第 1 章
湍流的性质

本章简要介绍湍流的性质、主要平均特性和数值模拟方法。

1.1 湍流的基本性质

1.1.1 不规则性

湍流又称紊流，它是一种极不规则的流动现象。

湍流的不规则性不仅表现在速度、压强等流动物理量在时空中的不规则分布，还表现在它的不重复性。以无限长圆管内的牛顿流体流动为例，在相同压强梯度、粘度和温度等条件下重复实验，如果流动的雷诺数很小，则流动是层流，不论圆管内的初始状态是什么状态，当流动达到稳定状态后，圆管内沿径向的速度分布一定是抛物线形状，管壁切应力恒定不变。这种层流运动状态完全由流体性质和边界条件确定。当流动的雷诺数超过某一临界值后，圆管内的流动发展为湍流。这时重复实验，同一空间点上测得的速度时间序列总是不相同的，同样，速度在空间的分布也是不可重复的。图 1-1 显示在不同时刻采集的圆管湍流中心线上的流向脉动速度($Re=6000$)。可以看到，两次采集的速度时间序列都是极不规则的，并且两次采集的结果没有重复性。

如果实验次数用自变量 $\tilde{\omega}$ 表示(例如第 1 次实验 $\tilde{\omega}=1$，第 2 次实验 $\tilde{\omega}=2$，等等)，则不能重复的湍流速度场是时间、空间坐标和实验次数 $\tilde{\omega}$ 的不规则函数：

$$u_i = u_i(\boldsymbol{x}, t, \tilde{\omega}) \tag{1.1}$$

给定 $\tilde{\omega}$ 的一次实验流场称为一个样本流动，式(1.1)提供研究不规则湍流运动的描述方法，它包含样本流动中湍流物理量的丰富信息。例如，将

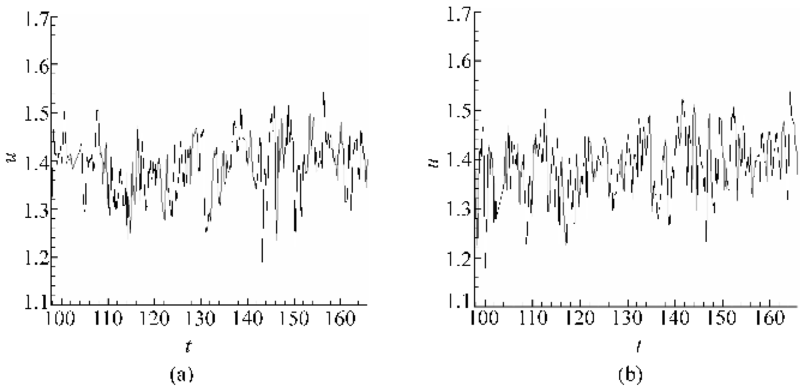

图 1-1 圆管中心流向速度的两次实验的时间序列

式(1.1)中所有实验次数做统计平均,可以获得平均速度,并用$\langle u_i \rangle$表示,样本流动速度和平均速度之差称为脉动速度,并用 u_i'表示,即

$$u_i'(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) = u_i(\boldsymbol{x},t,\tilde{\omega}) - \langle u_i \rangle \tag{1.2}$$

类似地,可以定义平均压强、平均温度和脉动压强、脉动温度等。湍流平均量是不规则湍流物理量最基本的信息,更丰富的湍流物理量信息包含在脉动量中。

1.1.2 多尺度性

湍流是在连续介质范畴内流体的不规则运动,它包含许多不同尺度的运动。以脉动速度的时间序列为例(图 1-1),对很长时间序列的脉动速度作傅里叶分析①,就可以发现湍流脉动速度具有连续的频谱:

$$\hat{u}_i(\boldsymbol{x},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_i'(\boldsymbol{x},t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t \tag{1.3}$$

频率的倒数是周期,它是一种时间尺度。脉动速度的频谱(图 1-2)表示湍流运动具有不同时间尺度成分。通常时间尺度很小(频率很高)或时间尺度很长(频率很低)的脉动成分很少,某一时间尺度的脉动含有的动能最大。

在空间上,脉动速度也具有不同尺度成分,对于空间均匀的湍流(关于均匀脉动的概念,后面有详细的定义),可以用傅里叶分析获得脉动的波谱:

$$\hat{u}_i(t,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x},t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.4}$$

① 湍流脉动是不规则函数,这里的傅里叶积分应理解为广义傅里叶积分(Batchelor,1953)

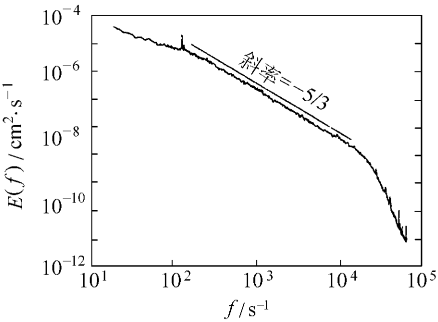

图 1-2　脉动速度的频谱示意图，$E(f)$是脉动速度平方的频谱

波数的倒数是波长，它是一种长度尺度。脉动速度的波谱如图 1-3 所示，它表示脉动速度动能在空间各尺度上（波数上）的分布。

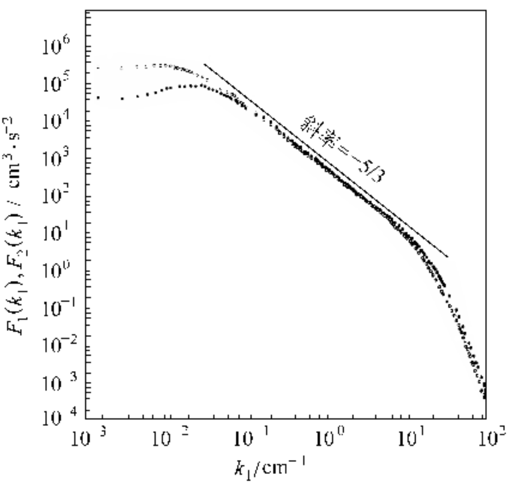

图 1-3　脉动速度的波谱示意图

湍流运动的多尺度特性不仅给分析这种运动带来困难，而且数值模拟这种运动需要精细的数值方法和容量很大的计算机。

1.1.3　复杂的非线性输运

湍流运动的不规则性和多尺度性质导致湍流脉动间复杂的非线性输运特性。必须强调指出，湍流是流体微团的不规则运动，湍流脉动的最小时间

尺度和最小空间尺度都远远大于分子热运动的相应尺度。因此对于每一个样本流动，即一次实验流动，都服从流动的宏观守恒方程，对于不可压缩牛顿流体来说，湍流的控制方程是纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程，简称 N-S 方程：

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.6}$$

式(1.5)中 $u_j \partial u_i / \partial x_j$ 是非线性项，它属于流体微团的惯性项，如果将它写作$\partial u_i u_j / \partial x_j$，它表示微团动量通量（张量）的散度。在流动的欧拉描述法中，它表示微团动量的空间输运。如果湍流脉动速度用傅里叶展开表示，脉动动量输运等于：

$$u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \mathrm{i} \sum_{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{m}=\boldsymbol{k}} k_j \hat{u}_j(\boldsymbol{l})\, \hat{u}_i(\boldsymbol{m}) \tag{1.7}$$

上式表示湍流脉动动量输运是各种尺度脉动非线性相互作用之和。在湍流场中，质量、能量的湍流输运也有类似的非线性相互作用。在后文中将可以看到湍流脉动的非线性输运是主宰湍流运动的重要性质。

湍流脉动的不规则性、多尺度性和复杂的非线性输运是湍流运动的主要性质。

1.2 湍流的统计方法和统计特性

1.2.1 湍流的统计平均

1. 系综平均

不规则的湍流运动需要用统计方法描述它的平均运动特性，式(1.1)是湍流运动的最基本描述方法，将所有样本（即在给定边界条件下一切可能的运动状态）速度场做算术平均，称为湍流的系综平均，即

$$\langle u_i \rangle(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\tilde{\omega}=1}^{N} u_i(\boldsymbol{x}, t, \tilde{\omega}) \tag{1.8}$$

系综平均是最一般的随机量的平均方法，系综平均的速度场可以是非定常和非均匀的。系综平均运算是样本的算术平均，因此它和求导运算可交换。就是说样本速度导数的系综平均等于系综平均速度的导数，即

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle (\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_j} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tilde{\omega}=1}^{N} \frac{\partial u_i (\boldsymbol{x}, t, \tilde{\omega})}{\partial x_j} \tag{1.9a}$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle (\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tilde{\omega}=1}^{N} \frac{\partial u_i (\boldsymbol{x}, t, \tilde{\omega})}{\partial t} \tag{1.9b}$$

2. 概率平均

如果已知不规则速度场 $u_i(\boldsymbol{x}, t)$ 在任意时空点上的概率密度分布 $p(u_i, \boldsymbol{x}, t)$，则可以用积分方法计算平均速度：

$$\langle u_i \rangle (\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i p(u_i, \boldsymbol{x}, t) \mathrm{d} u_i \tag{1.10}$$

可以证明概率平均等价于系综平均。

3. 雷诺时间平均

如果系综平均或概率平均的速度场与时间无关，这种湍流速度场属于时间平稳态的不规则运动，称为定常湍流。这里提醒读者，定常湍流是指湍流平均场是定常的，不要和湍流样本运动混淆，湍流样本流动总是非定常的。对于定常湍流，可以用时间平均取代系综平均和概率平均，时间平均是雷诺最早提出的湍流平均方法，故又称雷诺平均(Reynolds，1894)，公式如下：

$$\bar{u}_i(\boldsymbol{x}) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} u_i(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d} t \tag{1.11}$$

雷诺平均用上画线“—”表示，以区别于系综平均或概率平均。由式(1.11)可见，雷诺平均的结果和时间无关，就是说无论从时间序列中哪一时刻开始计算，平均值都是相等的。

系综平均结果和时间无关的不规则运动称做时间平稳态，对时间平稳态有各态遍历定理，该定理证明：时间平稳态的不规则运动的系综平均和雷诺时间平均相等。从运动性质上来理解各态遍历定理，就是说，平稳的不规则运动的时间序列取尽了系综中所有可能的速度值。

4. 空间平均

如果系综平均速度场和空间坐标无关，称做空间均匀湍流，或简称均匀湍流。这时系综平均可以用体积平均取代：

$$\langle u_i \rangle (t) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} u_i(\boldsymbol{x}, t) \mathrm{d} x_1 \mathrm{d} x_2 \mathrm{d} x_3 \tag{1.12}$$

也可以用各态遍历定理证明：均匀湍流场中湍流量的系综平均等于体积

平均。

有些湍流运动中，系综平均速度在某一方向或两个方向上是均匀的，则可以用均匀方向上的线平均或面平均取代系综平均。

总之，系综平均是一般的统计平均，本书在论述或表示湍流统计量时都用系综平均，在具体计算时，根据湍流运动的性质，采用时间平均、体积平均、面平均或线平均。

1.2.2 湍流脉动速度的矩和相关

湍流样本速度和系综平均速度之差称为脉动速度，即式(1.2)，

$$u_i'(\boldsymbol{x},t,\widetilde{\omega}) = u_i(\boldsymbol{x},t,\widetilde{\omega}) - \langle u_i \rangle$$

为了简明起见，略去样本变量 $\widetilde{\omega}$，脉动速度等于

$$u_i'(\boldsymbol{x},t) = u_i(\boldsymbol{x},t) - \langle u_i \rangle \tag{1.13}$$

1. 脉动速度的矩

脉动速度乘积的系综平均值称为脉动速度的矩，乘积包含的因子数定义为阶数。

(1) 脉动速度的平均值，即 1 阶矩，等于零

将式(1.13)做系综平均，有

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x},t) \rangle = \langle u_i(\boldsymbol{x},t) \rangle - \langle \langle u_i \rangle \rangle$$

由于系综平均速度$\langle u_i \rangle$是确定性量，对它作系综平均等于平均速度，即

$$\langle \langle u_i \rangle \rangle = \langle u_i \rangle$$

于是就证明了：

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x},t) \rangle = 0 \tag{1.14}$$

(2) 脉动速度的高阶矩

脉动速度平方、立方和高次方的系综平均称做脉动速度的高阶矩。3 个脉动速度分量平方的系综平均值之和的一半等于脉动运动的动能，并称做湍动能，用 k 表示：

$$k = \frac{1}{2}(\langle u_1' u_1' \rangle + \langle u_2' u_2' \rangle + \langle u_3' u_3' \rangle) = \frac{1}{2}\langle u_i' u_i' \rangle \tag{1.15}$$

2. 脉动速度分量间的相关

(1) 一点相关

时空中同一点两个速度分量乘积的系综平均值称为速度的一点 2 阶相

关，记作 $R_{ij}(\boldsymbol{x},t)$，即有

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t)u'_j(\boldsymbol{x},t)\rangle \tag{1.16}$$

脉动速度一点 2 阶相关有 9 个量，很容易证明它们组成 2 阶正定对称张量。

同理，3 阶相关的定义是

$$R_{ijk}(\boldsymbol{x},t)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t)u'_j(\boldsymbol{x},t)u'_k(\boldsymbol{x},t)\rangle \tag{1.17}$$

它是 3 阶张量。2 阶速度相关的物理意义是局部脉动动量通量的平均值，一点 3 阶相关的物理意义是脉动动量的湍流输运的平均值。

（2）时间相关

同一空间点不同时刻的两个脉动速度分量乘积的系综平均称为速度时间相关，记作 $R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,t_2)$，

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,t_2)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_2)\rangle \tag{1.18a}$$

令 $\tau=t_2-t_1$，并称之为相关时间，式(1.18a)可写作：

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,\tau)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle \tag{1.18b}$$

时间相关的物理意义是脉动速度在时间序列上的相互联系。当 $\tau=0$ 时，时间相关等于 $t=t_1$ 时的一点相关。一般来说，相隔很长时间的 2 个湍流脉动速度场之间几乎不相关，就是说，当 $\tau\to\infty$时，时间相关等于零，即

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},t_1,\infty)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_1+\infty)\rangle=0$$

脉动速度的 2 阶时间相关也是 2 阶张量，但是没有对称性，因为

$$\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_2)\rangle\neq\langle u'_j(\boldsymbol{x},t_1)u'_i(\boldsymbol{x},t_2)\rangle$$

如果时间相关只和相关时间有关，即

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle$$

这种脉动速度场称为时间平稳态。它的意义在于不论时间相关的起始时刻 t_1 从什么时候算起，只要相关时间间隔 τ 相等，相关值就相同。时间平稳态的 2 阶速度相关有以下性质：

$$R_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)=R_{ji}(\boldsymbol{x},-\tau) \tag{1.19}$$

因为

$$\begin{aligned}R_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)&=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_2-\tau)u'_j(\boldsymbol{x},t_2)\rangle\\&=R_{ji}(\boldsymbol{x},-\tau)\end{aligned}$$

还可以定义 2 个时刻间的 3 阶时间相关：

$$R_{i,jk}(\boldsymbol{x},\tau)=\langle u'_i(\boldsymbol{x},t_1)u'_j(\boldsymbol{x},t_1+\tau)u'_k(\boldsymbol{x},t_1+\tau)\rangle \tag{1.20}$$

以此类推，可以定义 2 个时刻间的 n 阶相关。

（3）空间相关

同一时刻不同空间点的两个脉动速度分量乘积的系综平均称为速度空

间相关，记作 $R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t)$，

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_2,t)\rangle \tag{1.21a}$$

令 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$，并称之为相关距离，式(1.21a)可写作

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi},t)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t)\rangle \tag{1.21b}$$

空间相关的物理意义是脉动速度在空间上的相互联系。当 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$ 时，空间相关等于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1$ 时的一点相关。一般来说，相隔很长距离的 2 个脉动速度场几乎不相关，就是说，当 $\boldsymbol{\xi}\to\infty$ 时，空间相关等于零，即

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\infty,t_1)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t_1)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\infty,t_1)\rangle=0 \tag{1.22}$$

脉动速度的 2 阶空间相关也是 2 阶张量，但是没有对称性，因为

$$\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_2,t)\rangle\neq\langle u_j'(\boldsymbol{x}_1,t)u_i'(\boldsymbol{x}_2,t)\rangle$$

如果空间相关只和相关距离有关，即

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi},t)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t)\rangle$$

这种脉动速度场称为是空间平稳的，或空间均匀的。它的统计意义是不论空间相关的起始位置 $\boldsymbol{x}_1$ 在什么地方，只要相关距离 $\boldsymbol{\xi}$ 相等，相关值就相同。空间平稳态的 2 阶速度相关有以下性质：

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi},t)=R_{ji}(-\boldsymbol{\xi},t) \tag{1.23}$$

因为

$$\begin{aligned}R_{ij}(\boldsymbol{\xi},t)&=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t)\rangle=\langle u_j'(\boldsymbol{x}_2,t)u_i'(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{\xi},t)\rangle\\&=R_{ji}(-\boldsymbol{\xi},t)\end{aligned}$$

还可以定义 2 点间的 3 阶空间相关：

$$R_{i,jk}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi},t)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t)u_k'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t)\rangle \tag{1.24}$$

以此类推，可以定义空间 2 点间的 n 阶相关。

(4) 时空相关

两个时空点上脉动速度分量乘积的系综平均称为时空相关，记作 $R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t_1,t_2)$，

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t_1,t_2)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t_1)u_j'(\boldsymbol{x}_2,t_2)\rangle \tag{1.25a}$$

令 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$，$\tau=t_2-t_1$，式(1.25a)可写作：

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi},t_1,\tau)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t_1+\tau)\rangle \tag{1.25b}$$

对于空间和时间上都是平稳的脉动速度，两点时空相关只与 $\boldsymbol{\xi}$ 和 τ 有关：

$$R_{ij}(\boldsymbol{\xi},\tau)=\langle u_i'(\boldsymbol{x}_1,t_1)u_j'(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\xi},t_1+\tau)\rangle$$

同理，可以定义高阶的时空相关。

(5) 任意脉动量之间的相关

一般来说，相关是随机函数之间联系程度的统计描述，脉动速度和压强

脉动之间的相关称为压强速度相关；脉动速度和脉动温度之间的相关称为速度温度相关，以此类推。

脉动温度以 θ' 表示，它和脉动速度的相关表示为 $R_{i\theta}=\langle u_i'\theta'\rangle$，一点速度温度相关 $R_{i\theta}$ 的物理意义是温度的湍流输运，它是一个向量，在湍流的能量输运中起重要作用。脉动速度和压强的相关用 R_{ip} 表示，它也是一个向量，在湍流动量输运中起重要作用。

（6）相关函数的符号规则

相关函数中脉动速度用下标 i,j,k 表示各分量，相关的物理量是标量的话，用标量的符号表示，例如上面提到的 $R_{i\theta}$ 是脉动速度分量 u_i' 和温度脉动的相关。3 阶和 3 阶以上的空间相关函数，在下标间用逗号表示不同时空位置。例如相关函数 $R_{i,jk}$ 表示 u_j' 和 u_k' 在同一空间点上，而 u_i' 在另一空间点；而 $R_{i,j,k}$ 表示 u_i'，u_j' 和 u_k' 在 3 个不同空间点上。

（7）不可压缩均匀湍流中脉动速度相关的性质

不可压缩均匀湍流的 2 阶速度相关函数有以下等式：

$$\frac{\partial R_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}=\frac{\partial\langle u_i'(\boldsymbol{x})u_j'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle}{\partial \xi_j}=0 \tag{1.26a}$$

$$\frac{\partial R_{ij}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i}=\frac{\partial\langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle}{\partial \xi_i}=0 \tag{1.26b}$$

导出以上公式时，需要用到以下导数公式：

$$\frac{\partial f(x+y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x+y)}{\partial y}=\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f(x-y)}{\partial x}=-\frac{\partial f(x-y)}{\partial y}=\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta}$$

公式中 $\xi=x+y$，$\eta=x-y$。2 阶两点速度相关的导数公式可做如下描述（注意：位置向量 $\boldsymbol{x}$ 和相关距离向量 $\boldsymbol{\xi}$ 是两个独立的自变量）：

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_p}=\frac{\partial\langle u_i'(\boldsymbol{x})u_j'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle}{\partial \xi_p}=\left\langle u_i'(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_j'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_p}\right\rangle=\left\langle u_i'(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_j'(\boldsymbol{x}')}{\partial x_p'}\right\rangle$$

和

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial \xi_p}=\langle u_i'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})u_j'(\boldsymbol{x})\rangle=\left\langle u_j'(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_i'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_p}\right\rangle=-\left\langle u_j'(\boldsymbol{x})\frac{\partial u_i'(\boldsymbol{x}')}{\partial x_p'}\right\rangle$$

在上面第一式中令 $p=j$，因有不可压缩流体的连续性方程：$\partial u_j'(\boldsymbol{x})/\partial x_j=0$，于是式（1.26a）得证。同理，在上面第二式中，令 $p=i$，可以证明式(1.26b)成立。

1.2.3 湍流脉动的谱

1. 定常湍流中的频谱

定常湍流中时间相关函数的傅里叶变换称为对应相关变量的频谱。

例如，2 阶脉动速度的时间相关函数 $R_{\alpha\alpha}(\tau)=\langle u'_\alpha(t)u'_\alpha(t+\tau)\rangle$ 可变换到频率空间获得脉动速度的频谱(本书约定重复的希腊字母下标不求和，重复的英文字母下标求和)：

$$S_{\alpha\alpha}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\alpha\alpha}(\tau)\exp(-\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.27}$$

式(1.27)的逆变换是

$$R_{\alpha\alpha}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{\alpha\alpha}(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega\tau)\mathrm{d}\omega \tag{1.28}$$

频谱和时间相关函数是一一对应的，它们是统计量在时域和频域之间的转换。脉动速度频谱有特殊意义，令 $\tau=0$，则 $R_{ii}(0)=\langle u'_i u'_i\rangle$，它是一点脉动动能平均值的 2 倍；另一方面，由式(1.28)可得 $R_{ii}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{ii}(\omega)\mathrm{d}\omega$，因而有

$$\langle u'_i u'_i\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}S_{ii}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{1.29}$$

上式左端表示 2 倍脉动动能的系综平均，右端 $S_{ii}(\omega)$ 表示 2 倍湍动能在频带中的分布。

2. 均匀湍流场中的波谱

均匀湍流场中空间相关函数的傅里叶变换称为对应相关变量的波数谱，简称波谱或谱。

例如均匀湍流场中脉动速度的 2 阶相关函数 $R_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\xi})=\langle u'_\alpha(\boldsymbol{x})u'_\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle$ 的波谱为

$$S_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\xi})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 \tag{1.30}$$

式中，$\boldsymbol{k}=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3$ 是波数向量；$\boldsymbol{e}_i$ 是单位向量。利用逆变换，可得

$$R_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\xi})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{k})\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3 \tag{1.31}$$

因此，空间相关函数和波谱函数是一一对应的，它是统计量在物理空间和波数空间之间的变换。