 A，并记作 $a\in A$，否则记作 $a\notin A$。

1. 集合的表示方法

(1) 列举法。这种表示方法是把集合中的所有元素一一列举出来，元素间用逗号分开，并用花括号把它们括起来。如：

$$A=\{2,3,5,7,11,13\}$$

(2) 特征法。特征法是以某个小写的英文字母统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如：

$$B=\{x \mid x\text{ 是小于 15 的素数}\}$$

当两个集合 P 和 Q 有同样的元素时，称这两个集合相等，记作 $P=Q$。

显而易见，上面提到的集合 A 和 B 是相等的，即有 $A=B$。

2. 子集、全集与补集

如果集合 A 中每一个元素又都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，并记作

$$B\supseteq A \text{ 或 } A\subseteq B$$

如果 A 是 B 的子集，且 B 中总有一些元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，并记作

$$B\supset A \text{ 或 } A\subset B$$

由子集的定义可得：

定理 1.1.1 集合 A 和集合 B 相等的充分必要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

不含有任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$。

由空集的定义可知，空集是任何集合的子集。

当研究对象总是限制在某个集合时，这个集合称为全集，记作 U。

由属于全集 U，但不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为 A 的补集，记作 $\overline{A}$ 或 $\sim A$。

3. 幂集

由集合 A 中所有子集作为元素构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。例如

$$A=\{1,2\}$$

则

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

定理 1.1.2 设 A 是有限集，且 A 中含有 n 个元素，则幂集 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

有限集 A 中元素个数称为 A 的基，记作 $|A|$，所以当 $|A|=n$ 时，$|P(A)|=2^n$。

1.1.2 集合的基本运算

1. 并运算

定义 1.1.1 集合 A 和 B 的并记作 $A\cup B$，它也是一个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素合并在一起构成的，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

2. 交运算

定义 1.1.2 两个集合 A 和 B 的交记作 $A\cap B$，它也是一个集合，由属于 A，B 两集合的所有共同元素构成，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

3. 减运算

定义 1.1.3 由属于集合 A 但不属于集合 B 的那些元素构成的集合称为 A 减 B 的差，记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

4. 对称差

定义 1.1.4 集合 A 和 B 的对称差记作 $A\oplus B$，它是个集合，其元素或属于 A，或属于 B，但不能既属于 A 又属于 B，即

$$\begin{aligned}A\oplus B&=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B,\text{但 }x\notin A\cap B\}\\&=(A\cup B)-(A\cap B)\end{aligned}$$

5. 集合运算的常用公式

(1) $A\cup A=A$

$A\cap A=A$

(2) $A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(3) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) $A\cup U=U$

$A\cap U=A$

(5) $A\cup\varnothing=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(7) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

(8) $A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

(9) $A-B=A\cap\overline{B}$

(10) $A\oplus B=B\oplus A$

(11) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

(12) $A\oplus A=\varnothing$

(13) $A\oplus\varnothing=A$

(14) $A\oplus U=\overline{A}$

(15) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

1.1.3 包含排斥原理

设 A 和 B 是有限集，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

上式就是关于两个集合的包含排斥原理。对于3个集合，则有

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

一般情况下有

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

本章的重点：熟练掌握集合的基本运算，熟记集合运算中的常用公式，并能熟练地运用常用公式证明、求解和分析问题；能求出给定集合的幂集；并能利用包含排斥原理求解一些简单的组合计数问题。

本章的难点：集合的对称差运算，包含排斥原理的运用。

1.2 例题分析

例1.1 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，求其幂集 $P(A)$。

解 这里将给出一种与《离散数学(第二版)》教材不同的求解方法。

易知，当集合 A 中含有4个元素时，其幂集 $P(A)$ 含有 2^4 个元素。因此可以把幂集 $P(A)$ 中的元素与4位二进制序列(0000～1111)建立一一对应关系，从而方便地求得

幂集。

具体的做法是：先把集合 A 中的元素确定一种排列顺序，在本例中，集合 A 中元素的排列顺序为 1,2,3,4。其幂集 $P(A)$中的元素与 4 位二进制序列的一一对应关系如下：

1 2 3 4		$P(A)$ 中的元素
0 0 0 0	→	$\varnothing$
0 0 0 1	→	$\{4\}$
0 0 1 0	→	$\{3\}$
0 0 1 1	→	$\{3,4\}$
	⋮	
1 1 1 0	→	$\{1,2,3\}$
1 1 1 1	→	$\{1,2,3,4\}$

如果把 $P(A)$中与 4 位二进制序列 k 所对应的元素记作 A_k，则

$P(A)=\{A_{0000},A_{0001},A_{0010},A_{0011},A_{0100},A_{0101},A_{0110},A_{0111},A_{1000},A_{1001},A_{1010},A_{1011},A_{1100},A_{1101},A_{1110},A_{1111}\}$，即有

$$P(A)=\{\varnothing,\{4\},\{3\},\{3,4\},\{2\},\{2,4\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{1\},\{1,4\},\{1,3\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,2,3,4\}\}$$

例 1.2 设 $\mathbf{I}_+$ 是正整数集合，集合 A,B,C 分别为：

$$A=\{x \mid x=k\pi,k\in\mathbf{I}_+\}$$

$$B=\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{I}_+\right\}$$

$$C=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+2\pi,k\in\mathbf{I}_+\right\}$$

求下列运算结果：

(1) $A\cap B\cap C$

(2) $(A\cup B)-C$

(3) $A-(B\cup C)$

(4) $C-(A\oplus B)$

解 为了便于运算，把集合 A,B,C 用列举法表示为：

$$A=\{\pi,2\pi,3\pi,\cdots\}$$

$$B=\left\{2\pi+\frac{\pi}{2},4\pi+\frac{\pi}{2},6\pi+\frac{\pi}{2},\cdots\right\}$$

$$C=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi,3\pi,\frac{\pi}{2}+3\pi,\cdots\right\}$$

由此可知

(1) $A\cap B\cap C=\varnothing$

(2) $(A\cup B)-C=\{\pi,2\pi\}$

(3) $A-(B\cup C)=\{\pi,2\pi\}$

(4) 易见，$A\cap B=\varnothing$，所以

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

$$= A \cup B$$
$$= \left\{\pi, 2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 3\pi, 4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \cdots\right\}$$

于是可得

$$C - (A \oplus B) = \left\{3\pi + \frac{\pi}{2}, 5\pi + \frac{\pi}{2}, 7\pi + \frac{\pi}{2}, \cdots\right\}$$
$$= \left\{x \mid x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{I}_+\right\}$$

例 1.3 证明下列等式：

(1) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

(2) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$

(3) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

(4) $A\cup(B-C)=(A\cup B)-(C-A)$

(5) $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B)=A\cup B$

证明 (1) $(A-B)-C=(A\cap\overline{B})-C$
$$=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}$$
$$=A\cap(\overline{B\cup C})$$
$$=A-(B\cup C)$$

(2) $A-(B-C)=A-(B\cap\overline{C})$
$$=A\cap(\overline{B\cap\overline{C}})$$
$$=A\cap(\overline{B}\cup C)$$
$$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap C)$$
$$=(A-B)\cup(A\cap C)$$

(3) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\overline{C}$
$$=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})$$
$$=(A-C)\cup(B-C)$$

(4) $A\cup(B-C)=A\cup(B\cap\overline{C})$
$$=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C})$$
$$=(A\cup B)\cap(\overline{\overline{A\cup\overline{C}}})$$
$$=(A\cup B)\cap(\overline{\overline{A}\cap C})$$
$$=(A\cup B)-(\overline{A}\cap C)$$
$$=(A\cup B)-(C-A)$$

(5) 左式$=(A-B)\cup((B-A)\cup(A\cap B))$
$$=(A-B)\cup((B\cap\overline{A})\cup(A\cap B))$$
$$=(A-B)\cup(B\cap(\overline{A}\cup A))$$
$$=(A-B)\cup B$$
$$=(A\cap\overline{B})\cup B$$
$$=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)$$
$$=A\cup B$$

【注意】 下面给出例 1.4 和例 1.5 有一定难度的证明题，看在证明过程中是如何运用公式的，特别是分配律的使用。

例 1.4 证明下列等式：

(1) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$

(2) $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)=(A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$

证明 (1) 利用并运算的可交换性可知

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= ((A-B)\cup(A\cap B\cap C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= ((A\cap\bar{B})\cup(A\cap B\cap C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap(\bar{B}\cup(B\cap C)))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap((\bar{B}\cup B)\cap(\bar{B}\cup C)))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap(\bar{B}\cup C))\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)\cup(B-C)\cup(C-A)\\
&= (A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\\
&= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C\cap(A\cup\bar{A}))\\
&= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{C})\cup C\\
&= (A\cap\bar{B})\cup((B\cup C)\cap(\bar{C}\cup C))\\
&= (A\cap\bar{B})\cup B\cup C\\
&= ((A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B))\cup C\\
&= A\cup B\cup C
\end{aligned}
$$

(2) 利用减法公式和分配律可知

$$
\begin{aligned}
\text{左式} &= (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{C})\cup(C-A)\\
&= (((A\cap\bar{B})\cup B)\cap((A\cap\bar{B})\cup\bar{C}))\cup(C-A)\\
&= (((A\cup B)\cap(\bar{B}\cup B))\cap((A\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C})))\cup(C-A)\\
&= ((A\cup B)\cap(A\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C}))\cup(C\cap\bar{A})\\
&= ((A\cup B)\cup(C\cap\bar{A}))\cap((A\cup\bar{C})\cup(C\cap\bar{A}))\cap((\bar{B}\cup\bar{C})\cup(C\cap\bar{A}))\\
&= (A\cup B\cup C)\cap(A\cup B\cup\bar{A})\cap(A\cup\bar{C}\cup C)\cap(A\cup\bar{C}\cup\bar{A})\\
&\quad\cap(\bar{B}\cup\bar{C}\cup C)\cap(\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{A})\\
&= (A\cup B\cup C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})
\end{aligned}
$$

例 1.5 证明下列等式：

(1) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

(2) $\overline{A\oplus B}=\bar{A}\oplus B$

(3) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

(4) $(A\oplus B)\cap(A\oplus C)=((B\cap C)-A)\cup(A-(B\cup C))$

证明 (1) 由对称差定义可知

$$
\begin{aligned}
A\oplus B &= (A\cup B)-(A\cap B)\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\\
&= (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\\
&= ((A\cup B)\cap\bar{A})\cup((A\cup B)\cap\bar{B})
\end{aligned}
$$

$$=(A\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{B})$$
$$=(A-B)\cup(B-A)$$

(2) 由于 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$,所以

$$\begin{aligned}\overline{A\oplus B}&=\overline{(A-B)\cup(B-A)}\\&=(\overline{A-B})\cap(\overline{B-A})\\&=(\overline{A\cap\overline{B}})\cap(\overline{B\cap\overline{A}})\\&=(\overline{A}\cup B)-(B\cap\overline{A})\\&=\overline{A}\oplus B\end{aligned}$$

(3) 右式$=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

$$\begin{aligned}&=((A\cap B)-(A\cap C))\cup((A\cap C)-(A\cap B))\\&=(A\cap B\cap(\overline{A\cap C}))\cup(A\cap C\cap(\overline{A\cap B}))\\&=(A\cap B\cap(\overline{A}\cup\overline{C}))\cup(A\cap C\cap(\overline{A}\cup\overline{B}))\\&=(A\cap B\cap\overline{A})\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{A})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\&=(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap C\cap\overline{B})\\&=A\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}))\\&=A\cap((B-C)\cup(C-B))\\&=A\cap(B\oplus C)=\text{左式}\end{aligned}$$

(4) 左式$=(A\oplus B)\cap(A\oplus C)$

$$\begin{aligned}&=((A\cup B)-(A\cap B))\cap((A\cup C)-(A\cap C))\\&=(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})\cap(A\cup C)\cap(\overline{A\cap C})\\&=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{C})\\&=(A\cup(B\cap C))\cap(\overline{A}\cup(\overline{B}\cap\overline{C}))\\&=((A\cup(B\cap C))\cap\overline{A})\cup((A\cup(B\cap C))\cap(\overline{B}\cap\overline{C}))\\&=((B\cap C)\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=((B\cap C)\cap\overline{A})\cup(A\cap(\overline{B\cup C}))\\&=((B\cap C)-A)\cup(A-(B\cup C))\end{aligned}$$

集合的对称差运算是学习本章的难点之一。由对称差运算的定义可知

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

或可写成

$$A\oplus B=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$$

由例 1.5 中(1)等式可知

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

或可写成

$$A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$$

由此得到对称差运算的 4 种表示方式。针对不同的问题,采用合适的表示方式,往往能使证明过程得到简化。

例 1.6 证明$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=(A-(B\cap C))\cup((B\cup C)-A)$。

证明 由于题中的左式为对称差的"并"，所以对称差也采用"并"的表示方式。即

$$\begin{aligned}
\text{左式}&=(A-B)\cup(B-A)\cup(A-C)\cup(C-A)\\
&=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(A\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{A})\\
&=(A\cap(\bar{B}\cup\bar{C}))\cup((B\cup C)\cap\bar{A})\\
&=(A\cap(\overline{B\cap C}))\cup((B\cup C)\cap\bar{A})\\
&=(A-(B\cap C))\cup((B\cup C)-A)
\end{aligned}$$

例 1.7 设 A,B,C 是集合，证明

(1) 如果 $A\oplus B=\varnothing$，则 $A=B$；

(2) 如果 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$；

(3) 如果$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=\varnothing$，则 $A=B=C$。

证明 (1) 因为 $A\oplus B=\varnothing$，所以

$$(A-B)\cup(B-A)=\varnothing$$

即有

$$A-B=\varnothing \quad \text{和} \quad B-A=\varnothing$$

也即有

$$B\supseteq A \quad \text{和} \quad A\supseteq B$$

由此证得 $A=B$。

(2) 由于 $A\oplus A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=\varnothing$，所以

$$A\oplus A\oplus B=A\oplus A\oplus C$$

$$\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$$

而$\varnothing\oplus B=(\varnothing\cup B)-(\varnothing\cap B)=B$，同样有$\varnothing\oplus C=C$，由此得证。

(3) 由于$(A\oplus B)\cup(A\oplus C)=\varnothing$，所以

$$A\oplus B=\varnothing \quad \text{和} \quad (A\oplus C)=\varnothing$$

即有

$$A=B \quad \text{和} \quad A=C$$

由此证得 $A=B=C$。

例 1.8 某班有学生 72 人，其中选学英语的有 30 人，选学日语的有 36 人，选学法语的有 29 人；兼学英语和日语的有 12 人；三门外语都选学的有 5 人；仅选法语的有7 人。问这 3 门外语都不学的人数是多少？

解 设 A 表示选学英语学生的集合，B 表示选学日语学生的集合，C 表示选学法语学生的集合。

由题设可知，$|A|=30$，$|B|=36$，$|C|=29$，$|A\cap B|=12$，$|A\cap B\cap C|=5$。

由于仅仅学习法语的人数为 7，所以

$7=|C|-(|C\cap B|-|A\cap B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|)-|A\cap B\cap C|$

其中括号中的内容$|C\cap B|-|A\cap B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|$表示仅仅学习法语和日语两种外语的人数以及仅仅学习法语和英语两种外语的人数。由此可得

$$|B\cap C|+|A\cap C|=27$$

再由包含排斥原理可得

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|\\ &\quad -|A\cap C|+|A\cap B\cap C|\\ &= 30+36+29-12-27+5\\ &= 61\end{aligned}$$

所以这3门外语都不学的人数为 $72-61=11$(人)。

1.3 习题与解答

1. 用列举法表示下列集合:

(1) 小于20的素数集合;

(2) $\{x|x$ 是正整数,$x^2<50\}$;

(3) $\{x|x^2-5x+6=0\}$。

解 (1) $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$;

(2) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$;

(3) $\{2,3\}$。

2. 用特征法表示下列集合:

(1) $\{1,3,5,7,\cdots,99\}$;

(2) $\{5,10,15,\cdots,100\}$;

(3) $\{1,4,9,16,25\}$。

解 (1) $\{x|x$ 是正奇数,$x\leqslant 99\}$;

(2) $\{x|x=5k,k$ 是正整数,$k\leqslant 20\}$;

(3) $\{x|x=k^2,k$ 是正整数,$k\leqslant 5\}$。

3. 设 A,B,C 是集合,确定下列命题是否正确,说明理由:

(1) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;

(2) 如果 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$;

(3) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$,则 $A\in C$;

(4) 如果 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$,则 $A\subseteq C$。

解 (1) 不一定正确。例如,$A=\{a\}$,$B=\{\{a\},b\}$,$C=\{\{a\},b,c\}$。易见,$A\in B$,$B\subset C$,但 $A\not\subseteq C$。

(2) 正确。由于 $B\subseteq C$,即 B 是 C 的子集,所以 B 中元素都属于 C,而 $A\in B$,所以 A 是集合 B 的元素,由此可见,$A\in C$。

(3) 不一定正确。例如,$A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{\{a,b\}\}$。易见,$A\subset B$,$B\in C$,但 $A\notin C$。

(4) 不一定正确。例如,$A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{\{a,b\}\}$。易见,$A\subset B$,$B\in C$,但 $A\not\subseteq C$。

4. 确定下列命题是否正确。

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$;

(2) $\varnothing \in \varnothing$；

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$；

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$。

解 (1) 正确；

(2) 不正确；

(3) 正确；

(4) 正确。

5. 设 A,B,C 是集合，问以下问题是否成立。

(1) 如果 $A \notin B$ 且 $B \notin C$，是否一定有 $A \notin C$？

(2) 如果 $A \in B$ 且 $B \notin C$，是否一定有 $A \notin C$？

(3) 如果 $A \subset B$ 且 $B \notin C$，是否一定有 $A \notin C$？

解 (1) 不一定。例如，$A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{a\}\}$。易见，$A \notin B$ 且 $B \notin C$，但 $A \in C$。

(2) 不一定。例如，$A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{\{a\},c\}$。易见，$A \in B$，$B \notin C$，但 $A \in C$。

(3) 不一定。例如，$A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{\{a\},b\}$。易见，$A \subset B$，$B \notin C$，但 $A \in C$。

6. 求下列集合的幂集：

(1) $\{a,b,c,d\}$；

(2) $\{a,b,\{a,b\}\}$；

(3) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$。

解 (1) $\{a,b,c,d\}$ 的幂集为 $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$。

(2) $\{a,b,\{a,b\}\}$ 的幂集为 $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{\{a,b\}\},\{a,b\},\{a,\{a,b\}\},\{b,\{a,b\}\},\{a,b,\{a,b\}\}\}$。

(3) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$ 的幂集为 $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing,a\},\{\varnothing,\{a\}\},\{a,\{a\}\},\{\varnothing,a,\{a\}\}\}$。

7. 设集合 A,B,C 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 的子集，且

$$A=\{1,3,5,7\}$$
$$B=\{i \mid i^2<50\}$$
$$C=\{i \mid i \text{ 能整除 } 30\}$$

求下列集合：

(1) $A \cup B$；

(2) $A \cup (B \cap C)$；

(3) $B-(A \cap C)$；

(4) $(A \cup B)-(B \cap C)$；

(5) $\overline{A} \cap B$。

解 (1) $A \cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$；

(2) $A \cup (B \cap C)=\{1,2,3,5,6,7\}$；

(3) $B-(A \cap C)=\{0,2,4,6,7\}$；

(4) $(A \cup B)-(B \cap C)=\{0,4,7\}$；