



# 绪 论

在工程和科学技术的发展过程中,自动控制始终担负着重要的角色。在航空航天和国防工业中,自动控制在飞机的自动驾驶系统、宇宙飞船系统和导弹制导系统中发挥着特别重要的作用。在现代制造业和工业生产过程中,自动控制同样起着无法替代的作用,例如对数控机床的控制,对工业过程中流量、压力、温度的控制等均离不开自动控制技术。此外,在机器人控制、城市交通控制、网络拥塞控制等方面,自动控制技术也都发挥着重要作用。自动控制技术的应用也已扩充到非工程系统,如生物系统、生物医学系统、社会经济系统等。随着自动控制在越来越多的领域中得到应用,自动控制不仅把人类从繁重的体力与部分脑力劳动中解放出来,而且可以完成只靠人类自身无法完成的许多精密、复杂的工作。在许多危险以及特殊的环境中,更是少不了自动化装置。

自动控制理论经过长期的发展已逐渐形成了一些完整的理论。根据发展过程,自动控制理论分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。发展于 20 世纪 50 年代之前、以传递函数描述系统的自动控制理论称为经典控制理论,而发展于 20 世纪 50 年代末 60 年代初、以状态空间模型描述系统的自动控制理论称为现代控制理论。

## 经典控制理论

尽管自动控制的某些思想可以追溯到久远的古代,直到 18 世纪英国人瓦特(J. Watt)为控制蒸汽机速度而设计的离心调节器才可以说是自动控制领域中的第一项重大成果,由此拉开了经典控制理论发展的序幕。不过,瓦特发明的这一装置容易震荡,直到 1868 年,英国人麦克斯韦(J. C. Maxwell)发表了《论调速器》,对蒸汽机调速系统的动态特性进行了分析,指出控制系统的品质可用微分方程来描述及系统的稳定性可用特征方程根的位置来判断,从而解决了蒸汽机调速系

统中出现的剧烈震荡问题,并总结出了简单的系统稳定性代数判据。第一次世界大战爆发后,军事工业的需要促进了自动控制理论的发展。1922年,美国的冯诺斯基(N. Minorsky)研制出船舶操纵自动控制器,并给出了控制系统的稳定性分析。1932年,美籍瑞典科学家奈奎斯特(H. Nyquist)提出了一种利用系统频率特性图确定系统稳定性的简便方法。到了第二次世界大战,由于设计和建造飞机自动驾驶仪、雷达跟踪系统、火炮瞄准系统等军事装备的需要,自动控制理论更是取得了长足的进步。1945年,美国的伯德(H. W. Bode)发表了关于控制系统频域设计方法的经典著作《网络分析和反馈放大器设计》。1948年,美国的伊万斯(W. R. Evans)提出了根轨迹法,进一步充实了经典控制理论。同年,美国的维纳(N. Wiener)发表了名著《控制论》,标志着经典控制理论的形成。

奈奎斯特图、伯德的频域法和伊万斯的根轨迹法使得不用求解微分方程就能分析高阶系统的稳定性、动态品质和稳态性能,为分析和设计控制系统提供了工程上实用且有力的工具,从而使得经典控制理论在反馈控制系统中的应用得到迅速增长。

面对经典控制理论所取得的迅猛发展,人们产生了一种更高的希望,以期这些原理和方法能用来处理更复杂的系统。特别是当时所掌握的反馈系统理论知识可以在短期内促进对诸如生物控制机理和神经系统那样高度复杂系统的理解,同时在工业社会中为复杂的经济和社会过程提供更有效的控制方法。然而,这些想法远未成熟,经典控制理论仍存在诸多的缺陷和局限性,妨碍它直接用于更为复杂系统的分析和控制。

第一,经典控制理论只限于研究线性时不变系统。尽管有大量的研究工作试图克服这种局限性,如对于某些典型的非线性及时变反馈系统已找到了奈奎斯特判据的广义形式,但经典控制理论仍难以处理一般的非线性或时变的系统。

第二,经典控制理论限于所谓的“标量”或单回路反馈系统,即单输入单输出系统。然而,实际中的大量工程系统都是具有动态耦合的多输入多输出系统。尽管人们将经典控制理论中的传递函数推广到传递函数矩阵以处理多输入多输出系统,但由于这些方法都是基于系统的输入输出描述,它们在本质上忽略了系统结构的内在性质。因此,用经典控制理论设计这类系统难以取得令人满意的效果。

第三,经典控制理论采用试探法设计系统,根据经验选用合适的、简单的、工程上易于实现的控制器,然后检验系统的所有品质指标是否都能满足。若不满足,则给出如何来修正控制系统的建议以改善系统品质指标,直至找到满意的结果为止。虽然这种设计方法具有实用性强等优点,但往往依赖于设计人员的经验,而不能从理论上给出最佳的、系统化的设计方案。

## 现代控制理论

现代科学技术的迅速发展,特别是空间技术、导弹制导、数控技术、核能技术等的发展,使得这些系统的结构更加复杂,它们往往是动态耦合的多输入多输出、非线性以及时变的系统。同时,对控制系统性能的要求也在不断提高,很多情况下要求系统的某种性能是最优的,而且对环境的变化要有一定的适应能力等。这些新的控制对象和控制要求是经典控制理论所无法处理和满足的。

科学技术的发展不仅对控制理论提出了挑战,同时也为新理论的形成创造了条件。

在 20 世纪 50 年代蓬勃兴起的航空航天技术的推动和飞速发展的计算机技术支持下,控制理论在 1960 年前后有了重大的突破和创新。1956 年,美国的贝尔曼(R. I. Bellman)发表了《动态规划理论在控制过程中的应用》,提出了寻求最优控制的动态规划法。同年,前苏联的庞特里亚金发表了《最优过程的数学理论》,提出了极大值原理,使得最优控制理论得到极大的发展。1960 年,美籍匈牙利人卡尔曼(R. E. Kalman)系统地引入状态空间法分析系统,提出了能控性、能观性的概念和新的滤波理论。而“现代控制理论”这一名称正是 1960 年卡尔曼的文章发表后出现的。这些重要的进展和成果构成了现代控制理论的发展起点和基础。

这一时期里,在现代控制理论的推动下,世界上出现了许多惊人的科技成就:1957 年,前苏联相继发射成功洲际弹道火箭和世界第一颗人造地球卫星;1962 年,美国研制出工业机器人产品,同年前苏联连续发射两艘“东方”号飞船首次在太空实现编队飞行;1966 年,前苏联发射“月球 9 号”探测器,首次在月球表面成功软着陆;1969 年,美国“阿波罗 11 号”把宇航员 N. A. 阿姆斯特朗送上月球,中国中远程战略导弹发射成功等。

现代控制理论在系统分析与设计上利用了现代数学作为工具,由此而引起的许多分析与设计步骤涉及大量计算,同时代的数字计算机的发展为实现这些计算提供了可能。可以说,现代控制理论与控制技术和计算机平行发展的。

现代控制理论本质上是时域法,基于状态空间模型在时域中对系统进行分析和设计。由于采用了状态方程描述系统,因此原则上可以分析多输入多输出、非线性时变系统。基于状态空间模型来对系统进行分析,主要借助于计算机解出状态方程,根据状态解可以对系统性能做出评估。由于无需经过任何变换,在时域中直接求解和分析,控制的要求和性能指标就变得非常直观。在系统的设计方法上,可以在严密的理论基础上,推导出满足一定性能指标的最优控制系统。因此,在经典控制理论中存在的困难和局限,在现代控制理论中可以迎刃而解。

现代控制理论是在经典控制理论的基础上发展起来的,虽然两者在数学工具、理论基础和研究方法上有着本质区别,但在对动态系统进行分析时,两种理论可以互相补充,相辅相成,而不是互相排斥。特别是在对线性系统的研究中,越来越多经典控制理论中行之有效的办法已渗透到现代控制理论中,如零极点对系统性能影响的分析和极点配置等,从而大大丰富了现代控制理论的研究内容。

## 本书的内容和特点

本书介绍了现代控制理论中的一些基本概念和方法,主要涉及线性系统的状态空间模型描述,基于状态空间模型的系统分析与设计,包括系统的运动分析、能控性、能观性、稳定性、极点配置、观测器设计、线性二次型最优控制等基本内容。

本书具有以下特点:

1. 全书的叙述由浅入深,注重理论联系实际。
2. 叙述过程中力图贯彻“问题的提出→解决的思路→具体方法→算法设计→应用实例”这一主线,特别强调“为什么要研究这个问题”、“如何来解决这个问题”。同时在具体问题的解决过程中,避免过多繁琐的数学公式和推导,而是采用从简单到复杂,从特殊到

一般的处理思想,从一些特殊的、简单的例子入手导出问题的解,进而推广到一般的情况。在传授知识的同时,努力培养学生分析问题和解决问题的能力。

3. 在介绍系统分析和设计算法的同时,给出了相关的 MATLAB 函数,便于学生应用 MATLAB 软件解决控制系统的分析和设计问题,通过仿真直观了解分析结果和设计效果,有助于加深对现代控制理论中一些基本概念和方法的理解。

4. 每章后的习题不仅有计算题,而且还有叙述题,旨在让读者加深了解所讨论的问题、基本概念、解决方法、相关性质等,特别需要把握的是问题的提出和解决的思路,以逐步提高分析问题和解决问题的能力。

5. 本书叙述详尽,在文字上尽可能做到通俗易懂,便于自学。



# 第 1 章

## 控制系统的状态空间模型

要对一个被控对象进行有效的控制,首先需要了解和认识被控对象,而了解和认识被控对象的一种有效方法就是建立被控对象的数学模型。建立一个合理的被控对象数学模型是对被控对象实现有效控制的基础和前提。

控制系统的数学模型是用于描述系统动态行为的数学表达式。在经典控制理论中,采用传递函数作为描述系统的数学模型,建立起系统输入量和输出量之间的关系。这种输入输出关系描述的只是系统的外部特性,并不能完全反映系统内部的动态特征。此外,传递函数描述只考虑零初始条件,难以反映系统非零初始条件对系统性能的影响。

现代控制理论是建立在状态空间基础上的控制系统分析和设计理论。系统的内部特征用状态变量来刻画,系统的动态特性由状态变量的一阶微分方程组来描述。一阶微分方程组不仅能更有效地求解,从而确定在任一时刻由状态变量描述的系统内部特征,而且还可以方便地了解初始条件所产生的影响。系统的状态空间模型描述了系统的输入、输出与内部状态之间的关系,揭示了系统内部状态的运动规律,反映了控制系统动态特性的全部信息。因此,状态空间方法弥补了经典控制理论的一些不足。

状态空间方法不仅适用于单输入单输出系统,也适用于多输入多输出系统,应用的对象可以是线性的或非线性的,也可以是定常的或时变的。因此,状态空间方法适用范围更广,且数学模型由于采用了矩阵和向量的形式,不仅使得格式简单统一,而且可以方便地利用计算机进行处理和求解,显示了其极大的优越性。

本章主要介绍系统的状态空间模型及其建立方法。具体内容包  
括状态空间模型的机理建模方法,系统的传递函数和状态空间模型之间的相互转换,MATLAB 的相关函数,状态空间模型的分析及相关性质。

## 1.1 状态空间模型

### 1.1.1 状态空间模型表达式

现实世界中的许多对象和系统,不管它们是机械的、电气的、热力的,还是经济学的、生物学的,都有它们各自演化的规律。人们可以通过描述系统内部某些变化规律的物理定律、化学平衡方程等来确定某些变量与其他一些变量变化率之间的关系,如牛顿第二定律中力或力矩与速度变化率的关系;线圈的感应电压与电流的变化率成正比;导管中流经收缩口的液体流速决定于其前后的压力差;容器中反应物的浓度往往决定了化学反应的速率。进而得到刻画系统动态行为的数学模型。这种通过分析系统内在机理来建立系统数学模型的方法称为机理建模方法。但是,限于一些学科的发展水平,人们对一些对象的内在机理还缺乏足够的认识,难以建立起刻画其变化规律的定量关系。因此,还需要通过其他的手段和方法来确定描述其动态特性的数学模型。

在这一小节中,将通过分析一个实际例子的内在机理来建立其数学模型,进而介绍状态空间的一些概念,给出状态空间模型的表达式。

**例 1.1.1** 考虑如图 1.1.1 所示的 RLC 电路,其中电压  $u(t)$  为电路的输入量,电容上的电压  $u_C(t)$  为电路的输出量, $R$ 、 $L$  和  $C$  分别为电路的电阻、电感和电容。由电路理论可知,在给定输入电压  $u(t)$  后,回路中的电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_C(t)$  是相互影响的,它们满足以下关系:

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = u(t) \\ C \frac{du_C(t)}{dt} = i(t) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

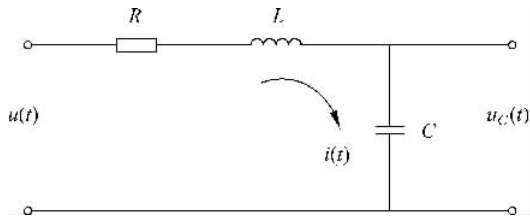


图 1.1.1 RLC 电路

进一步,由式(1.1.1)可以得到以下的一阶线性微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{1}{L}u_C(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C}i(t) \end{aligned}$$

又可以将上式写成如下更为紧凑的向量矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{u}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.1.2a)$$

由微分方程理论可知：只要知道回路中的电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_c(t)$  在  $t_0$  时刻的初始值  $i(t_0)$  和  $u_c(t_0)$ ，以及电路在  $t \geq t_0$  时的电压  $u(t)$ ，就可以从微分方程(1.1.2a)确定任意时刻  $t (\geq t_0)$  处电路中的电流  $i(t)$  和电容上的电压  $u_c(t)$  的值。

$i(t)$  和  $u_c(t)$  描述了电路随电压  $u(t)$  变化的状况，这样一组量在任一时刻的值完全刻画了电路在该时刻的特征，故称其为该电路的状态变量，该状态变量中的每一个变量称为该电路的状态分量。

系统的**状态变量**就是可以完整描述系统运动状况的数目最少的一组变量。这里所说的“完整”是指系统所有可能的状况都能表示出来。对于图 1.1.1 所示的 RLC 电路， $i(t)$  和  $u_c(t)$  就可以构成系统的状态变量。再增加一个变量，例如电流  $i(t)$  的变化率  $di/dt$ ，对完整地确定电路的运动情况来说是多余的；若去掉一个变量，例如  $i(t)$ ，仅仅用  $u_c(t)$  又不能完整地确定系统的全部运动状态。状态变量在某一时刻的值称为系统在该时刻的**状态**。

将构成状态变量的一组变量写成一列向量的形式，所得到的向量称为是**状态向量**。例如  $[i(t) \quad u_c(t)]^T$  是 RLC 电路的状态向量。由状态向量所有可能取值的全体构成的集合称为**状态空间**。因此，状态向量在某一时刻的值只是状态空间中的一个点。如 RLC 电路以  $i(t)$  和  $u_c(t)$  为状态变量的状态空间是  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ ，如图 1.1.2 所示。

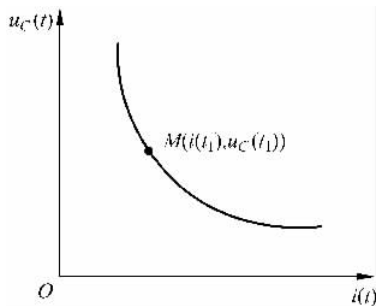


图 1.1.2 状态空间

系统在任意时刻的状态可以用状态空间中的一个点来表示。例如  $t_1$  时刻的状态对应于状态空间中的点  $M(i(t_1), u_c(t_1))$ 。随着时间的变化，状态变量在状态空间中描绘出一条轨迹，称为**状态轨迹**，它形象地描述了状态随时间变化的轨迹。

若将电容上的电压  $u_c(t)$  作为电路的输出量，则该输出量可以用电路状态变量的线性组合来表示：

$$u_c(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (1.1.2b)$$

方程(1.1.2a)~方程(1.1.2b)描述了 RLC 电路的输入电压  $u(t)$ 、状态变量  $i(t)$  和  $u_c(t)$  与输出变量  $u_c(t)$  之间的关系，它们完整地描述了系统内部与外部的动态变化状况，称为 RLC 电路系统的**状态空间模型**，其中方程(1.1.2a)称为系统的**状态方程**，方程(1.1.2b)称为系统的**输出方程**。

如果记

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}, \quad u = u(t), \quad y = u_c(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1]$$

则方程(1.1.2)可以写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

更一般的,系统的输出量有时也可以直接依赖系统的输入量,从而得到状态空间模型的一般表达式:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \quad (1.1.3a)$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \quad (1.1.3b)$$

其中: $\boldsymbol{x}$ 是 $n$ 维的状态向量, $\boldsymbol{u}$ 是 $m$ 维的输入向量, $\boldsymbol{y}$ 是 $r$ 维的输出向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 维、 $\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 维、 $\boldsymbol{C}$ 是 $r \times n$ 维、 $\boldsymbol{D}$ 是 $r \times m$ 维的系数矩阵,若将它们按分量的形式写出来,就是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为系统的状态矩阵(有时也称为系统矩阵),反映了系统内部各状态变量间的耦合关系, $\boldsymbol{B}$ 称为输入矩阵,反映了各输入量是如何影响各状态变量的, $\boldsymbol{C}$ 称为输出矩阵,表明了状态变量到输出的转换关系, $\boldsymbol{D}$ 称为直接转移矩阵,反映了输入对输出的直接影响。一般情况下,很少有输入量直接传递到输出端,所以矩阵 $\boldsymbol{D}$ 常常是零矩阵。方程(1.1.3a)称为系统的状态方程,方程(1.1.3b)称为输出方程。从模型(1.1.3)可以看出,线性系统的状态空间模型由系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 、 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 惟一决定。因此,状态空间模型(1.1.3)也可以用一个四元组 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ 来表示,有的文献和书中也将状态空间模型(1.1.3)简记成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}.$$

以状态空间模型描述系统行为的方法和传递函数不同,它把输入对输出的影响分成两段来描述。第一段是输入引起系统内部状态发生变化,由状态方程来描述;第二段是系统内部的状态变化引起系统输出的变化,用输出方程来描述。这样一个过程如图 1.1.3 所示。

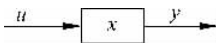


图 1.1.3 系统行为的内部描述

由于这种描述可以深入到系统内部,故称为内部描述。而传递函数只是描述系统的外部信号,即输入信号和输出信号间的关系,并不能反映系统内部的状况,故称为外部描述。

系统的输出量和状态变量是两个不同的概念。输出量是人们希望从系统外部能测量

到的某些信息,它们可能是状态分量中的一部分,也可以表示为一些状态分量和控制量的线性组合;而状态变量则是完全描述系统动态行为的一组量,在许多实际系统中往往难以直接从外部测量得到,甚至根本就不是物理量。把哪些量选为输出量,要根据需要来决定,其数量不限,但总不会超过状态分量的个数。

由于状态空间模型(1.1.3)有  $m$  个输入,  $r$  个输出,描述的是一个多输入多输出(multi-input multi-output, MIMO)系统,故称为多变量系统。特别是,若  $m=r=1$ ,则对应的是单输入单输出(single-input single-output, SISO)系统,称为单变量系统。

若状态空间模型(1.1.3)中的系数矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  中的各分量均为常数,则称这样的系统为线性定常系统或线性时不变(linear time invariant, LTI)系统;若系数矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  中有时变的元素,则对应的系统称为是线性时变系统。为了说明系数对时间变量的依赖,也可以将状态空间模型(1.1.3)写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}$$

时不变系统在物理上代表结构和参数都不随时间变化的一类系统。严格地说,一个实际系统的参数或结构要做到完全不随时间变化几乎是不可能的。因此,时不变系统只是时变系统的一种理想化模型。但是,若系统的参数或结构随时间的变化过程与系统的动态过程相比足够的慢,则可以将它看成一个时不变系统,并采用时不变系统的处理方法来进行分析,仍可保证结果具有足够的精确度。

所有的实际系统严格地说都是非线性系统。描述非线性系统的状态空间模型具有以下一般形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.1.4a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.1.4b)$$

其中,  $\mathbf{x}$  是系统的  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  是系统的  $m$  维控制输入向量,  $\mathbf{y}$  是系统的  $r$  维测量输出向量, 向量函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}$$

其中的函数  $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \dots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \dots, g_r(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  中至少有一个是状态变量  $x_1, \dots, x_n$  和控制量  $u_1, \dots, u_m$  的非线性函数。

既然所有的实际系统都是非线性系统,那为什么还要研究线性系统呢?这是因为:

1. 线性系统只是实际系统在忽略次要非线性因素或线性化后所得到的近似模型。如果限于讨论系统在特定点  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  的某个足够小邻域内的运动特性,则可以将系统模型中的非线性函数在点  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  处泰勒展开,从而可以用系统的线性化模型来近似描述其在点  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  附近的运动特性。

2. 任何问题的研究都是从简单到复杂的,因此,线性系统的研究不仅是其本身的需要,同时也是非线性系统研究的基础,可以应用线性系统中的一些概念和方法来研究非线性系统中的一些相关问题。

本书只介绍由状态空间模型(1.1.3)描述的线性时不变系统的分析和综合问题。

根据状态空间模型(1.1.4),只要给出了状态向量在  $t=t_0$  时刻的初始值  $\mathbf{x}(t_0)$ ,并给

定  $t \geq t_0$  时刻的输入向量  $\mathbf{u}(t)$ , 在一定的连续和可微条件下, 就可以从状态方程(1.1.4a) 唯一地确定任意时刻  $t \geq t_0$  处的状态向量  $\mathbf{x}(t)$ , 进而从输出方程(1.1.4b) 确定系统的输出向量  $\mathbf{y}(t)$ 。因此, 利用状态空间模型可以在时间域中方便地分析时变、非线性复杂系统的运动状况。

以上通过如图 1.1.1 所示的 RLC 电路系统, 给出了系统状态变量的概念, 通过选取适当的状态变量, 导出了系统的状态空间模型。在这个过程中, 状态变量的选取是基础。

对图 1.1.1 所示的电路, 经推导可得到描述电路变化状况的方程

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u$$

如果选取电容上的电压  $u_C$  和  $u_C$  随时间的变化率  $du_C/dt$  作为状态变量, 则

$$x_1 = u_C$$

$$x_2 = \dot{u}_C = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{u}_C = -\frac{R}{L} x_2 - \frac{1}{LC} x_1 + \frac{1}{LC} u$$

进一步将其写成矩阵的形式, 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} u \quad (1.1.5a)$$

选取  $u_C$  作为电路的输出量, 则状态空间模型的输出方程为

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.1.5b)$$

式(1.1.5)也是图 1.1.1 所示电路系统的状态方程。容易看到, 状态空间模型(1.1.5)与式(1.1.2)不同。由这一事实可知, 一个系统的状态变量选取并不是唯一的。状态变量选取的不同, 相应的状态空间模型也不同。这种在状态变量选择方面的自由性也是状态空间方法的一个优点。在本书的后续章节中可以看到, 通过选取适当的状态变量, 可以使得系统的状态空间模型具有特殊的结构, 从而大大方便控制系统的分析和设计。

由于状态变量的选取不是唯一的, 那么究竟该如何选取一个系统的状态变量呢?

一般情况下, 状态变量的选取往往依所研究问题的性质和输入特性而定。从便于检测和控制的角度考虑, 人们可以选择能直接测量到的物理量为状态变量, 也可以选择那些为了分析、研究需要但却不能测量到的量为状态变量。当无特殊要求时, 对一个物理系统, 通常可选择系统中反映独立储能元件状态的特征量作为状态变量。例如电路中电容两端的电压、流过电感的电流, 机械系统中的速度和位置(转角)均可作为系统的状态变量。

另外, 选取的状态变量应该是相互独立的。在求解一个  $n$  阶线性定常微分方程时, 为得到一个确定的解, 就必须知道  $n$  个独立的初始条件。显然, 这  $n$  个独立的初始条件可以作为一组状态变量在初始时刻的值。所以, 在选取状态变量时, 考虑易确定初值的变量也是常用的方法之一。

## 1.1.2 实例

以下通过更多的实例来说明如何建立系统的状态空间模型, 以使大家对状态空间模型有一个更深刻的认识。这里主要是通过机理建模方法来建立系统的状态空间模型, 即