导　言

INTRODUCTION

让我们先来了解“概率论与数理统计”这门课程研究的对象和内容.

在自然界与人类社会普遍存在着两类现象：一类是确定现象，指的是在一定条件下，事情在发生之前就清楚结果如何；一类为不确定现象，即条件相同，事情的结果却不一定.例如，手拿一枚硬币，松开手，硬币往下落；种瓜得瓜，种豆得豆；早上太阳从东方升起；都属确定现象.但是，当我们关心的是落下去的硬币哪一面朝上，瓜长多大，豆结多少，日出时云是否遮挡，结果却不唯一，事前难以确定什么结果发生. 再如保险公司一年中的索赔人数，一个国家一年的国内产值 GDP，在发生之前，都难以确切知道结果.这些就属于不确定现象，也称为**随机现象**.

“概率论与数理统计”作为数学学科，关心的是随机现象的各种可能结果发生的可能性大小.

事实上，随机现象并不是一切都不确定，也有其确定的一面.以掷一枚均匀硬币为例，历史上多位数学家做过掷硬币的试验（见表 1）.发现随着投掷次数的增多，字面朝上的次数 n_1 与投掷次数 n 的比值$\frac{n_1}{n}$（称为频率）越来越接近$\frac{1}{2}$.随机现象的这一规律，即**随着试验次数的增多，任意一个结果发生的频率越来越靠近一个确定的数值，称为统计规律性，也称作频率稳定性**.正是随机现象的这一自身规律，说明了随机现象的结果发生的可能性大小是随机现象的固有特征，从而使我们对它进行量的刻画成为可能.

“概率论与数理统计”研究的对象就是随机现象的统计规律性；对于随机现象的各种结果发生的可能性大小给予定量的刻画，是“概率论与数理统计”研究的核心内容.

表 1

试验者	试验次数 n	字面朝上次数 n_1	频率 $f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

随着文化知识的普及，人们对“概率”这一数学术语已经并不陌生，有些地方的天气预报就有“明天降水概率 60%”等内容，已经知道降水概率 60%，说明下雨的可能性大，若降水概率为 20%，则表示下雨的可能性较小.“概率”就是描述随机现象的结果发生的可能性大小的量的指标.

本书的前五章介绍概率论的基本理论，简称“概率论”. 后三章介绍如何以概率论的基本理论为基础，借助统计数据对随机现象作推断，简称“数理统计”.

第一章

CHAPTER ONE

随机事件与概率

学习目标

1. 理解随机试验的特点，掌握样本点、样本空间概念；

2. 理解随机事件概念，掌握事件之间的关系及其运算；

3. 理解概率的定义，掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行概率的基本运算；

4. 掌握等可能概型定义，能熟练运用排列组合知识计算常见等可能概率问题，如随机抽样、排队、放盒子问题等；

5. 掌握几何概型的定义与概率的计算方法；

6. 熟练掌握条件概率、乘法公式、全概率公式、逆概率公式，以求较复杂事件的概率；

7. 理解两个事件相互独立的定义、推论；

8. 掌握三个事件相互独立与三个事件两两相互独立的定义及其区别；

9. 掌握伯努利概型的定义与事件 A 发生 k 次的概率的计算方法.

10. 理解实际推断原理.

重点难点提示

- 理解概率的定义，掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行概率的基本运算；
- 古典概型事件的概率计算；条件概率的理解；全概率公式与贝叶斯公式的应用；事件独立性概念的理解.

引言

任何一门数学学科都有基本术语，数量之间的基本关系，从而为进一步的讨论打下基础，“概率论与数理统计”课程也是同样.第一章介绍“概率”中用到的基本概念、术语，随机事件之间的关系与运算，概率的基本关系式，再介绍应用非常广泛的两类概率问题：等可能概型与 n 重伯努利概型.

第一节　随机事件

一、随机试验与样本空间

1. 随机试验

研究随机现象的基本方法是试验与观察，从中找出规律. 例如市场上同一品牌灯泡的寿命也会有很多种可能，要监控灯泡的质量，就要从中抽出一些灯泡进行测试，找出灯泡寿命的规律，如质量好与坏所占的比例等. 有些随机现象则只能通过客观观察进行记录，例如国内产值 GDP 则是通过记录各个年份的数据，以找出这一随机现象的规律. 为此给出以下定义.

定义 1.1　对随机现象作试验或观察，若具有如下三个特点：

（1）可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的可能结果不唯一，全部可能结果清楚；

（3）试验前不能确定哪一个结果发生.

则统称这些试验或观察为随机试验（random experiment），记作 E.

注意：关于"相同条件"只能是相对而言，事实上正因为有很多不确定因素的影响，才造成了结果的不确定性.

2. 样本点、样本空间

随机试验的每一个结果称为**样本点**（sample point），记作 e，ω 等.

全部可能结果，即全体样本点组成的集合，称为**样本空间**（sample space），记为 S，即 $S=\{e\}$.

例 1　看如下随机试验与相应的样本空间.

（1）E_1：掷一颗色子，观察朝上一面的点数.

显然这一试验可以在相同条件下重复进行，共有 6 种可能结果，投掷之前不知朝上面的点数是多少，其为随机试验.

样本空间为 $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中 1，2，3，4，5，6 点均为样本点.

（2）E_2：一枚硬币掷两次，观察朝上面的情况. 记字面朝上为正，朝下为反.

样本空间为 $S_2=\{$正正，正反，反正，反反$\}$，有 4 个样本点.

（3）E_3：记录电话交换台一段时间内接到的交换次数.

样本空间为 $S_3=\{0$ 次，1 次，2 次，$\cdots\}$，理论上说可以有无穷多次，即有无穷多样本点.

（4）E_4：对灯泡做破坏性试验，记录灯泡的寿命.

因为灯泡的寿命可以是任意的非负实数，所以样本空间可以记作

$$S_4 = [0, +\infty) \quad 或 \quad S_4 = \{t \mid t \geqslant 0\},$$

当然有无穷多个样本点.

（5）E_5：按户调查城市居民食品、服装的支出.

每个样本点为一对非负实数，记 x 为食品支出、y 为服装支出，样本空间为

$$S_{51} = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

如果将支出按某种标准分为高、低两类，则样本空间可以表示为

$$S_{52} = \{高高, 高低, 低高, 低低\}.$$

以上样本空间中，S_1，S_2，S_{52} 的样本点数都是有限个，S_3，S_4，S_{51} 中样本点数为无限个. 又 S_3 中样本点可按一定顺序排列，简称可列. S_4，S_{51} 中样本点则不可排列，因为任意两个实数之间，都还有无穷多实数.

二、随机事件的概念、关系与运算

1. 随机事件

在随机试验中人们关心的往往是某一类结果是否发生，如例 1 中 E_4，看灯泡的寿命是否大于 1 000 小时，记 $A = \{t \mid t \geqslant 1\,000\}$，显然 A 是样本空间 $S_4 = [0, +\infty)$ 的一个子集. 在概率论中我们称 $A = \{t \mid t \geqslant 1\,000\}$ 是随机试验 E_4 的一个随机事件. 通俗地说，随机事件是随机试验的一部分样本点组成的集合. 下面给出数学定义.

定义 1.2　随机试验 E 的样本空间 S 的子集，称为 E 的随机事件（random event），常记为 A，B，C 等.

随机事件发生是常用的一个术语，规定：

$$随机事件\ A\ 发生 \Leftrightarrow 随机试验时\ A\ 中的一个样本点出现.$$

注　符号"$\Leftrightarrow$"表示连接的二者等价. 即若随机事件 A 发生，随机试验中一定有 A 中的一个样本点出现，反之，若随机试验中 A 中的一个样本点出现，表示随机事件 A 发生.

下面是特殊的随机事件.

基本事件：一个样本点构成的事件，记作 $\{e\}$ 或 e.

必然事件：每次试验都必然发生的事件，即样本空间 S.

不可能事件：每次试验都不会发生的事件，即空集 $\varnothing$.

例如，随机试验 E 为掷色子，观察朝上面的点数，样本空间 $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 设 $A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{4, 5, 6\}$. 看下面分析，体会随机事件发生的涵义：

（1）一次试验，说随机事件 A 发生，必然是 2，4，6 点中有一个样本点出现；反过来 2，4，6 点中无论哪一个样本点出现，即为随机事件 A 发生.

（2）一次试验，如果出现 4 点或 6 点，说明事件 A，B 都发生了. 常称作随机事件 A 且 B 发生.

2. 事件间的关系和运算

事件是集合,因此事件的关系和运算就是集合的关系和运算,在概率论中只是从事件的角度给出新的术语.例如事件的包含、相等就是集合的包含、相等,在概率论中,我们要强调的是从发生的角度去理解事件的关系和运算.

设 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 等均为随机事件.

(1) 事件的包含

从集合的角度定义:

若任意样本点 e 属于事件 A,一定有 e 属于事件 B,则称事件 B 包含事件 A,也称事件 A 包含于事件 B,记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

从发生的角度定义:

若事件 A 发生,事件 B 一定发生,则称事件 B 包含事件 A.

该定义用等价符号"$\Leftrightarrow$"可以记作:

事件 B 包含事件 $A\Leftrightarrow$ 若事件 A 发生,则事件 B 一定发生.

注 符号"$\Leftrightarrow$",称作等价符号.如"甲$\Leftrightarrow$乙",表示有甲一定有乙,且有乙一定有甲.

用平面上的区域分别表示样本空间 S 和事件 A,B,称为文氏图.则 $B\supset A$,如图 1.1 所示.

通俗地说,即事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点,则称事件 B 包含事件 A.

(2) 事件相等

如果随机事件 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$.

从发生角度理解:

若随机试验时,事件 A 与事件 B 同时发生,则称事件 A 与事件 B 相等,即

$$A=B\Leftrightarrow A,B\text{ 同时发生}.$$

通俗地讲,即事件 A,B 所含样本点完全相同.

(3) 和事件

事件 $A+B$(也记作 $A\cup B$),称为事件 A,B 的和事件.

从发生角度理解:

和事件 $A\cup B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生或事件 B 发生(常称作事件 A,B 至少有一个发生).

和事件 $A\cup B$ 如图 1.2 中阴影部分所示.

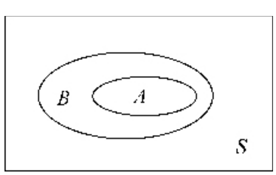


图 1.1

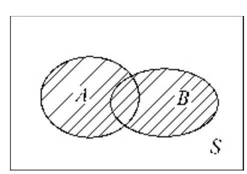


图 1.2

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记作

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_n \quad \text{或} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n .$$

从发生角度理解：

$$\text{和事件} \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ 发生} \Leftrightarrow \text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n \text{中至少有一个发生.}$$

无限可列事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和记作

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots \quad \text{或} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots ,$$

（4）事件的积

事件 AB(也记作 $A\cap B$)，称为事件 A,B 的积事件.

从发生角度理解：

事件 AB 发生$\Leftrightarrow$事件 A 发生且事件 B 发生(即事件 A,B 同时发生).

事件 AB 如图 1.3 中阴影部分所示.

n 个事件的积事件记作

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1A_2\cdots A_n \quad \text{或} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n .$$

无限可列事件的积记作

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

从发生角度理解：

$$\text{积事件}\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{发生} \Leftrightarrow \text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{同时发生.}$$

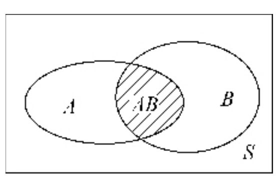


图　1.3

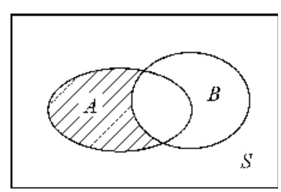


图　1.4

（5）事件的差

事件 $A\backslash B=\{e|e\in A$ 且 $e\notin B\}$称为事件 A 与事件 B 的差事件，即由属于 A 而不属于 B 的样本点构成的事件，称为 A 与 B 的差事件 $A\backslash B$.

从发生角度理解：

差事件 $A\backslash B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生且 B 不发生.

事件 $A\backslash B$ 如图 1.4 中阴影部分所示.

（6）事件互斥（也称事件互不相容）

若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥.

从发生角度理解：

$$A,B\text{ 互斥}\Leftrightarrow A,B\text{ 不会同时发生}.$$

A,B 互斥如图 1.5 所示.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件 A_i,A_j 满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，也简称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥.

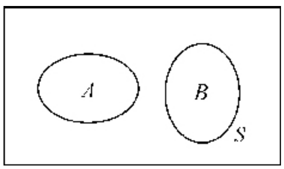


图 1.5

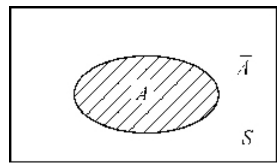


图 1.6

（7）事件的对立

如果 $AB=\varnothing$，且 $A+B=S$，则称事件 A,B 互为对立事件，也称 A,B 互为逆事件，记 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$.

从发生的角度理解：

A,B 互为对立事件$\Leftrightarrow$每次试验 A,B 有一个发生，且仅有一个发生.

图示如图 1.6.

例 2 随机试验 E 为掷色子，观察朝上面的点数，样本空间 $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$. 设 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{4,5,6\}$，$C=\{6\}$，求 $A+B$，$A\backslash B$，$B\backslash A$，AB，$\overline{A}$，$\overline{B}$.

解析 和事件 $A+B$ 应该是由 A 的样本点与 B 的样本点合起来构成的事件，所以

$$A+B=\{2,4,5,6\}.$$

差事件 $A\backslash B$ 应该是由属于 A 而不属于 B 的样本点构成的事件，所以

$$A\backslash B=\{2\}.$$

差事件 $B\backslash A$ 则是由属于 B 而不属于 A 的样本点构成的事件，所以

$$B-A=\{5\}.$$

积 AB 是由事件 A 与 B 共有的样本点构成的事件，所以

$$AB=\{4,6\}.$$

$\overline{A}$ 为 A 的逆事件，是由属于样本空间而不属于 A 的所有样本点构成的事件，所以

$$\overline{A}=\{1,3,5\}.$$

则

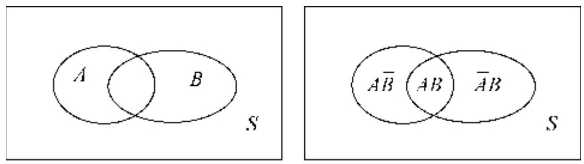
$$\overline{B}=\{1,2,3\}.$$

注 ① 若随机事件 A,B 相互对立，则 A,B 互斥；反之不一定成立.

② 设 A,B,C 为任意随机事件，$\varnothing$为不可能事件，S 为样本空间，则有下列关系：

- $\varnothing \subset AB \subset A$（或 B）$\subset A+B \subset S$；
- 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$；
- $A+\varnothing=A$，$A+A=A$，$A+S=S$，$A\varnothing=\varnothing$，$AA=A$，$AS=A$；
- 若 $A\subset B$，则 $A+B=B$，$AB=A$，$\overline{A}\supset\overline{B}$.

③ 几个常用变形



(a)　　(b)

图　1.7

由图 1.7 容易得出下面结论：

$$A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B},$$

意义在于使得不是互斥的两个事件的和转化为互斥的两个事件的和.

$$A=AB+A\overline{B},$$

使事件拆为两个互斥事件的和.

$$A\backslash B=A\backslash AB,$$

意义在于使得不是包含关系的两个事件的差转化为包含关系的两个事件的差.

因为事件 $A\backslash B$ 发生表示 A 发生且 B 不发生，也即 A 发生且 $\overline{B}$ 发生，所以又有

$$A\backslash B=A\overline{B},$$

$$\overline{A}=S\backslash A.$$

在后面的学习中，我们会逐渐体会到这些变形的意义.

④ 运算顺序应该是先逆，后积，最后是和与差.

例 3　甲、乙、丙三位射手向同一目标各射击一次，设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙命中目标事件.

(1) 用 A,B,C 表示下列事件：

① 目标被击中，即至少有 1 人击中目标，应该是 $A+B+C$.

② 目标被击中一次，即为 3 人中有 1 人击中目标，且其他人未击中目标，所以应该是

$$A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C.$$

(2) 用文字叙述下列事件：

① $AB+AC+BC$.

其为甲命中且乙命中，或甲命中且丙命中，或乙命中且丙命中. 既然是“或”，则不排斥都

命中，可以概括为：3 人中至少有 2 人命中目标.

② $\overline{A+B}$.

$A+B$ 是甲、乙，至少 1 人命中目标，$\overline{A+B}$是 $A+B$ 的对立事件，则 $\overline{A+B}$是甲、乙都没命中. 所以又有$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$.

③ $\overline{AB}$.

AB 为甲、乙都命中，AB 的对立事件$\overline{AB}$应该是甲、乙非都命中，即甲没命中或乙没命中，也即甲乙至少有 1 人没命中. 所以又有$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

3. 事件的运算律

(1) 交换律

$A+B=B+A$，即 $A\cup B=B\cup A$；

$AB=BA$，即 $A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律

$A+(B+C)=(A+B)+C$，即 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A(BC)=(AB)C$，即 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律

$A+BC=(A+B)(A+C)$，即 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A(B+C)=AB+AC$，即 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德·摩根律(De Morgan)

$\overline{A+B}=\overline{A}\overline{B}$，即$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$，即$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德·摩根律推广

$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n$；

$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n$.

从集合或从事件发生的角度，运算律(1)、(2)都显然成立. 下面试从发生的角度证明(3)分配律中第一个等式 $A+BC=(A+B)(A+C)$ 成立.

证明 设左边事件 $A+BC$ 发生，即 A 发生或 BC 发生. 若 A 发生，则 $A+B$ 发生，且 $A+C$ 发生，右边事件$(A+B)(A+C)$发生. 若 BC 发生，即 B 发生且 C 发生，则 $A+B$ 发生且 $A+C$ 发生，即$(A+B)(A+C)$发生. 所以左边事件 $A+BC$ 发生，必有右边事件$(A+B)(A+C)$发生.

设右边事件$(A+B)(A+C)$发生，即 $A+B$ 与 $A+C$ 同时发生. $A+B$ 发生，即 A 发生或 B 发生，若 A 发生，则左边事件 $A+BC$ 发生；若 A 未发生，则必有 B 发生，且 C 发生，即 BC 发生，也即 $A+BC$ 发生. 所以右边事件$(A+B)(A+C)$发生必有左边事件 $A+BC$ 发生.

综上可知，等式成立.

关于德·摩根律从例 3(2)②、③的分析、推导可知.