(2) 若 x 不是 A 中的元素，则称 x **不属于** A，记为 $x \notin A$.

显然，这样的集合 A 有一个明确的边界.

思考 班上的所有高个子同学看作一个整体时是一个**模糊集合**(fuzzy set)[1]，你能想出描述它的方法吗？

常见的数的集合(用黑正体字母表示)有：$\mathbf{N}$ 是自然数集合，包括数 0；$\mathbf{Z}$ 是整数集合；$\mathbf{Q}$ 是有理数集合；$\mathbf{R}$ 是实数集合；$\mathbf{C}$ 是复数集合.

表示集合的常用方法有下面几种：

(1) 列举法　将集合中的元素按一定规律列举出来，元素之间用逗号隔开，如小于 10 的偶自然数组成的集合为 $\{0,2,4,6,8\}$，自然数集合 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$. 这种表示方法适用于元素个数有限或元素出现的规律性很强(元素可列)的集合.

(2) 描述法　这种方法用得最多，它只需把集合中元素满足的条件描述出来即可，一般形式是 $\{x \mid x$ 满足的条件$\}$. 例如小于 10 的偶自然数组成的集合可表示为 $\{x \mid x$ 是自然数且 x 是偶数且 x 小于 $10\}$.

鉴于递归(recursive)法在本书后面章节的讨论中要用到，更主要的是这种定义方法在研究递归函数以及程序设计中函数的递归调用等内容时的重要作用，下面简单介绍递归法，又称为归纳(inductive)法[2].

(3) 递归法　首先给出这个集合的初始元素；然后给出由集合中已知元素构造其他元素的方法；最后强调，有限次使用前面的步骤得到的元素是集合中仅有的元素.

【例 1-1】 自然数集合 $\mathbf{N}$ 可以递归定义如下：

首先，$0 \in \mathbf{N}$；

其次，若 $n \in \mathbf{N}$，则 n 的后继 $n+1 \in \mathbf{N}$；

最后，有限次使用前面的步骤得到的元素是集合 $\mathbf{N}$ 中仅有的元素.

集合的递归定义中，最后步骤很重要，它强调除有限次使用前面的步骤得到的元素是集合中元素外，不含有别的元素. 不过，请大家注意递归与递推的区别及联系，参见文献[3].

在计算机科学中，还可以用别的方法定义集合，例如定义一种程序设计语言的语法时采用的 BNF 范式法等.

若集合 A 是有限集合，则用 $|A|$ 表示集合 A 中的**元素个数**.

需要注意的是，集合中的元素又可以是集合. 例如 $A=\{a,\{a,b\},b,c\}$，这时 $|A|=4$，即 A 中有 4 个元素，分别是 $a,\{a,b\},b,c$.

思考 所有不以自身为元素的集合能构成集合吗？

这是一个著名的罗素(B. A. M. Russell)悖论. 所谓悖论，就是逻辑上不一致. 假设存在这样的集合 A，则无论 $A \in A$ 或 $A \notin A$ 都是矛盾的. 避免这种悖论的方法是指定全集[4]，这就是强调全集的重要性. 而信息科学中出现的集合不会有悖论，因此本书不讨论公理化集合论.

在没有特别说明的情况下，集合之间的元素是没有次序的，前面的集合 A 也可以记为 $A=\{a,b,c,\{a,b\}\}$ 等. 同时，若没有特别说明，所讨论的集合不是多重集，即集合中的元素原则上不重复，所以集合 $\{a,\{a,b\},b,b,c\}$ 就是集合 A.

把不含有任意元素的集合称为**空集**(empty set)，记为$\varnothing$或$\{\ \}$.

1.1.2　子集

【定义 1-1】　给定两个集合 A 和 B，若 A 中的任意元素都属于 B，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，或称 A 包含在 B，或称 B 包含 A，记为 $A\subseteq B$.

若 A 不是 B 的子集，这时集合 A 中至少有一个元素不属于 B.

显然有下面的定理成立.

【定理 1-1】　对于任意的集合 A，有$\varnothing\subseteq A$.

若两个集合 A，B 有完全相同的元素，则称这两个集合**相等**，记为 $A=B$.

我们有下述结论.

【定理 1-2】　设 A，B，C 是任意集合，下列结论成立.

(1) $A\subseteq A$；

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

我们知道，上述定理中结论(2)的逆也成立，这就是如下

【定理 1-3】　$A=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

该定理是证明两个集合相等的基本方法.

【定义 1-2】　若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**(proper subset)，记为 $A\subset B$.

需要注意“$\in$”与“$\subseteq$”的区别，前者讨论的是元素与集合的关系，后者讨论的是集合与集合的关系，参见下面的例子.

【例 1-2】　设 A，B，C 是任意集合，若 $A\subseteq B$，$B\in C$，是否必有 $A\subseteq C$?

解　不成立. 例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\{a,\{a,b,c\}\}$，这时有 $A\subseteq B$，$B\in C$，而因为 $b\notin C$，所以结论不成立.

1.1.3　幂集

【定义 1-3】　给定集合 X，由 X 的所有子集组成的集合称为 X 的**幂集**(power set)，记为 $P(X)$，即

$$P(X)=\{A\mid A\subseteq X\}$$

$P(X)$也可以记为 2^X，这种记法与下面的定理 1-4 有一定的关系.

【例 1-3】　设 $X=\{a,\{a,b\}\}$，计算 $P(X)$.

解　X 的子集有：空集$\varnothing$；由一个元素构成的子集$\{a\}$，$\{\{a,b\}\}$；由两个元素构成的子集$\{a,\{a,b\}\}$. 于是 $P(X)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a,b\}\},\{a,\{a,b\}\}\}$.

【定理 1-4】　若$|X|=n$，则$|P(X)|=2^n$.

证　$\varnothing$是 X 的一个子集；由 X 中一个元素构成的子集有 C_n^1 个；由 X 中两个元素构成的子集有 C_n^2 个；…；由 X 中 $n-1$ 个元素构成的子集有 C_n^{n-1} 个；由 X 中 n 个元素构成的子集有 C_n^n 个. 因此，由**加法原理**知 X 的子集合共有

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=(1+1)^n=2^n$$

上述定理也可以用**乘法原理**很方便证得.

1.1.4 *n* 元组

【定义 1-4】 论域 U 中选取的 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，按照一定顺序排列，就得到一个 n 元有序组，简称 n **元组**(ordered n-tuple)，记为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$.

在不强调排列的元素个数时，可以简称**元组**.

线性代数中的 n 维向量是 n 元组，有 n 个元素的字符串是 n 元组. n 元组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中，x_i称为第 i 分量或第 i 位置元素($1\leqslant i\leqslant n$)，它本身又可以是集合.

平面直角坐标系中任意一个点用 2 元组表示；空间直角坐标系中任意一个点用 3 元组表示.

n 元组在数据结构中是一个**线性表**.

显然，两个 n 元组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$相同的充要条件是其对应的分量元素相同，即 $x_i=y_i$，$1\leqslant i\leqslant n$. 特别地，2 元组(2，3)和(3，2)是不相同的，这一点可以在平面直角坐标系下直观地看出. 同时，$((a,b),c)$是 2 元组，它与 2 元组$(a,(b,c))$是不同的.

通常把 2 元组称为**有序对或序偶**(ordered pair).

1.1.5 笛卡儿积

【定义 1-5】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是集合，称集合$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的**笛卡儿积**(Cartesian product)、**直积**(product set)或称为**叉积**(cross product)，记为 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$.

笛卡儿积是以法国的 R. Cartesian(1596—1650)命名的.

由定义可知，笛卡儿积是一个集合，该集合中的元素是 n 元组. 为了方便，将 $\overbrace{A\times A\times\cdots\times A}^{n\text{个}}$记为 A^n.

【例 1-4】 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{\varnothing\}$，试分别计算 $A\times B$，$B\times A$，$B\times C$ 和 $C\times A\times B$.

解 $A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$，$B\times A=\{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b)\}$，

$B\times C=\{(1,\varnothing),(2,\varnothing)\}$，

$C\times A\times B=\{(\varnothing,a,1),(\varnothing,a,2),(\varnothing,b,1),(\varnothing,b,2)\}$.

根据定义有 $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$，一般来说 $A\times B\neq B\times A$.

容易证明：

【定理 1-5】 若$|A|=m$，$|B|=n$，则$|A\times B|=mn$.

习 题 1.1

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2-5x+6=0\}$；

(2) $\{2x\mid x\in\mathbf{N}\}$.

2. 比较集合$\varnothing$,$\{\varnothing\}$和$\{\{\varnothing\}\}$的不同之处.

3. 判定下列断言是否成立,说明理由:

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$;

(2) $\varnothing\in\varnothing$;

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$;

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

4. 设 A 和 B 是集合,试举出使 $A\in B$ 且 $A\subseteq B$ 同时成立的例子.

5. 对于任意集合 A,B,C,判定下列断言是否成立,说明理由:

(1) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,则 $A\notin C$;

(2) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,则 $A\subseteq C$;

(3) 若 $A\in B$ 且 $B\in C$,则 $A\in C$;

(4) 若 $A\in B$ 且 $B\in C$,则 $A\subseteq C$.

6. 分别计算:

(1) $P(P(\varnothing))$;

(2) $P(\{a, b, c\})$;

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})$.

7. 试用乘法原理证明定理 1-4.

8. 证明定理 1-5.

9. 设 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,试分别计算:

$$A\times A,A\times B,B\times A,A\times B\times A,(A\times B)\times A$$

10. 对于任意集合 A,B,C,由 $A\times B=A\times C$ 能否得出 $B=C$,为什么?若 $A\neq\varnothing$呢?

11. 设$|S|=n$,给出一种列出 S 的所有子集的方法.

1.2　映射的有关概念

1.2.1　映射的定义

映射就是函数,它也是现代数学中的基本概念,要求我们在各学科中都要会使用映射的观点.函数在信息科学中得到了充分的应用,大家熟悉的 C 语言是一种函数型语言.同时,借助于映射思想,可以得出一些较深入的结论.

与集合一样,映射贯穿本书的所有内容.深刻理解映射有关内容,对于其他内容的学习是至关重要的.当然,这部分内容本身是重点,也是难点.

【定义 1-6】 任意给定两个集合 A 和 B,若存在对应法则 f,使得对于任意 $x\in A$,均存在唯一的 $y\in B$ 与它对应,则称 f 是集合 A 到 B 的一个**映射**(mapping),或称其为 A 到 B 的一个**函数**(function),记为 $f:A\rightarrow B$(如图 1-2 所示).

有些映射可以采用解析表达式表示,如

$$f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R},y=f(x)=x^2+1$$

$$g:\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{N},y=g(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为奇数}\\ -1, & x\text{ 为偶数}\end{cases}$$

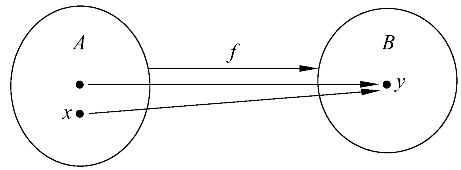

图 1-2

假定 A 是论域 U 上的集合，可以定义

$$\mu_A: U \to [0,1]$$

其中

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

这里 μ_A 称为集合 A 的特征函数.

函数符号，通常用一个英文字母 $f, g, h, F, G, H, \cdots$ 或希腊字母 $\varphi, \psi, \cdots$ 表示（可以带下标），也可以根据具体情况选用几个字母表示，如 sin，cos，tan，exp，max，min，….

假定 $f: A \to B$，$y = f(x)$，通常把 x 称为自变量，自变量的取值范围称为**定义域**（domain），记为 $\mathrm{dom} f$. 将 y 称为因变量，而把函数值所在范围称为**值域**（range），记为 $\mathrm{ran} f$.

这里讨论的映射有两个特点：

(1) 函数 f 的定义域是集合 A，因而这里定义的函数是全函数，否则是偏函数；

(2) 任意 $x \in A$，对应于 B 中唯一的元素 $f(x)$，$f(x)$ 称为 x 在映射 f 下的函数值（但不一定是数）或称为 x 在映射 f 下的像，通常记为 $y = f(x)$.

对于集合 A 和 B，用 B^A（读作"B 上 A"）表示 A 到 B 的所有映射组成的集合，即

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

【例 1-5】 若 $A = \{x_1, x_2, x_3\}$，$B = \{y_1, y_2\}$，求 B^A.

解 A 到 B 的映射为 f_i，$i = 1, 2, \cdots, 8$，其中：

$f_1(x_1) = y_1, f_1(x_2) = y_1, f_1(x_3) = y_1; f_2(x_1) = y_1, f_2(x_2) = y_1, f_2(x_3) = y_2;$

$f_3(x_1) = y_1, f_3(x_2) = y_2, f_3(x_3) = y_1; f_4(x_1) = y_1, f_4(x_2) = y_2, f_4(x_3) = y_2;$

$f_5(x_1) = y_2, f_5(x_2) = y_1, f_5(x_3) = y_1; f_6(x_1) = y_2, f_6(x_2) = y_1, f_6(x_3) = y_2;$

$f_7(x_1) = y_2, f_7(x_2) = y_2, f_7(x_3) = y_1; f_8(x_1) = y_2, f_8(x_2) = y_2, f_8(x_3) = y_2.$

【定理 1-6】 对于集合 A 和 B，若 $|A| = m$，$|B| = n$，则 $|B^A| = n^m$.

证 设 $f: A \to B$，对于任意的 $x \in A$，显然 $f(x)$ 可取 B 中 n 个元素中任意一个，而 $|A| = m$，根据乘法原理，结论成立.

【定义 1-7】 设 $f: A \to B$，令 $X \subseteq A$，用 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ 表示 X 在映射 f 下的**像**（image）. 令 $Y \subseteq B$，用 $f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}$ 表示 Y 在映射 f 下的**原像**（inverse image）.

注意 这里的 $f^{-1}(Y)$ 是一个整体记号.

在函数的定义中，假定 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，则任意 $x \in A$，有 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

其中 $x_i \in A_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. 这时，

$$f(x) = f((x_1, x_2, \cdots, x_n)) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

称 f 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 到 B 的 ***n* 元函数**(n-ary function).

显然，在 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中，参数位置是有次序的，我们不讨论无参函数.

如果 $f: \overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{n个} \to B$，则称 f 为 A 到 B 的 n 元函数.

函数可以递归定义，参见文献[5].

1.2.2　映射的性质

1. 单射

【定义 1-8】　假设 $f: A \to B$，如果对任意 $x_1, x_2 \in A$，由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可推出 $x_1 = x_2$，则称 f 是 A 到 B 的**单射**(injection)，或称 f 是 A 到 B 的一对一(one-to-one)映射.

等价地，对任意 $x_1, x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，可得出 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是 A 到 B 的单射，如图 1-3 所示.

【例 1-6】　设 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = 2x$，则 f 是 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的单射，试证明之.

证　对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$，由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可得出 $2x_1 = 2x_2$，进而 $x_1 = x_2$.

2. 满射

【定义 1-9】　假设 $f: A \to B$，如果对任意 $y \in B$，均存在 $x \in A$，使得 $y = f(x)$，则称 f 是 A 到 B 的**满射**(surjection)，或称 f 是 A 到 B 的映上(onto)的映射.

显然，f 是 A 到 B 的满射的充要条件是 f 的值域为 B，即 $\mathrm{ran} f = B$，如图 1-4 所示.

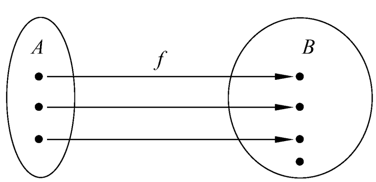

图　1-3

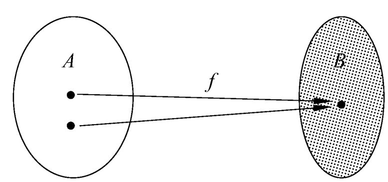

图　1-4

【例 1-7】　设 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}, f(x) = |x|$，则 f 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{N}$ 的满射，试证明之.

证　任意 $y \in \mathbf{N}$，取 $x = y \in \mathbf{Z}$，显然有 $y = f(x)$.

3. 双射

【定义 1-10】　假设 $f: A \to B$，若 f 既是单射又是满射，则称 f 是 A 到 B 的**双射**(bijection)，或称 f 是 A 到 B 的一一**对应**(one-to-one correspondence).

【例 1-8】　试建立一个 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一一对应.

解　令 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$，

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0 \\ 2|x| - 1, & x < 0 \end{cases}$$

很容易验证，f 是一个 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一一对应.

事实上，$\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{N}$ 的一一对应不是唯一的.

【例 1-9】 试建立一个 $(0,1)$ 到 $\mathbf{R}$ 的一一对应.

解 令 $f:(0,1)\to\mathbf{R}$，$f(x)=\tan(x-1/2)\pi$.

【定义 1-11】 若 A 是有限集合，通常把 A 到 A 的双射称为 A 上的**置换**(permutation).

【例 1-10】 写出 $A=\{1,2,3\}$ 上的所有置换.

解 $A=\{1,2,3\}$ 上的所有置换有 6 个，分别是：

$p_1(1)=1, p_1(2)=2, p_1(3)=3; p_2(1)=2, p_2(2)=1, p_2(3)=3;$

$p_3(1)=3, p_3(2)=2, p_3(3)=1; p_4(1)=1, p_4(2)=3, p_4(3)=2;$

$p_5(1)=2, p_5(2)=3, p_5(3)=1; p_6(1)=3, p_6(2)=1, p_6(3)=2.$

1.2.3 逆映射

【定义 1-12】 设 $f:A\to B$，若将对应关系 f 逆转过来，可得到一个集合 B 到集合 A 的映射，则该映射称为 f 的**逆映射**或**逆函数**，常称为**反函数**(invertible function)，记为 f^{-1}. A 到 B 的对应关系 f 如图 1-5(a)所示，其逆转如图 1-5(b)所示.

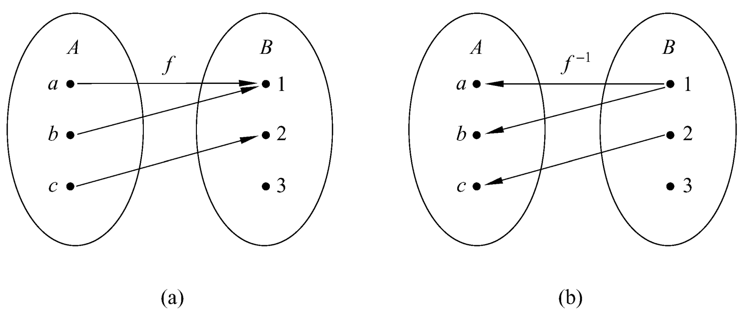

图 1-5

特别注意的是，若 $f:A\to B$，将对应关系 f 逆转后，不一定能得到 B 到 A 的映射(如图 1-5(b)所示). 要保证逆转后是 B 到 A 的映射，第一，f 必须是单射；第二，f 必须是满射. 于是有下述定理.

【定理 1-7】 设 $f:A\to B$，则 f 的逆映射存在的充要条件是 f 是双射.

回忆一下，在以前学习反函数时为何有一些限制条件，如正弦函数 $y=\sin x$，为了讨论其反函数，通常限制 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$，就是为了保证 $\sin:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ 是一个双射(一一对应).

显然，双射 $f:A\to B$ 的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 也是双射且 $(f^{-1})^{-1}=f$.

【例 1-11】 判定所给出的映射是否有逆映射，若有，请求出其逆映射.

(1) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$；

(2) $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g(x)=x^3$.

解 (1) 因为 $f(2)=f(-2)=4$，f 不是单射，所以 f 不存在逆映射.

(2) 显然，g 是双射，其逆映射为 $g^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$(如 $g(-3)=-27$，于是有 $g^{-1}(-27)=-3$).

1.2.4　复合映射

显然，我们有

【定理 1-8】　设 $f:A \to B$，$g:B \to C$，对于任意 $x \in A$，令 $h(x)=g(f(x))$，则 h 是集合 A 到集合 C 的映射.

于是有定义

【定义 1-13】　设 $f:A \to B$，$g:B \to C$，对任意 $x \in A$，$h(x)=g(f(x))$，则称 h 为 f 和 g 的**复合映射**或**复合函数**(composition of f and g)，记为 $f \circ g$.

映射 f 和 g 的复合映射 $f \circ g$ 可以按图 1-6 方式理解.

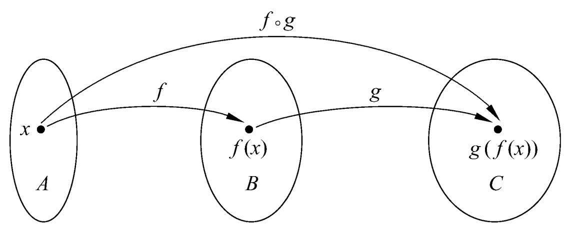

图　1-6

由复合函数的定义知，

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

注意到 f 和 g 的复合是记为 $f \circ g$，要求从左至右进行. 它与传统的两个函数复合的记号在次序上不尽一致，显得也不太自然，若将函数 f 对 x 的作用的方式写成 x^f 形式，则

$$x^{f \circ g} = (x^f)^g$$

就比较自然了.

之所以这样处理，是考虑到今后要定义的两个对象参加运算都是从左至右进行的(当然包括以前学过的运算).

【例 1-12】　设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，令 $f:A \to B$，$g:B \to C$，$f(a)=2$，$f(b)=3$，$f(c)=3$，$g(1)=\beta$，$g(2)=\alpha$，$g(3)=\delta$. 试计算复合映射 $f \circ g$.

解　复合映射 $f \circ g:A \to C$，$(f \circ g)(a)=g(f(a))=g(2)=\alpha$，$(f \circ g)(b)=g(f(b))=g(3)=\delta$，$(f \circ g)(c)=g(f(c))=g(3)=\delta$.

注意　复合映射又称为复合函数. 要保证复合映射 $f \circ g$ 有意义，必须

$$f(A) \subseteq \mathrm{dom}(g)$$

【例 1-13】　设 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 有两个映射 f 和 g，定义如下：$f(x)=x^2$，$g(x)=x+2$，试分别计算复合映射 $f \circ g$ 和 $g \circ f$.

解　对任意 $x \in \mathbf{R}$，分别有

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$$

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = g(x+2) = (x+2)^2$$

对于例 1-13 来说，计算两个函数的复合可以采用高等数学中的方法，要求计算 $g(f(x))$ 以及 $f(g(x))$ 更明确.

注意　一般说来，即使复合映射 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 均有意义，也不能保证 $f \circ g = g \circ f$ 成立.

设 A 是集合，令 $f:A\to A, f(x)=x$，称 f 为集合 A 上的**恒等映射**(identity function on A)，记为 I_A.

显然有下述结论：

【定理 1-9】 若 $f:A\to B$ 是双射，则有 $f\circ f^{-1}=I_A, f^{-1}\circ f=I_B$. 特别地，若 $f:A\to A$ 是双射，则 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$.

下面的定理讨论了映射的性质与复合映射之间的关系.

【定理 1-10】 设 $f:A\to B, g:B\to C$.

(1) 若 f 和 g 是单射，则 $f\circ g$ 是单射；

(2) 若 f 和 g 是满射，则 $f\circ g$ 是满射；

(3) 若 f 和 g 是双射，则 $f\circ g$ 是双射且 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

证 (1) 对任意 $x_1, x_2\in A$，假定 $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$，即 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$. 已知 g 是单射，于是有 $f(x_1)=f(x_2)$. 由于 f 是单射，所以 $x_1=x_2$. 进而 $f\circ g$ 是单射.

(2)和(3)作为练习.

【定理 1-11】 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$,

(1) 若 $f\circ g$ 是单射，则 f 是单射但 g 不一定；

(2) 若 $f\circ g$ 是满射，则 g 是满射而 f 不一定.

证 (1) 作为练习.

(2) 对于任意 $z\in C$，由于 $f\circ g$ 是满射，必存在 $x\in A$，使得 $(f\circ g)(x)=g(f(x))=z$. 令 $y=f(x)\in B$，有 $g(y)=z$，因此，g 是满射.

设 $A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3\}, C=\{\alpha,\beta\}$，令 $f:A\to B, g:B\to C$, $f(a)=2, f(b)=3, f(c)=3, g(1)=\beta, g(2)=\alpha, g(3)=\beta$. 这时，$(f\circ g)(a)=g(f(a))=\alpha$, $(f\circ g)(b)=g(f(b))=\beta$，显然有 $\mathrm{ran}(f\circ g)=\{\alpha,\beta\}$，$f\circ g$ 是满射. 而 $\mathrm{ran}\ f=\{2,3\}$，f 不是满射.

下面的定理会经常使用.

【定理 1-12】 设 $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$，则 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

证 对任意 $x\in A$，由于 $((f\circ g)\circ h)(x)=h[(f\circ g)(x)]=h[g(f(x))]$，而 $(f\circ(g\circ h))(x)=(g\circ h)(f(x))=h[g(f(x))]$，由此可见，$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$. 所以 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

注意 由定理 1-12 可知，多个函数求复合时可以不加括号，即 $f\circ g\circ h=(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

习 题 1.2

1. 下列映射中，哪些是双射？说明理由.

(1) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}, f(x)=3x$；

(2) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}, f(x)=|x|+1$；

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^3+1$；

(4) $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1$；

(5) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}, f(x)=(x,x+1)$.

2. 对于有限集合 A 和 B，假定 $f:A\to B$ 且 $|A|=|B|$，证明：f 是单射的充要条件是 f 是满射. 对于无限集合，上述结论成立吗？举例说明.

3. 设 $f:A\to B$，试证明：

(1) $f\circ I_B=f$；

(2) $I_A\circ f=f$.

特别地，若 $f:A\to A$，则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

4. 试举出一个例子说明 $f\circ f=f$ 成立，其中 $f:A\to A$ 且 $f\neq I_A$. 若 f 的逆映射存在，满足条件的 f 还存在吗？

5. 设 $f:A\to B, g:B\to C$. 若 f 和 g 是满射，则 $f\circ g$ 是满射，试证明.

6. 设 $f:A\to B, g:B\to C$. 试证明：若 $f\circ g$ 是单射，则 f 是单射. 试举例说明，这时 g 不一定是单射.

7. 设 $f:A\to B$，若存在 $g:B\to A$，使得 $f\circ g=I_A$ 且 $g\circ f=I_B$，试证明：f 是双射且 $f^{-1}=g$.

8. 设 $f:A\to B, g:B\to C$. 若 f 和 g 是双射，则 $f\circ g$ 是双射且 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

9. 设 G 是集合 A 到 A 的所有双射组成的集合，证明：

(1) 任意 $f,g\in G$，有 $f\circ g\in G$；

(2) 对于任意 $f,g,h\in G$，有 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$；

(3) $I_A\in G$ 且对于任意 $f\in G$，有 $I_A\circ f=f\circ I_A=f$；

(4) 对于任意 $f\in G$，有 $f^{-1}\in G$ 且 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$.

10. 若 $A=\{a, b, c\}, B=\{1, 2\}$，问 A 到 B 的满射、单射、双射各有多少个？试推广你的结论.

11. 设 A, B, C, D 是任意集合，f 是 A 到 B 的双射，g 是 C 到 D 的双射，令 $h:A\times C\to B\times D$，对任意 $(a,c)\in A\times C$，$h(a,c)=(f(a),g(c))$. 证明：h 是双射.

12. 设 $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to A$，若 $f\circ g\circ h=I_A, g\circ h\circ f=I_B, h\circ f\circ g=I_C$，则 f,g,h 均可逆，并求出 f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}.

13. 已知阿克曼(Ackermann)函数 $A:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的定义为：

(1) $A(0,n)=n+1, n\geqslant 0$；

(2) $A(m,0)=A(m-1,1), m>0$；

(3) $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1)), m>0, n>0$.

分别计算 $A(2,3)$ 和 $A(3,2)$.

1.3　运算的定义及性质

运算是讨论对象之间有何联系的一种方法. 其实，已经接触过很多运算，如数之间的加法运算、多项式之间的乘法运算、矩阵的逆运算、向量的线性运算等. 在讨论离散数据结构时也会经常遇到各种各样的运算，如在下节即将研究的集合间的运算.

虽然运算本质上是映射，但研究的侧重点不同，在运算中更注重于运算满足的一些运算性质，而根据这些性质可以对一些离散对象分门别类进行讨论.

因此，有必要先把运算的一般定义及其性质进行讨论.