(4) 若 $A\in B$ 且 $B\in C$,则 $A\subseteq C$

解 (1) 不成立.例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\{a,b,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\in C$.

(2) 不成立.例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\{b,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\subseteq C$ 不成立.

(3) 不成立.例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{\{a,b\},c\}$,$C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\notin C$.

(4) 不成立.例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{\{a,b\},c\}$,$C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\subseteq C$ 不成立.

6. 分别计算:

(1) $P(P(\varnothing))$

(2) $P(\{a, b, c\})$

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})$

解 (1) 因为 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$,所以 $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(2) $P(\{a, b, c\})=\{\varnothing, \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})=\{\varnothing, \{\{a,b,c\}\}\}$

7. 试用乘法原理证明定理 1-4.

证 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,对于 S 的任意子集 A,S 中的元素 x_1 可以属于 A,也可以不属于 A,有 2 种选取方式;同样,在元素 x_1 定下来以后,再考虑 S 中的元素 x_2,它可以属于 A,也可以不属于 A,有 2 种选取方式;…一直下去,对于 S 中的最后一个元素 x_n,它可以属于 A,也可以不属于 A,有 2 种选取方式.于是,根据乘法原理知,S 的子集共有 $\overbrace{2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2}^{n\text{个}}=2^n$ 个.

8. 证明定理 1-5.

证 根据笛卡儿积的定义知,$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$.由于这样的有序对 (x,y) 的第一位置元素 $x\in A$ 有 m 种选取方式,第二位置元素 $y\in B$ 有 n 种选取方式,因此根据乘法原理,$A\times B$ 中的有序对共有 mn 个,所以 $|A\times B|=mn$.

9. 设 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,试计算:

$$A\times A, A\times B, B\times A, A\times B\times A, (A\times B)\times A$$

解 计算结果分别为

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$A\times B\times A=\{(a,1,a),(a,1,b),(a,2,a),(a,2,b),(a,3,a),(a,3,b),$
$(b,1,a),(b,1,b),(b,2,a),(b,2,b),(b,3,a),(b,3,b)\}$

$(A\times B)\times A=\{((a,1),a),((a,1),b),((a,2),a),((a,2),b),((a,3),a),((a,3),b),$
$((b,1),a),((b,1),b),((b,2),a),((b,2),b),((b,3),a),((b,3),b)\}$.

10. 对于任意集合 A,B,C,由 $A\times B=A\times C$ 能否得出 $B=C$,为什么?若 $A\neq\varnothing$ 呢?

解　若 $A=\varnothing$,取 $B=\{a,b\}$,$C=\{c,d\}$,根据笛卡儿积的定义知 $A\times B=\varnothing$ 且 $A\times C=\varnothing$,这时 $A\times B=A\times C$,但 $B\neq C$.

若 $A\neq\varnothing$,则存在元素 $a\in A$,这时由 $A\times B=A\times C$ 可以得出 $B=C$;对于任意 $x\in B$,因为 $(a,x)\in A\times B$,所以 $(a,x)\in A\times C$,根据笛卡儿积的定义知 $x\in C$,即有 $B\subseteq C$. 同理可得 $C\subseteq B$. 故 $B=C$.

11. 设 $|S|=n$,给出一种列出 S 的所有子集的方法.

解　设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,将 S 的所有子集 A 用长度为 n 的 0,1 字符串表示,其中字符串的第 i 位取 1 的充要条件是 $x_i\in A$.

于是,可以按从小到大的顺序列出所有长度为 n 的 0,1 字符串,再写出对应的子集,就可以将 S 的所有子集 A 列举出来.

注:此方法可用计算机实现.

1.2　映射的有关概念

【习题 1.2】

1. 下列映射中,哪些是双射?说明理由.

(1) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,$f(x)=3x$.

(2) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$,$f(x)=|x|+1$.

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=x^3+1$.

(4) $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,$f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1$.

(5) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$,$f(x)=(x,x+1)$.

解　(1) 对于任意对 $x_1,x_2\in\mathbf{Z}$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $3x_1=3x_2$,于是 $x_1=x_2$,所以 f 是单射. 由于对任意 $x\in\mathbf{Z}$,$f(x)\neq 2\in\mathbf{Z}$,因此 f 不是满射,进而 f 不是双射.

(2) 由于 $2,-2\in\mathbf{Z}$ 且 $f(2)=f(-2)=3$,因此 f 不是单射. 又由于 $0\in\mathbf{N}$,而任意 $x\in\mathbf{Z}$ 均有 $f(x)=|x|+1\neq 0$,于是 f 不是满射. 显然,f 不是双射.

(3) 对于任意对 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1^3+1=x_2^3+1$,于是 $x_1=x_2$,所以 f 是单射. 对于任意 $y\in\mathbf{R}$,取 $x=(y-1)^{1/3}$,这时

$$f(x)=x^3+1=[(y-1)^{1/3}]^3+1=(y-1)+1=y$$

所以 f 是满射. 进而 f 是双射.

(4) 由于 $(1,2),(2,1)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 且 $(1,2)\neq(2,1)$,而 $f(1,2)=f(2,1)=4$,因此 f 不是单射. 又由于 $0\in\mathbf{N}$,而任意 $(x_1,x_2)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 均有 $f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1\neq 0$,于是 f 不是满射. 显然,f 就不是双射.

(5) 由于 $x_1,x_2\in\mathbf{N}$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $(x_1,x_1+1)=(x_2,x_2+1)$,于是 $x_1=x_2$,因此 f 是单射. 又由于 $(0,0)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$,而任意 $x\in\mathbf{N}$ 均有 $f(x)=(x,x+1)\neq(0,0)$,于是 f 不是满射. 因为 f 不是满射,所以 f 不是双射.

2. 对于有限集合 A 和 B,假定 $f:A\to B$ 且 $|A|=|B|$,证明:f 是单射的充要条件是 f 是满射. 对于无限集合,上述结论成立吗?举例说明.

证 (⇒)因为 f 是单射，所以 $|A|=|f(A)|$. 由于 $|A|=|B|$，所以 $|f(A)|=|B|$. 又因为 B 有限且 $f(A)\subseteq B$，故 $f(A)=B$，即 f 是满射.

(⇐)若 f 是满射，则 $f(A)=B$. 由于 $|A|=|B|$，于是 $|A|=|f(A)|$. 又因为 A 和 B 是有限集合，因此 f 是单射.

对于无限集合，上述结论不成立. 例如 $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$，$f(x)=2x$，$f$ 是单射，但 f 不是满射.

3. 设 $f:A\to B$，试证明：

(1) $f\circ I_B=f$.

(2) $I_A\circ f=f$.

特别地，若 $f:A\to A$，则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

证 (1) 对于任意 $x\in A$，由于 $f(x)\in B$，所以 $(f\circ I_B)(x)=I_B(f(x))=f(x)$，因此 $f\circ I_B=f$.

(2) 对于任意 $x\in A$，由于 $I_A(x)=x$，所以 $(I_A\circ f)(x)=f(I_A(x))=f(x)$，于是有 $I_A\circ f=f$.

由(1)和(2)知，若 $f:A\to A$，则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

4. 试举出一个例子说明 $f\circ f=f$ 成立，其中 $f:A\to A$ 且 $f\neq I_A$. 若 f 的逆映射存在，满足条件的 f 还存在吗?

解 令 $A=\{a,b,c\}$，$f(a)=f(b)=f(c)=a$，即对于任意 $x\in A$，$f(x)=a$，显然 $f:A\to A$ 且 $f\neq I_A$. 而对于任意 $x\in A$，有 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(a)=a$，因此 $f\circ f=f$.

若 $f\circ f=f$ 且 f 的逆映射 f^{-1} 存在，由第 3 题知 $f\circ f=f=f\circ I_A$，所以 $f^{-1}\circ(f\circ f)=f^{-1}\circ(f\circ I_A)$，于是利用定理 1-12 有 $(f^{-1}\circ f)\circ f=(f^{-1}\circ f)\circ I_A$，进而 $I_A\circ f=I_A\circ I_A$，因此 $f=I_A$. 所以若 f 的逆映射存在，满足条件的 f 不存在.

5. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$. 若 f 和 g 是满射，则 $f\circ g$ 是满射，试证明.

证 因为 f 是满射，所以 $f(A)=B$. 又因为 g 是满射，所以 $g(B)=C$. 于是 $(f\circ g)(A)=g(f(A))=g(B)=C$，因此 $f\circ g$ 是 A 到 C 的满射.

另证 对于任意 $z\in C$，因为 g 是满射，于是存在 $y\in B$ 使得 $g(y)=z$. 又因为 f 是满射，存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$. 因此，$(f\circ g)(x)=g(f(x))=g(y)=z$，所以 $f\circ g$ 是 A 到 C 的满射.

6. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$. 试证明：若 $f\circ g$ 是单射，则 f 是单射. 试举例说明，这时 g 不一定是单射.

证 对于任意 $x_1,x_2\in A$，假定 $f(x_1)=f(x_2)$，则显然 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$，即 $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$. 因为 $f\circ g$ 是单射，所以 $x_1=x_2$，于是 f 是单射.

例如 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，令 $f(a)=1$，$f(b)=2$，$g(1)=\alpha$，$g(2)=\beta$，$g(3)=\beta$，则显然有 $(f\circ g)(a)=g(f(a))=g(1)=\alpha$，$(f\circ g)(b)=g(f(b))=g(2)=\beta$，于是 $f\circ g$ 是 A 到 C 的单射，但 g 显然不是单射.

7. 设 $f:A\to B$，若存在 $g:B\to A$，使得 $f\circ g=I_A$ 且 $g\circ f=I_B$，试证明：f 是双射且 $f^{-1}=g$.

证 因为 $f\circ g=I_A$，而 I_A 是单射，所以 f 是单射. 又因为 $g\circ f=I_B$，而 I_B 是满射，所

以 f 是满射. 因此 f 是双射.

由于 f 是双射，所以 f^{-1} 存在. 因为 $f\circ g=I_A$，于是 $f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I_A$. 而 $(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ I_A$ 且 $I_B\circ g=f^{-1}$，所以有 $f^{-1}=g$.

8. 设 $f:A\to B, g:B\to C$. 若 f 和 g 是双射，则 $f\circ g$ 是双射且 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

证 根据定理 1-10(1)(2)知，$f\circ g$ 是双射. 下证 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$. 因为

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=f\circ(g\circ g^{-1})\circ f^{-1}=f\circ I_B\circ f^{-1}=f\circ f^{-1}=I_A,$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=g^{-1}\circ(f^{-1}\circ f)\circ g=g^{-1}\circ I_B\circ g=g^{-1}\circ g=I_C,$$

在上面的推导中多次利用了定理 1-12. 由第 7 题知，$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

9. 设 G 是集合 A 到 A 的所有双射组成的集合，证明：

(1) 任意 $f,g\in G$，有 $f\circ g\in G$.

(2) 对于任意 $f,g,h\in G$，有 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

(3) $I_A\in G$ 且对于任意 $f\in G$，有 $I_A\circ f=f\circ I_A=f$.

(4) 对于任意 $f\in G$，有 $f^{-1}\in G$ 且 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$.

证 (1) 由定理 1-10.

(2) 由定理 1-12.

(3) 由第 3 题.

(4) 由定理 1-9.

10. 若 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{1, 2\}$，问 A 到 B 的满射、单射、双射各有多少个? 试推广你的结论.

解 将 A 中的 3 个元素对应到 B 中的 2 个元素，相当于将 3 个元素分成 2 部分，共有 3 种分法；在计算 A 到 B 的满射个数时还需要将 B 中元素进行排列，共有 2 种排列方式，于是 A 到 B 的满射共有 $3\times2=6$ 个(请自己分别写出 A 到 B 的 6 个满射).

由于 $|A|=3, |B|=2$，所以 A 到 B 的单射没有，进而 A 到 B 的双射也没有.

假设 $|A|=m, |B|=n$.

(1) A 到 B 的满射 若 $m<n$，不存在满射；若 $m\geqslant n$，先将 m 个元素划分成 n 个块(参见 1.5 节)，共有 $S(m,n)$ 种方式；再将 B 中元素进行全排列，共有 $n!$ 种方式，于是 A 到 B 的满射共有 $S(m,n)\cdot n!$ 个.

(2) A 到 B 的单射 若 $m>n$，不存在单射；若 $m\leqslant n$，由于 B 中任意选取 m 个元素，再将其进行全排列都得到 A 到 B 的单射，故 A 到 B 的单射共有 $C_n^m\cdot m!$ 个.

(3) A 到 B 的双射 若 $m\neq n$，不存在双射；若 $m=n$，此时 B 中元素的任意一个排列均可得到一个 A 到 B 的双射，因此 A 到 B 的双射共有 $m!$ 个.

11. 设 A, B, C, D 是任意集合，f 是 A 到 B 的双射，g 是 C 到 D 的双射，令 $h:A\times C\to B\times D$，对任意 $(a,c)\in A\times C$，$h(a,c)=(f(a),g(c))$. 证明：h 是双射.

证 对于任意 $(a_1,c_1)\in A\times C$，$(a_2,c_2)\in A\times C$，假定 $h(a_1,c_1)=h(a_2,c_2)$，即 $(f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$，于是 $f(a_1)=f(a_2)$ 且 $g(c_1)=g(c_2)$，根据已知条件有 $a_1=a_2$ 且 $c_1=c_2$，进而 $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$，因此 h 是单射.

任意 $(b,d)\in B\times D$，则 $b\in B, d\in D$，由于 f 是 A 到 B 的双射且 g 是 C 到 D 的双射，于是存在 $a\in A, c\in C$ 使得 $f(a)=b, g(c)=d$，因此 $h(a,c)=(f(a),g(c))=(b,d)$，所以

h 是满射.

故 h 是双射.

12. 设 $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to A$,若 $f\circ g\circ h=I_A, g\circ h\circ f=I_B, h\circ f\circ g=I_C$,则 f,g,h 均可逆,并求出 f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}.

证 因为恒等映射是双射,多次使用定理 1-12 即可得结论.

由于 $f\circ g\circ h=I_A$,所以 f 是单射且 h 是满射. 由于 $g\circ h\circ f=I_B$,所以 g 是单射且 f 是满射. 由于 $h\circ f\circ g=I_C$,所以 h 是单射且 g 是满射. 于是 f,g,h 是双射,因此 f,g,h 均可逆.

由于 $f\circ g\circ h=I_A$,所以 $f^{-1}=g\circ h$ 且 $h^{-1}=f\circ g$,进而 $g^{-1}=h\circ f$.

13. 已知阿克曼(Ackermann)函数 $A:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的定义为

(1) $A(0,n)=n+1, n\geqslant 0$;

(2) $A(m,0)=A(m-1,1), m>0$;

(3) $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1)), m>0, n>0$.

分别计算 $A(2,3)$ 和 $A(3,2)$.

解 由已知条件有 $A(0,1)=2, A(1,0)=A(0,1)=2$,于是

$$A(1,1)=A(0,A(1,0))=A(0,2)=2+1=3,$$
$$A(1,2)=A(0,A(1,1))=A(0,3)=3+1=4,$$

由此可进一步得出

$$A(1,n)=n+2,$$
$$A(2,0)=A(1,1)=3,$$
$$A(2,1)=A(1,A(2,0))=A(1,3)=3+2=5,$$
$$A(2,2)=A(1,A(2,1))=A(1,5)=5+2=7,$$
$$A(2,3)=A(1,A(2,2))=A(1,7)=7+2=9.$$

因此有

$$A(2,n)=2n+3,$$
$$A(3,0)=A(2,1)=2\cdot 1+3=5,$$
$$A(3,1)=A(2,A(3,0))=A(2,5)=2\cdot 5+3=13,$$
$$A(3,2)=A(2,A(2,2))=A(2,13)=2\cdot 13+3=29.$$

所以有 $A(2,3)=9, A(3,2)=29$.

1.3 运算的定义及性质

【习题 1.3】

1. 分别判定取绝对值运算$|\ |$、加法运算$+$、减法运算$-$、取大运算 max、取小运算 min 是否为自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的代数运算.

解 因为对于任意 $x\in\mathbf{N}$, $|x|\in\mathbf{N}$,所以取绝对值运算$|\ |$是 $\mathbf{N}$ 上的 1 元代数运算. 又因为对于任意 $x,y\in\mathbf{N}$,有 $x+y$, $\max(x,y)$, $\min(x,y)\in\mathbf{N}$,因此加法运算$+$、取大运算 max、取小运算 min 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代数运算.

而对于 $2,3\in\mathbf{N}$,由于 $2-3=-1\notin\mathbf{N}$,所以减法运算$-$不是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代

数运算.

2. 证明：集合 $A=\{3^n \mid n\in\mathbf{N}\}$关于数的加法运算不封闭.

证　由于 $3^1,3^2\in A$，而 $3^1+3^2=12\notin A$，所以 A 关于数的加法运算不封闭.

3. 设 $A=\{a,b,c\}$，求出 A 上的 2 元代数运算的个数.

解　考虑 A 关于 2 元代数运算 $*$ 的运算表，在运算表中需要填运算结果的有 $3\times3=9$ 个位置，而显然每个位置填 a,b,c 中任意一个元素均可，于是任意一种填充元素的方法都是 A 上一种代数运算，因此 A 上的 2 元代数运算的个数为 3^9.

4. 设 $A=\{1,2,3\}$，试根据所给定的运算表分别讨论其幂等性、交换性以及是否有单位元素，若有，请指出 A 中各元素的逆元素.

解　(1) 在表 1-1 中，由于 $3*3=2$，于是 $*$ 不满足幂等性. 因为 $*$ 运算表是对称的，所以 $*$ 满足交换性. 又因为对于任意 $x\in A$，有 $1*x=x*1=x$，因此 1 是 $*$ 运算的单位元素. 从运算表可知，1 的逆元为 1，2 和 3 都没有逆元.

(2) 在表 1-2 中，由于对于任意 $x\in A$，有 $x*x=x$，于是 $*$ 满足幂等性. 因为 $2*3=2\neq3*2=1$，所以 $*$ 不满足交换性. 又因为对于任意 $x\in A$，有 $1*x=x*1=x$，因此 1 是 $*$ 运算的单位元素. 从运算表可知，1 的逆元为 1，2 和 3 都没有逆元(3 的右逆元为 2，2 的左逆元为 3).

表　1-1

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	2

表　1-2

*	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	2
3	3	1	3

5. 整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的取大运算 max 和取小运算 min 相互可吸收. 试证明之.

证　由于 max 和 min 运算可交换，且对于任意 $x,y\in\mathbf{Z}$，无论 $x=y$，$x>y$ 还是 $x<y$，显然都有

$$\max(x,\min(x,y))=x$$

以及

$$\min(x,\max(x,y))=x$$

所以 $\mathbf{Z}$ 上的取大运算 max 和取小运算 min 相互可吸收.

6. 设 $\mathbf{R}[x]$表示实数集 $\mathbf{R}$ 上的所有关于 x 的一元多项式组成的集合，试验证：

(1) 多项式的加法运算和多项式的乘法运算均满足结合律.

(2) 多项式的乘法运算对多项式的加法运算可分配.

解　(1) 对于任意 $A(x),B(x),C(x)\in\mathbf{R}[x]$，显然有

$$(A(x)+B(x))+C(x)=A(x)+(B(x)+C(x)),$$

$$(A(x)B(x))C(x)=A(x)(B(x)C(x)),$$

所以多项式的加法运算和多项式的乘法运算均满足结合律.

(2) 对于任意 $A(x),B(x),C(x)\in\mathbf{R}[x]$，由于多项式的乘法运算满足交换律且显然有

$$A(x)(B(x)+C(x))=A(x)B(x)+A(x)C(x)$$

多项式的乘法运算对多项式的加法运算可分配.

7. 设 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$表示实数集 $\mathbf{R}$ 上的所有 n 阶方阵组成的集合,

(1) 试验证:矩阵的乘法运算对矩阵的加法运算可分配.

(2) $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$关于矩阵乘法的单位元素是什么? $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$中哪些元素关于乘法运算有逆元?

解 (1) 显然,对于任意 $A,B,C\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$,根据线性代数知,

$$A(B+C)=AB+AC \text{ 且 } (B+C)A=BA+CA$$

因此,矩阵的乘法运算对矩阵的加法运算可分配.

(2) 由于 n 阶单位矩阵 $E\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$,且对于任意 $A\in\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$,根据线性代数知,

$$EA=AE=A$$

所以,n 阶单位矩阵 E 是 $\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$关于矩阵乘法的单位元素.

同样根据线性代数知,$\boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$中只有可逆矩阵才有逆元.

8. 令 $\mathbf{Z}_n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$,$\mathbf{Z}_n$上的两个 2 元运算分别是模 n 的加法运算‘$+_n$’和模 n 的乘法运算 $\cdot_n$:任意 $x,y\in\mathbf{Z}_n$,$x+_n y=(x+y)\bmod n$,$x\cdot_n y=(xy)\bmod n$.

(1) 写出 $\mathbf{Z}_6$关于$+_6$ 和 $\cdot_6$ 的运算表.

(2) 证明:$\cdot_n$ 运算对$+_n$ 运算可分配.

解 (1) $\mathbf{Z}_6$关于$+_6$ 和 $\cdot_6$ 的运算表分别见表 1-3 和表 1-4.

表 1-3

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

表 1-4

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

(2) 对于任意 $x,y,z\in\mathbf{Z}_6$,由于乘法运算可交换且 $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$,因此有

$$x\cdot_6(y+_6 z)=x\cdot_6 y+_6 x\cdot_6 z$$

所以 $\cdot_n$ 运算对$+_n$ 运算可分配.

9. 试验证:$\mathbf{Z}$ 关于加法运算$+$和减法运算$-$均没有零元素,而 $\mathbf{Z}$ 关于乘法运算‘$\cdot$’

的零元素为 0.

解　若 θ 是 $\mathbf{Z}$ 关于加法运算 $+$ 的零元素，则对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，均有 $x+\theta=\theta+x=\theta$，这显然是不可能的.

同样，若 θ 是 $\mathbf{Z}$ 关于减法运算 $-$ 的零元素，则对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，均有 $x-\theta=\theta-x=\theta$，这显然也是不可能的.

对于任意 $x\in\mathbf{Z}$，因为 $x\cdot 0=0\cdot x=0$，所以 $\mathbf{Z}$ 关于乘法运算 $\cdot$ 的零元素为 0.

10. 试举例说明，映射的复合运算 $\circ$ 不具有消去性.

解　例如取 $A=\{a,b,c\}$，$f(a)=f(b)=f(c)=a$，则经过计算可知 $f\circ f=f\circ I_A$，但 $f\neq I_A$，这说明映射的复合运算 $\circ$ 不具有消去性.

11. 令 G 表示集合 $S=\{1,2,3\}$ 上所有置换组成的集合.

(1) 列出 G 关于复合映射 $\circ$ 的运算表.

(2) 并指出 G 关于复合映射 $\circ$ 的单位元素及 G 中每个元素的逆元.

解　(1) 由 1.2 节例 1-10 知，$S=\{1,2,3\}$ 上所有置换分别为

$$p_1(1)=1,\ p_1(2)=2,\ p_1(3)=3;\quad p_2(1)=2,\ p_2(2)=1,\ p_2(3)=3;$$

$$p_3(1)=3,\ p_3(2)=2,\ p_3(3)=1;\quad p_4(1)=1,\ p_4(2)=3,\ p_4(3)=2;$$

$$p_5(1)=2,\ p_5(2)=3,\ p_5(3)=1;\quad p_6(1)=3,\ p_6(2)=1,\ p_6(3)=2.$$

列出 G 关于映射的复合 $\circ$ 的运算表如表 1-5 所示（参见 5.3 节表 5-6 关于置换的复合 $\circ$ 的运算表）.

表　1-5

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_6	p_1	p_5	p_4	p_2
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_6	p_1
p_6	p_6	p_3	p_4	p_2	p_1	p_5

(2) 由运算表可知，对于任意 $p_i\in G$，有 $p_i\circ(1)(2)(3)=(1)(2)(3)\circ p_i=p_i$，所以 $(1)(2)(3)$ 是 G 关于复合映射 $\circ$ 的单位元素.

由运算表可知，$p_1^{-1}=p_1$，$p_2^{-1}=p_2$，$p_3^{-1}=p_3$，$p_4^{-1}=p_4$，$p_5^{-1}=p_6$，$p_6^{-1}=p_5$.

1.4　集合的运算

【习题 1.4】

1. 全集 $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，令集合 A,B,C,D 分别为 $A=\{a,b,c,g\}$，$B=\{d,e,f,g\}$，$C=\{a,c,f\}$，$D=\{f,h\}$. 试分别计算 (1) $A\cup B$；(2) $B\cap C$；(3) $A-D$；(4) $(A\cap B)-C$；(5) $\overline{D}$；(6) $B\oplus C$；(7) $A\cap(B\cup C)$；(8) $(A\cup D)-\overline{C}$；(9) $\overline{A\cup C}$；(10) $A\cup B\cup C$.

解 (1) $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

(2) $B\cap C=\{f\}$.

(3) $A-D=\{a,b,c,g\}$.

(4) $(A\cap B)-C=\{g\}-C=\{g\}-\{a,c,f\}=\{g\}$.

(5) $\overline{D}=\{a,b,c,d,e,g\}$.

(6) $B\oplus C=(B\cup C)-(B\cap C)=\{a,c,d,e,f,g\}-\{f\}=\{a,c,d,e,g\}$.

(7) $A\cap(B\cup C)=\{a,b,c,g\}\cap\{a,c,d,e,f,g\}=\{a,c,g\}$.

(8) $(A\cup D)-\overline{C}=\{a,b,c,g,f,h\}-\{b,d,e,g,h\}=\{a,c,f\}$.

(9) $\overline{A\cup C}=\overline{\{a,b,c,f,g\}}=\{d,e,h\}$.

(10) $A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

2. 设 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq C$,则 $A\cup B\subseteq C$,进而 $A\cap B\subseteq C$.

证 对于任意 $x\in A\cup B$,则 $x\in A$ 或 $x\in B$. 因为 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq C$,所以有 $x\in C$,因此 $A\cup B\subseteq C$.

由于 $A\cap B\subseteq A$ 且 $A\subseteq A\cup B$,而 $A\cup B\subseteq C$,所以 $A\cap B\subseteq C$.

3. 证明德·摩根(De Morgan)律.

证 先证明 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. 对于任意 $x\in\overline{A\cup B}$,则 $x\notin A\cup B$,由此得出 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,因此 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,即 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,所以 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$.

另一方面,若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$,于是 $x\notin A$ 且 $x\notin B$,进而 $x\notin A\cup B$,因此 $x\in\overline{A\cup B}$,所以 $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.

故 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

类似可证 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

4. 对于集合 A,B,证明:$A\subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

证 ($\Rightarrow$)假定 $A\subseteq B$. 若对于 $x\in\overline{B}$,则 $x\notin B$,因为 $A\subseteq B$,于是 $x\notin A$,这时 $x\in\overline{A}$,所以 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

($\Leftarrow$)假定 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$. 对于任意 $x\in A$,则 $x\notin\overline{A}$. 因为 $\overline{B}\subseteq\overline{A}$,所以 $x\notin\overline{B}$,即 $x\in B$,进而 $A\subseteq B$.

5. 设 $f:A\to B$,对于任意 $X\subseteq A$ 及 $Y\subseteq A$,证明:$f(X\cap Y)\subseteq f(X)\cap f(Y)$. 一般来说 $f(X\cap Y)\neq f(X)\cap f(Y)$,举例说明之.

证 因为 $X\cap Y\subseteq X$,所以 $f(X\cap Y)\subseteq f(X)$. 同样因为 $X\cap Y\subseteq Y$,所以 $f(X\cap Y)\subseteq f(Y)$. 于是有 $f(X\cap Y)\subseteq f(X)\cap f(Y)$.

例如取 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{1,2\}$,令 $f:A\to B$,$f(a)=f(b)=2$,$f(c)=1$. 再取 $X=\{a,c\}$,$Y=\{b,c\}$,这时 $f(X)=\{1,2\}$,$f(Y)=\{1,2\}$,因此 $f(X)\cap f(Y)=\{1,2\}$. 由于 $f(X\cap Y)=f(\{c\})=\{1\}$,所以有 $f(X\cap Y)\neq f(X)\cap f(Y)$.

6. 对于任意集合 A,B,C,证明:$(A-B)-C=(A-C)-B$.

证
$$\begin{aligned}(A-B)-C&=(A\cap\overline{B})-C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})\\&=A\cap\overline{B\cup C}=A-(B\cup C).\end{aligned}$$

7. 设 A,B,C 是集合,下列命题是否成立,为什么?

(1) 若 $A\cup B=A\cup C$,则 $B=C$.

(2) 若 $A\cap B=A\cap C$,则 $B=C$.

(3) 若 $A\cup B=A\cup C$ 且 $A\cap B=A\cap C$,则 $B=C$.

解　(1) 不成立. 例如,$A=\{a,b,c\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{b,c\}$,这时显然有 $A\cup B=A\cup C$,但 $B\neq C$.

(2) 不成立. 例如,$A=\{a\}$,$B=\{a,b\}$,$C=\{a,c\}$,这时显然有 $A\cap B=A\cap C$,但 $B\neq C$.

(3) 成立. 因为
$$B=B\cap(A\cup B)=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$$
$$=(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C=(A\cup C)\cap C=C.$$

8. 对于任意集合 A 和 B,证明:

(1) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$.

(2) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$,并举例说明 $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$不成立.

证　(1) 任意 $X\in P(A)\cap P(B)$,则 $X\in P(A)$且 $X\in P(B)$,于是 $X\subseteq A$ 且 $X\subseteq B$,因此,$X\subseteq A\cap B$,进而 $X\in P(A\cap B)$,所以 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$.

又因为 $A\cap B\subseteq A$,于是 $P(A\cap B)\subseteq P(A)$. 同样,$P(A\cap B)\subseteq P(B)$,所以 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$.

故 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$.

(2) 因为 $A\subseteq A\cup B$,于是 $P(A)\subseteq P(A\cup B)$. 同样,$P(B)\subseteq P(A\cup B)$,所以 $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$.

例如 $A=\{a,b\}$,$B=\{b,c\}$,于是 $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$且 $P(B)=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$,因此

$$P(A)\cup P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\}\}$$

这时$|P(A)\cup P(B)|=6$. 而 $A\cup B=\{a,b,c\}$,所以$|P(A\cup B)|=2^3=8$. 显然有 $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$.

9. 设 A,B 是集合,证明:$A\subseteq B$ 当且仅当 $A-B=\varnothing$.

证　($\Rightarrow$)若 $A\subseteq B$,根据差运算的定义知 $A-B=\varnothing$.

($\Leftarrow$)若 $A-B=\varnothing$,对于任意 $x\in A$,则 $x\in B$,否则 $A-B\neq\varnothing$,因此 $A\subseteq B$.

10. 对于任意集合 A,B,C, 分别找出使下列等式成立的最简单的充要条件:

(1) $(A-B)\cup(A-C)=A$.

(2) $(A-B)\cap(A-C)=\varnothing$.

(3) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$.

解　(1) $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=A\cap\overline{B\cap C}=A-(B\cap C)$,而 $A-(B\cap C)=A$ 的充要条件是 A 与 $B\cap C$ 没有公共元素,即 $A\cap B\cap C=\varnothing$.

于是,$(A-B)\cup(A-C)=A$ 的充要条件是 $A\cap B\cap C=\varnothing$.

(2) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap\overline{B\cup C}=A-(B\cup C)$,而 $A-(B\cup C)=\varnothing$的充要条件是 $A\subseteq B\cup C$.

于是,$(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$的充要条件是 $A\subseteq B\cup C$.

(3) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$ 的充要条件是 $A-B=A-C$,这就是最简单的$(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$的一个充要条件.