

信号与系统的基本概念

内 容 提 要

本章讲述信号与系统的基本概念、信号的定义与分类、基本的连续时间信号和离散时间序列,详细阐述了冲激信号性质。在此基础上,介绍了连续时间信号与离散时间序列的基本运算、时域变换及时域分解、系统的定义与分类、线性时不变系统的性质、线性系统分析概论。最后介绍利用 MATLAB 表示信号、实现信号的基本运算。

1.1 信号的定义与分类

1.1.1 信号的定义

“信号”一词在人们的日常生活与社会活动中有着广泛的含义。例如,机械振动产生力信号、位移信号及噪声信号;雷电过程产生的声、光信号;大脑、心脏运动分别产生脑电信号和心电信号;电气系统随参数变化产生电磁信号等。在通信技术中,通常将语言、文字、图像、数据、符号等统称为消息,在消息中通常包含大量的信息。通信就是从一方向另一方传送消息,给对方以信息。信息是反映人们得到的“消息(即原来不知道的知识)”,信息是人类认识客观世界和改造客观世界的知识源泉。获取信息、传输信息和交换信息,自古至今一直是人类基本的社会活动。但是,信息一般都不能直接传送,它必须借助于一定形式的信号(光信号、声信号、电信号等),才能远距离快速传输和进行各种处理。因此,广义地说,信号是带有信息的随时间变化的物理量或物理现象;严格地说,信号是指消息的表现形式与传送载体,而消息则是信号的具体内容。

若信号表现为电压、电流、电荷、磁通,则称为电信号,它是现代科学技术中应用最广泛的信号,电易于产生与控制,传送速度快,也容易实现与其他能量的相互转换。因此,本课程将只讨论电信号。电信号通常是随时间变化的电压或电流。由于信号是随时间变化的,在数学上常用时间 t 的函数 $f(t)$ 来表示。信号随时间变量 t 变化的函数曲线称为信号的波形。

值得注意的是,信号与函数在概念的内涵与外延上是有区别的。信号一般是时间变量 t 的函数,但函数并不一定都是信号,信号是实际的物理量或物理现象,而函数则可能只是一种抽象的数学定义。本书对信号与函数两个概念混用,不予区分。

信号的特性可以从时间特性和频率特性两方面来描述。信号的时域特性指的是信号的波形、出现时间的先后、持续时间的长短、随时间变化的快慢和大小、重复周期的大小等。信号时域特性的这些表现,反映了信号中所包含的信息内容。信号频域特性的内涵,将在第3章中阐述。

1.1.2 信号的分类

信号的分类方法很多,可以从不同角度对信号进行分类。在信号与系统分析中,根据信号与自变量的特性,信号可分为以下几种类型。

1. 确定信号与随机信号

按时间函数的确定性划分,信号可分为确定信号与随机信号。

确定信号(determinate signal)是指能够以确定的时间函数表述的信号。对任一确定时刻,信号有确定的函数值。也就是预先可以知道它的变化规律,即该信号在其定义域内的任意时刻都有确定的函数值,如正弦信号、周期脉冲信号等。

随机信号(random signal)也称为不确定信号,它不是时间的确定函数,即不能用数学关系式描述。其幅值、相位变化是不可预知的,通常只能通过大量的试验测出它在某些确定时刻上取某些值的可能性的分布(概率分布),如噪声信号、汽车行驶时所产生的振动信号等。但是在一段时间内,由于它的变化规律比较确定,可以近似为确定信号。为了分析方便,我们首先研究确定信号,在此基础上可以根据随机信号的统计规律再研究随机信号。本书只研究确定信号。

图1.1给出了几种简单信号的波形,其中图1.1(a)~(e)所示各信号均是确定信号,而图1.1(f)所示信号是随机信号,无法写出其函数表达式。

2. 周期信号与非周期信号

对于确定信号,按照时间函数的周期性划分,信号可以分为周期信号、非周期信号与准周期信号。

周期信号(periodic signal)是指按某一固定时间重复出现的信号。连续周期信号与离散周期信号的数学表达式分别为

$$f(t) = f(t + T), \quad -\infty < t < \infty \quad (1.1)$$

$$f[k] = f[k + N], \quad -\infty < k < \infty, k \text{ 取整数} \quad (1.2)$$

满足上述关系式的最小 T 、 N 值称为周期信号的基波周期(fundamental period)。这种信号,只要给出任一周期内的变化规律,即可确定它在所有其他时间内的规律性,如图1.1(c)所示。周期信号有三个特点:

- (1) 周期信号必须在时间上是无始无终的,即自变量时间 t 的定义域为 $-\infty < t < \infty$ 。
- (2) 随时间变化的规律必须具有周期性,其周期为 T 或 N 。
- (3) 在各周期内信号的波形完全一样。

非周期信号(aperiodic signal)在时间上不具有周而复始的特性,往往具有瞬变性,也可以看作为周期 T 趋于无穷大时的周期信号,如图1.1(a)、(b)和(e)所示。

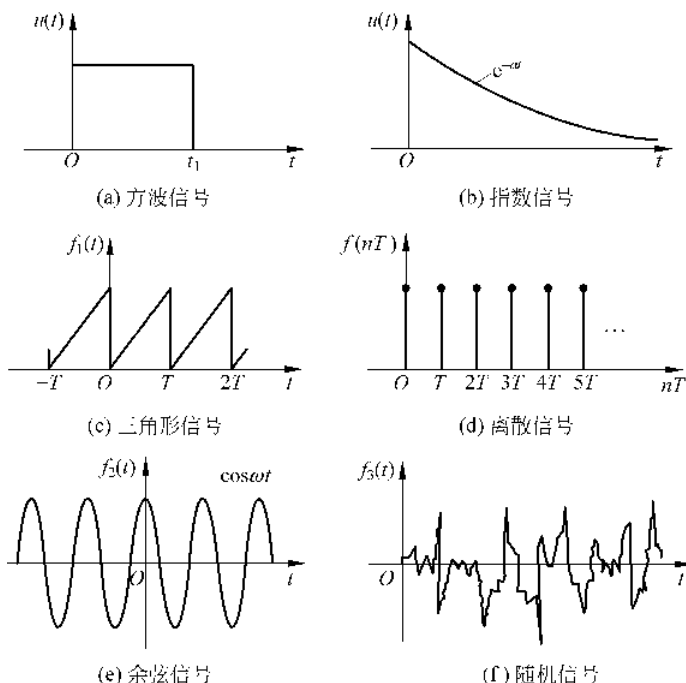


图 1.1 简单信号的波形

准周期信号是周期与非周期的边缘情况,由有限个周期信号合成,但各周期信号的频率相互间不是公倍数关系,其合成信号不满足周期条件。这种信号往往出现在通信领域。如信号

$$f(t) = \cos t + \cos(\sqrt{2}t) \quad (1.3)$$

【例 1-1】 判断离散余弦信号 $f[k] = \cos \Omega_0 k$ 是否为周期信号。

解 根据周期信号的定义,如果 $\cos \Omega_0(k+N) = \cos \Omega_0 k$,则 $f[k]$ 是周期信号。因为

$$\cos \Omega_0(k+N) = \cos(\Omega_0 k + \Omega_0 N)$$

若为周期信号,应满足

$$\Omega_0 N = m2\pi, \quad m \text{ 为正整数}$$

或

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}, \quad m/N \text{ 为有理数}$$

因此,只有在 $\Omega_0/2\pi$ 为有理数时, $f[k] = \cos \Omega_0 k$ 才是一个周期信号。

3. 连续时间信号与离散时间信号

不论周期信号还是非周期信号,按照信号自变量的取值是否连续划分,信号可分为连续时间信号与离散时间信号,简称连续信号与离散信号。

连续信号(continuous signal)是指在信号的定义域内,除若干个第一类间断点外,对于任意时刻值都有确定的函数值的信号。此类信号称为连续信号或模拟信号,通常用 $f(t)$ 表示,如图 1.2 所示。

离散信号(discrete signal)是指在信号的定义域内,只在某些不连续规定的时刻给出函数值,而在其他时刻没有给出函数的信号,通常用 $f(t_k)$ 或 $f(kT)$ (简称为 $f[k]$) 表示,由于它是由一组按时间顺序的观测值所组成,所以也称为时间序列或简称序列,如图 1.3 所示。说到离散信号,有必要说明数字信号的概念。通常将模拟信号变换为离散值称为离散化。离散化包括对变量的离散化和对数值的离散化。将变量在某一区间的值用一个数值来表示的离散化称为取样。对测定值的离散化称为量化。时间变量和测定幅值均被离散化的信号统称为数字信号(digital signal)。从模拟信号转换为数字信号称为 A/D 转换。模拟信号转换为数字信号的过程如图 1.4 所示。

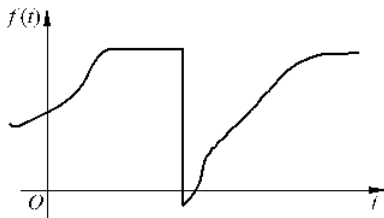


图 1.2 连续时间信号

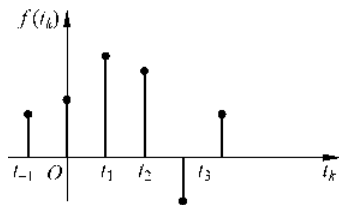


图 1.3 离散时间信号

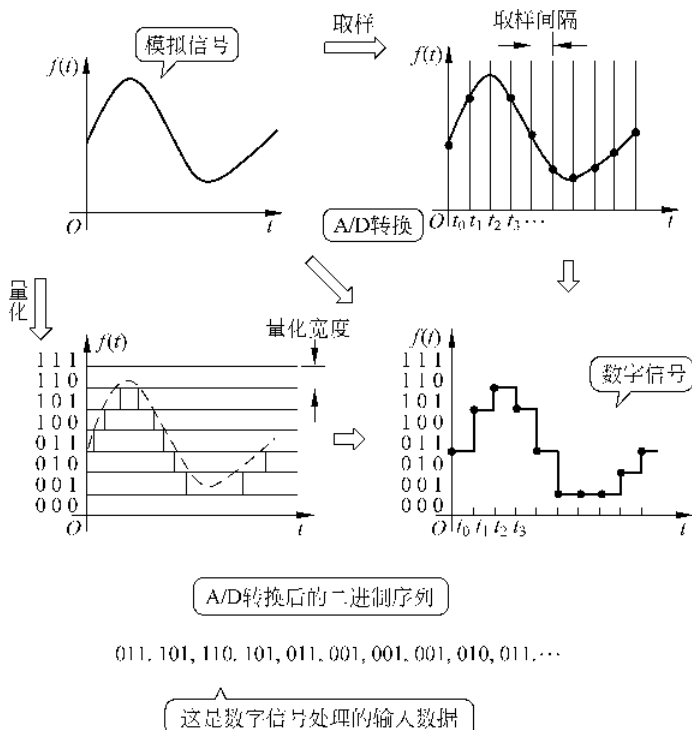


图 1.4 从模拟信号到数字信号

4. 能量信号与功率信号

信号按时间函数的可积性可分为能量信号、功率信号和非功率非能量信号。

信号可以看作是随时间变化的电压或电流,信号平方的无穷积分总值加到 1Ω 电阻上的能量,简称为信号能量 E ,即

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T f^2(t) dt \quad (1.4)$$

其平均功率定义为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt \quad (1.5)$$

对于离散时间信号 $f[k]$,其信号能量 E 与平均功率 P 的定义分别为

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N |f[k]|^2 \quad (1.6)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N |f[k]|^2 \quad (1.7)$$

若信号的能量有界,即 $0 < E < \infty$,此时 $P = 0$,则称此信号为能量有限信号,简称为能量信号(energy signal)。

若信号的功率有界,即 $0 < P < \infty$,此时 $E = \infty$,则称此信号为功率有限信号,简称为功率信号(power signal)。

值得注意的是,一个信号不可能同时既是功率信号,又是能量信号;但可以是一个非功率非能量信号,如单位斜坡信号。一般来说,直流信号与周期信号都是功率信号;非周期信号则可能出现三种情况:能量信号、功率信号、非功率非能量信号。如持续时间有限的非周期信号为能量信号,如图 1.5(a)所示;持续时间无限、幅度有限的非周期信号为功率信号,如图 1.5(b)所示;持续时间、幅度均无限的非周期信号为非功率非能量信号,如图 1.5(c)所示。

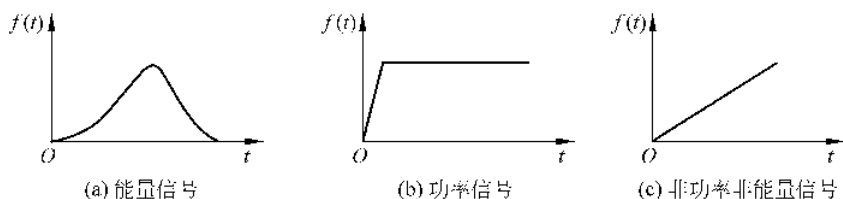


图 1.5 三种非周期信号

【例 1-2】 如图 1.6 所示信号,判断其是否为能量信号与功率信号。

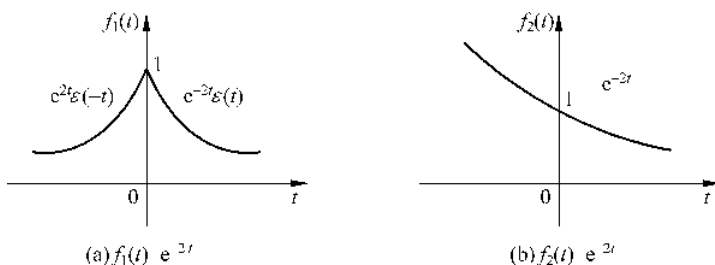


图 1.6 例 1-2 题图

解 图 1.6(a)的信号 $f_1(t) = e^{-2|t|}$ 。

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (e^{-2|t|})^2 dt = \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{2}$$

$$P = 0$$

所以该信号为能量信号。对于图 1.6(b)所示信号 $f_2(t) = e^{-2t}$, 则有

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T (e^{-2t})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-4T} - e^{4T}}{4} \right] = \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{4T} - e^{-4T}}{8T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{4T}}{8T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{4T}}{2} = \infty$$

所示该信号既非能量信号又非功率信号。

由此可见,按能量信号与功率信号进行分类时,从理论上讲尚未包括所有的信号。

5. 时限与频限信号

时域有限信号是在有限区间 (t_1, t_2) 内定义,而此区间外恒等于零,如矩形脉冲、三角脉冲、余弦脉冲等为时域有限信号;周期信号、指数衰减信号、随机过程等称为时域无限信号。

频域有限信号是指信号经过傅里叶变换,在频域内占据一定带宽 (f_1, f_2) , 其外恒等于零,如正弦信号、限带白噪声等为时域无限频域有限信号;函数、白噪声、理想抽样信号等,则为频域无限信号。

时域有限信号的频谱,在频率轴上可以延伸至无限远。由时频域对称性可推论,一个具有有限带宽的信号,必然在时间轴上延伸至无限远处。显然,一个信号不能在时域和频域都是有限的。

6. 物理可实现信号

物理可实现信号是指满足条件 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, 即在时刻小于零的一侧全为零,信号完全由时刻大于零的一侧确定,故又称为单边信号。在实际中出现的信号,大量的物理可实现信号,因为这种信号反映了物理上的因果律。实际中所能测得的信号,许多都是由一个激发脉冲作用于一个物理系统之后所输出的信号。所谓物理系统是指当激发脉冲作用于系统之前,系统是不会有响应的。换言之,在零时刻之前,没有输入脉冲,则输出为零。

1.2 基本的连续时间和离散时间信号

本节介绍几种特别重要的连续时间和离散时间信号。主要原因有二:一是因为这些信号经常遇到,二是实际中复杂的信号可以由这些基本信号组合而成,并且这些信号对线性系统产生的响应对分析系统和了解系统的性质起着主导作用,具有普遍意义。

1.2.1 单位阶跃信号与单位冲激信号

1. 连续时间单位阶跃信号和离散时间单位阶跃序列

连续时间单位阶跃信号(unit step function)和离散时间单位阶跃序列分别用 $\epsilon(t)$, $\epsilon[n]$

表示,其定义为

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \\ \epsilon[n] &= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (1.8)$$

其波形分别如图 1.7(a)和(b)所示。对于 $\epsilon(t)$,该信号在 $t=0$ 处发生跃变,数值 1 为阶跃的幅度;若阶跃幅度为 A ,则可记为 $A\epsilon(t)$;若单位阶跃信号跃变点在 $t=t_0$ 处,则称为延迟单位阶跃信号,它可表示为

$$\epsilon(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}\quad (1.9)$$

其波形如图 1.8(a)所示。

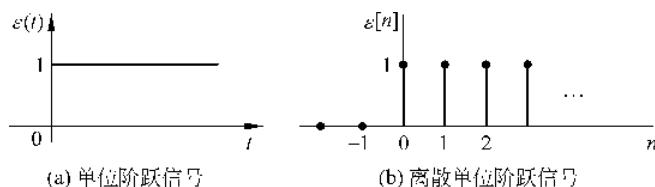


图 1.7 连续时间和离散时间单位阶跃信号的波形

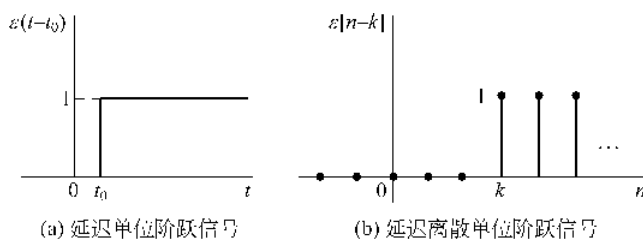


图 1.8 连续时间和离散时间延迟单位阶跃信号的波形

对于单位阶跃序列 $\epsilon(n)$,且有

$$\begin{aligned}\epsilon[n-k] &= \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases} \\ f[n]\epsilon[n-k] &= \begin{cases} f[n], & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}\end{aligned}\quad (1.10)$$

$\epsilon[n-k]$ 的波形如图 1.8(b)所示,同时具有截取特性,这种特性常用来表示分段描述的序列。单位阶跃序列 $\epsilon(n)$ 与连续信号 $\epsilon(t)$ 的形状相似,但 $\epsilon(t)$ 在 $t=0$ 发生跃变,其数值通常不予定义或定义为 $[\epsilon(0^-)+\epsilon(0^+)]/2=1/2$;而 $\epsilon[n]$ 在 $n=0$ 处的值明确定义为 1。

应用阶跃信号与延迟阶跃信号,可以表示任意的矩形波脉冲信号。例如,图 1.9(a)所示的矩形波信号可由图 1.9(b)表示,即 $f(t)=\epsilon(t-T)-\epsilon(t-3T)$ 。

2. 连续时间单位冲激信号和离散时间单位冲激序列

比单位阶跃信号或序列更为重要和基本的信号是单位冲激信号或序列,连续时间单位

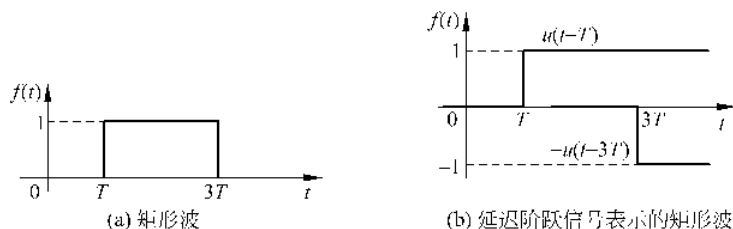


图 1.9 矩形波信号

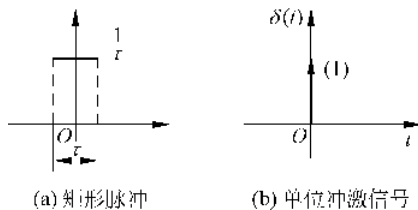
冲激信号(unit impulse function)和离散时间单位冲激序列分别用 $\delta(t)$ 和 $\delta[n]$ 表示。连续时间单位冲激信号 $\delta(t)$ 是 1930 年英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac)首先提出的,故又称狄拉克函数或 δ 函数,它不能用普通的函数来定义,其工程定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.11)$$

上述定义表明, $\delta(t)$ 是在 $t=0$ 瞬间出现又立即消失的信号,且幅值为无限大;在 $t \neq 0$ 处,它始终为零,并且具有单位面积(常称为 $\delta(t)$ 的强度)。

直观地看,这一函数可以设想为一列窄脉冲的极限。图 1.10(a) 是一矩形脉冲,宽度为 τ ,高度为 $1/\tau$,面积为 1,若此脉冲宽度继续缩小至极限情况,即当 $\tau \rightarrow 0, 1/\tau \rightarrow \infty$,这时高度无限增大,但面积始终保持为 1。单位冲激信号波形难以用普通方式表达,通常用一个带有箭头的单位长度线表示,如图 1.10(b) 所示。若强度不为 1,而为 A 的冲激信号记为 $A\delta(t)$,在用图形表示时,可将强度 A 标注在箭头旁,如图 1.11(a) 所示。延迟 t_0 出现的冲激信号可记为 $\delta(t-t_0)$,其波形如图 1.11(b) 所示,它的定义为

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (1.12)$$



(a) 矩形脉冲 (b) 单位冲激信号

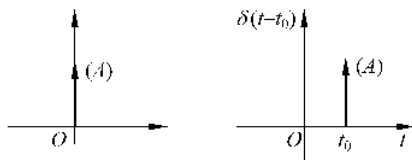
(a) 强度为 A 的冲激信号 (b) 延迟 t_0 的冲激信号

图 1.10 连续时间单位冲激信号

图 1.11 强度为 A 与延迟连续时间单位冲激信号

相比起来,离散时间单位序列 $\delta[n]$ (又称单位函数),其定义式为

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

且有

$$\begin{cases} \delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n=k \\ 0, & n \neq k \end{cases} & (k > 0) \\ \delta[n+k] = \begin{cases} 1, & n=-k \\ 0, & n \neq -k \end{cases} & (k > 0) \end{cases} \quad (1.14)$$

其波形如图 1.12 所示,该信号也称为单位脉冲序列或单位样本序列。值得注意的是,单位序列 $\delta[n]$ 与冲激函数 $\delta(t)$ 有本质的不同, $\delta[n]$ 在 $n=0$ 处有确定幅度值为 1,而不像 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 时的幅度值为 ∞ 。

任意序列可以利用单位脉冲序列及位移单位脉冲序列的线性加权和表示,如图 1.13 所示的离散序列可以表示为

$$f[n] = 3\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2]$$

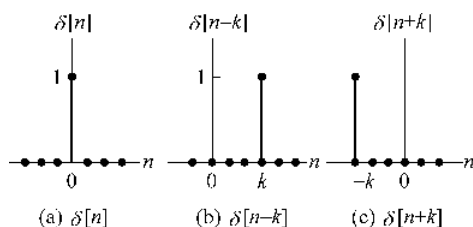


图 1.12 离散时间单位冲激序列

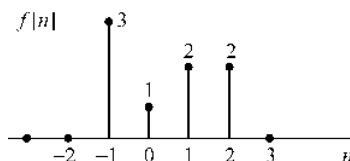


图 1.13 离散序列

3. 冲激函数的性质

作为广义函数,冲激函数具有许多特性。下面讨论其几个运算特性,不失一般性,设强度为 1。

1) 加权特性(筛选特性)

若 $f(t)$ 是一个在 $t=t_0$ 时连续的普通函数,则有

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1.15)$$

式(1.15)表明连续时间信号 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 相乘,“筛选出”信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时的函数值 $f(t_0)$ 。由于冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 在 $t \neq t_0$ 处的值都为零,故 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 相乘, $f(t)$ 只有在 $t=t_0$ 时的函数值 $f(t_0)$ 对冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 有影响,如图 1.14 所示。在式(1.15)中,若 $t_0=0$,则有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (1.16)$$

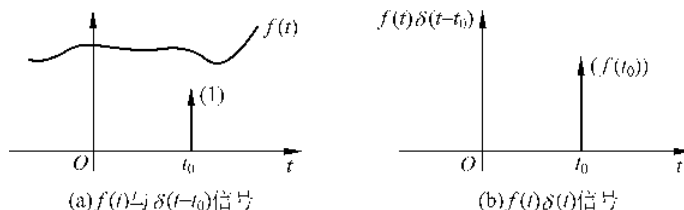


图 1.14 冲激信号的筛选特性

例如:

$$\sin \pi t \delta(t) = \sin \pi t \big|_{t=0} \delta(t) = 0$$

$$2\sin\pi t \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2\sin\pi t \Big|_{t=\frac{1}{2}} \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) = 2\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

2) 取样特性

如果信号 $f(t)$ 是一个在 $t=t_0$ 处连续的普通函数, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (1.17)$$

式(1.17)表明冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 与一个连续时间信号 $f(t)$ 相乘, 并在 $(-\infty, +\infty)$ 时间域上积分, 其结果为 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时的函数值 $f(t_0)$ 。

证明 利用筛选特性, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1$$

故有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

当 $t_0=0$ 时, 上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (1.18)$$

例如:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\pi t \delta(t)dt &= \sin\pi t \Big|_{t=0} = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} 2\sin\pi t \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)dt &= 2\sin\pi t \Big|_{t=\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

3) 单位冲激函数为偶函数

$$\delta(-t) = \delta(t) \quad (1.19)$$

证明 由于 $\varphi(t)$ 在 $t_0=0$ 时连续, 且

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(-t)dt &= \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(-\tau)\delta(\tau)(-d\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-\tau)\delta(\tau)d\tau = \varphi(0) \end{aligned}$$

故

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

4) 展缩特性(尺度变换)

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (1.20)$$

$$\delta(at-t_0) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$$

式中: a, t_0 均为常数, 且 $a \neq 0$ 。

证明 令 $at=x$, 当 $a>0$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(at)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x)dx = \frac{1}{a}\varphi(0)$$

当 $a < 0$ 时

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(at) dt &= \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \delta(x) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{x}{a}\right) \delta(x) dx \\ &= - \frac{1}{a} \varphi(0) = \frac{1}{|a|} \varphi(0)\end{aligned}$$

又因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{1}{|a|} \delta(t) dt = \frac{1}{|a|} \varphi(0)$$

故

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

同理可证

$$\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right)$$

5) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 的导数及其性质

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的一阶导数用 $\delta'(t)$ 表示, 即 $\delta'(t) =$

$\frac{d\delta(t)}{dt}$, 称为单位二次冲激 (unit doublet) 函数或冲激偶, 其

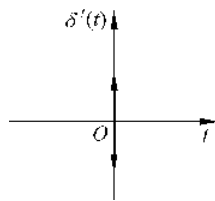


图 1.15 单位二次冲激函数

图形符号如图 1.15 所示。可以用类似的方法证明, 它具有以下性质:

$$\begin{aligned}\delta'(t) &= -\delta'(-t) \\ \delta^{(n)}(t) &= (-1)^n \delta^{(n)}(-t) \\ \delta'(t - t_0) &= -\delta'[-(t - t_0)] \\ f(t)\delta'(t) &= f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \\ f(t)\delta'(t - t_0) &= f(t_0)\delta'(t - t_0) - f'(t_0)\delta(t - t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t) dt &= -f'(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t) dt &= (-1)^n f^{(n)}(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0) dt &= -f'(t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t - t_0) dt &= (-1)^n f^{(n)}(t_0)\end{aligned}$$

4. 单位冲激和单位阶跃之间的关系

首先看一下连续时间中 $\delta(t)$ 和 $\varepsilon(t)$ 的关系。由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{0^-} \delta(t) dt + \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt + \int_{0^+}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

故有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

根据单位阶跃信号 $\epsilon(t)$ 的定义, 可得

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad (1.21)$$

式(1.21)表明: 单位冲激信号的积分为单位阶跃信号; 反之, 单位阶跃信号的导数应为单位冲激信号。即

$$\delta(t) = \frac{d\epsilon(t)}{dt} \quad (1.22)$$

相比起来, 在离散域 $\delta[n]$ 与 $\epsilon[n]$ 之间存在类似的差分与累加的关系, 即

$$\begin{aligned} \delta[n] &= \epsilon[n] - \epsilon[n-1] \\ \epsilon[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[n-m] + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m] \end{aligned} \quad (1.23)$$

令 $k=n-m$, 则

$$\epsilon[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] \quad (1.24)$$

式(1.24)的成立是很明显的, 这在于 $\delta[k]$ 仅在 $k=0$ 时为 1, 在 $k \neq 0$ 时为 0, 所以当 $n < 0$ 时, 求和式为零, 而当 $n \geq 0$ 时, 求和式为 1。

【例 1-3】 试画出下列函数的波形。

(1) $f(t) = \epsilon(\sin \pi t)$

(2) $f(t) = \delta(\sin \pi t), \quad t \geq 0$

解 (1) $f(t) = \epsilon(\sin \pi t) = \begin{cases} 1, & \sin \pi t > 0 \\ 0, & \sin \pi t < 0 \end{cases}$

$f(t) = \epsilon(\sin \pi t)$ 的波形如图 1.16 所示。可见, 该函数为周期信号, 其周期 $T=2$ 。

(2) $f(t) = \delta(\sin \pi t) (t \geq 0)$ 的波形如图 1.17 所示。

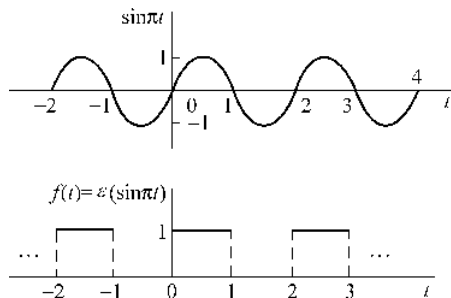


图 1.16 例 1-3(1) 函数波形

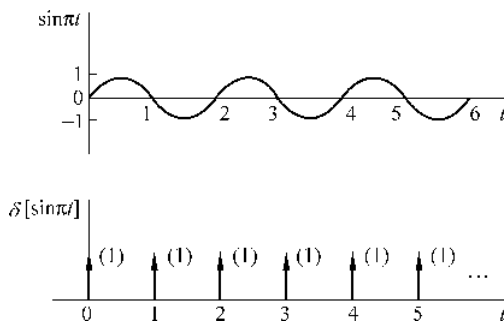


图 1.17 例 1-3(2) 函数波形

【例 1-4】 求 $\int_{-\infty}^t e^{-\tau} \delta'(\tau) d\tau$ 。

解 $\int_{-\infty}^t e^{-\tau} \delta'(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [e^{-0} \delta'(\tau) + e^{-0} \delta(\tau)] d\tau = \delta(t) + \epsilon(t)$

1.2.2 正弦型信号与正弦型序列

1. 连续时间正弦型信号

一个正弦信号(sine signal)可描述为

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.25)$$

式中 A 为振幅, ω_0 为角频率(单位: rad/s), φ 为初始角(单位: rad), 如图 1.18 所示。正弦信号是周期信号, 周期为 $T(T=2\pi/\omega_0)$ 。由于余弦信号与正弦信号只是在相位上相差 $\pi/2$, 所以将它们统称为正弦型信号。

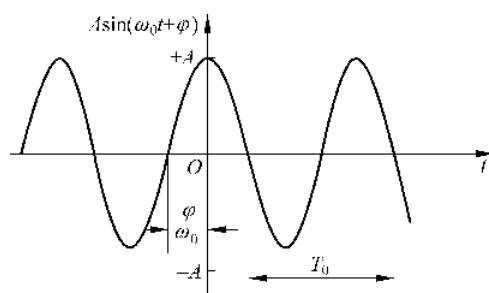
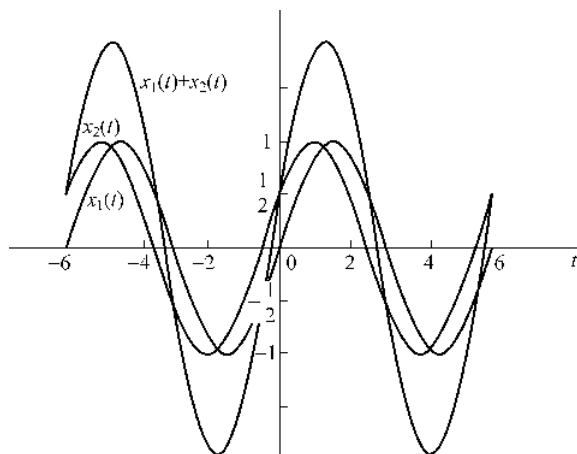


图 1.18 正弦信号波形图

正弦型信号具有非常实用的性质:

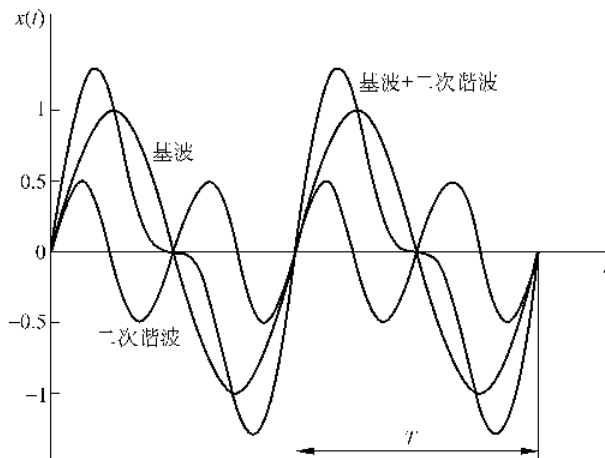
(1) 两个频率相同的正弦信号相加, 即使其振幅与相位各不相同, 但相加后结果仍然是原频率的正弦信号。

(2) 若一个正弦信号的频率是另一个正弦信号频率的整数倍时, 则合成信号是一个非正弦周期信号, 其周期等于基波的周期, 如图 1.19 所示。



(a) $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 合成

图 1.19 两个不同的正弦型信号的合成



(b) 基波与二次谐波

图 1.19 (续)

(3) 正弦信号对时间的微分或积分仍然是同频率的正弦信号。

2. 正弦型序列

通常正弦型序列(sine time sequence)是从正弦时间函数或余弦时间函数或余弦时间函数经取样后得来的。正弦序列的表达式为

$$f[k] = A \sin(\Omega_0 k + \varphi) \quad (1.26)$$

这里幅值 A 、初相 φ 的含义与模拟正弦信号相同,但正弦序列的数字角频率 Ω_0 的含义与一般模拟信号角频率 ω_0 的概念不同。由于离散信号定义的时间为 kT ,显然有 $\Omega_0 = \omega_0 T$,单位为弧度(rad),它表示相邻两个样值间弧度的变化量。

对于周期序列其定义为: $f[k+N] = f[k]$,其中 N 为序列的周期,只能为任意整数。与模拟正弦信号不同,离散正弦序列是否为周期信号主要取决于 $2\pi/\Omega_0$ 是正整数、有理数还是无理数。若比值 $2\pi/\Omega_0$ 是正整数,则正弦序列为周期序列,其周期为 N ,这是因为它符合 $f[k+N] = f[k]$ 所给出的定义,即

$$\begin{aligned} A \sin[\Omega_0(k+N) + \varphi] &= A \sin\left[\Omega_0\left(k + \frac{2\pi}{\Omega_0}\right) + \varphi\right] \\ &= A \sin(\Omega_0 k + 2\pi + \varphi) = A \sin(\Omega_0 k + \varphi) \end{aligned} \quad (1.27)$$

若比值 $2\pi/\Omega_0$ 不是正整数而是有理数,即 $2\pi/\Omega_0 = N/m$,则正弦序列仍为周期序列,其周期为 $N = m(2\pi/\Omega_0)$ 。若比值 $2\pi/\Omega_0$ 为无理数,此时正弦序列就不是周期序列,但其包络仍为正弦函数。对于余弦序列与上述正弦序列相类似。

1.2.3 指数型信号与指数型序列

1. 连续时间实指数型信号和离散时间实指数型序列

连续时间实指数型信号(real exponential signal)可表示为

$$f(t) = Ae^{at} \quad (1.28)$$

式中: A, a 均为实常数。若 $a < 0$, 则 $f(t)$ 随着时间 t 的增加按指数衰减; 若 $a > 0$, 则 $f(t)$ 随着时间 t 的增加按指数增长; 若 $a = 0$, 则 $f(t)$ 为直流信号(见图 1.20)。

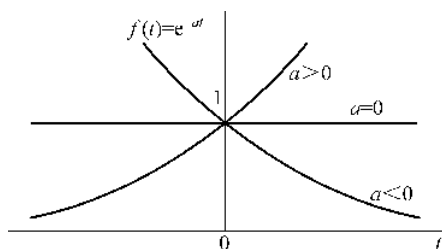


图 1.20 连续时间实指数型信号

离散时间实指数型序列为

$$f[n] = a^n, \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.29)$$

图 1.21 中画出了当实数取不同值时, 几种不同的实指数型序列。如果限于 $a > 0$, 它呈现出单调增长的实指数型序列 ($a > 1$)、常数列 ($a = 1$) 和单调衰减的实指数型序列 ($a < 1$), 分别如图 1.21(a)~(c)所示, 并分别对应着连续时间实指数型信号的三种形式; 而当 $a < 0$ 时, $a = -|a|$, 它在增长或衰减的同时, 还交替地改变序列值的符号, 分别如图 1.21(d)~(f)所示。严格地说, 这是一种振荡的特性, 在连续时间实指数型信号中不出现此现象。

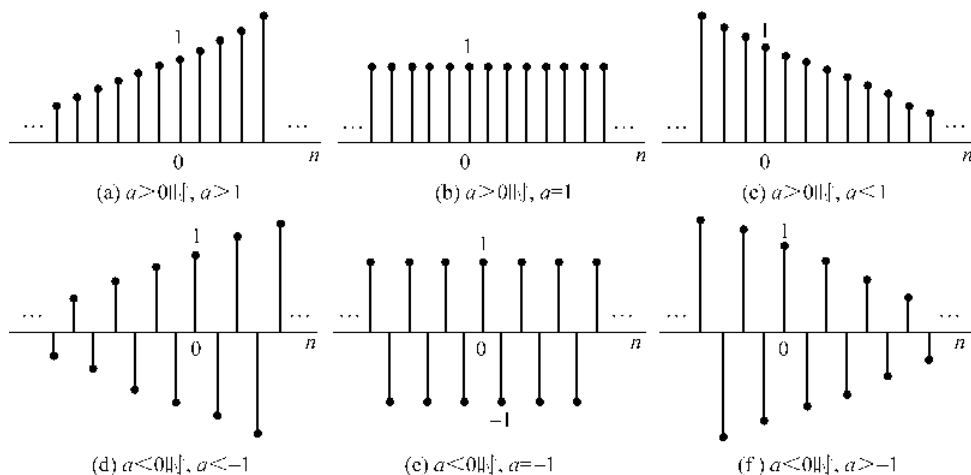


图 1.21 在实数 a 不同取值时的实指数型序列

2. 连续时间复指数型信号和离散时间复指数型序列

通常连续时间复指数型信号(complex exponential signal)表示为

$$f(t) = Ae^{st}, \quad s = \alpha + j\omega \quad (1.30)$$

s 称为复频率。根据欧拉公式可得

$$e^{st} = e^{\alpha t} \cos \omega t + je^{\alpha t} \sin \omega t \quad (1.31)$$

所以, 通常复指数型信号为

$$f(t) = Ae^{at} \cos \omega t + jAe^{at} \sin \omega t = \operatorname{Re}[x(t)] + j\operatorname{Im}[x(t)] \quad (1.32)$$

由此可见,复指数型信号可分解为实部和虚部两部分,它们分别代表余弦和正弦振荡信号,且其波形是随 s 的不同而异。当 $s=0$ 时,信号为直流信号;当 $\omega=0$ 时,信号变成为一个单调增长或衰减的实指数型信号,如图 1.22 所示;当 $a=0$ 时,信号实部是一个等幅余弦信号,虚部是一个等幅正弦信号。在通常情况下,复指数型信号的实部是一个增幅($a>0$)或减幅($a<0$)的余弦信号,虚部是一个增幅($a>0$)或减幅($a<0$)的正弦信号,如图 1.23 所示。由于复指数型信号能概括多种情况,所以可利用它来描述多种基本信号,故它是信号与系统分析中经常遇到的重要信号。

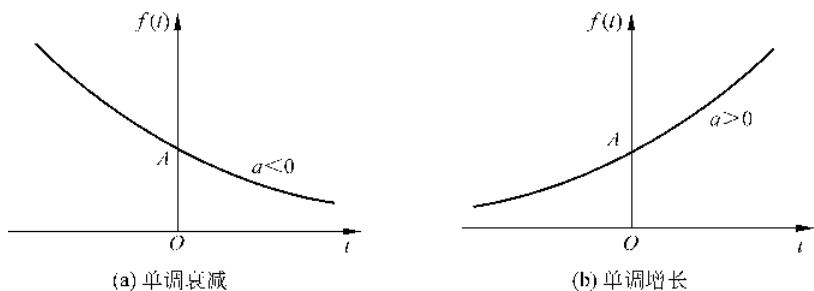
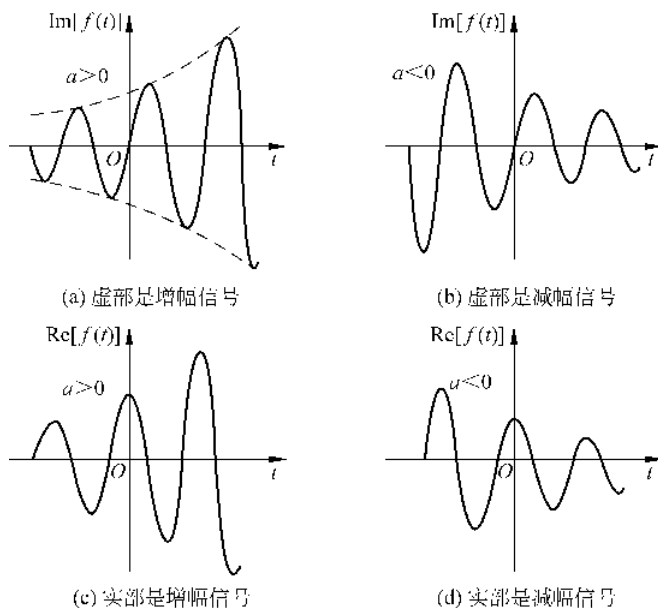
图 1.22 $\omega=0$ 时的复指数型信号

图 1.23 通常情况下的复指数型信号的波形图

离散时间复指数型序列是信号分析中最常用的基本序列,可表示为

$$f[n] = e^{j\omega_0 n} \big|_{t=nT_0} = e^{j\omega_0 nT_0} = e^{j\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \omega_0 T_0 \quad (1.33)$$

如同正弦型序列,若复指数型序列是一个以 N 为周期的周期序列,则有 $e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N)}$, 所以 $\Omega_0 N = 2\pi m$, m 为整数,即 $2\pi/\Omega_0 = N/m$,为有理数,其周期为 $N = m(2\pi/\Omega_0)$ 。

比较正弦型信号、复指数型信号与正弦型序列、复指数型序列的表达式可见,虽然它们都

是周期信号,但对连续时间信号来说, ω 取值可以在 $-\infty < \omega < \infty$ 区间,而且任意选择 ω_0 都具有周期性,其周期为 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 。而对离散时间信号来说,由于 $e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 \pm k2\pi)n}$, k 为正整数,表示在数字频率上相差 2π 整数倍的所有离散时间复指数型序列(正弦型序列)都是一样的。也就是说,离散域的频率 Ω 的有效取值是在 $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ 或 $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ 的任一间隔为 2π 的范围。

由此可知,将正弦型信号与复指数型信号从连续域变换到离散域,相当于把无限的频率范围映射到有限的频率范围。这一基本区别在今后进行数字信号与数字系统的频率特性分析时非常有意义,即数字频率 Ω 仅在 $0 \leq \Omega \leq 2\pi$ 或 $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ 范围内取值,而且意味着 $\Omega = \pm\pi$ (或 π 的奇数倍)是序列在频率域最高频率; $\Omega = 0$ 及 2π (或 π 的偶数倍)是序列在频率域的最低频率。

1.2.4 单位门信号

门宽为 τ ,门高为1的单位门信号常用符号 $G_\tau(t)$ 表示,其函数定义式为

$$G_\tau(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2}, t < -\frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1.34)$$

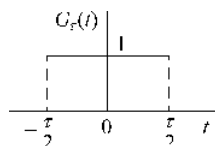


图 1.24 单位门信号波形图

其波形如图 1.24 所示。

1.2.5 符号信号

符号信号用 $\text{sgn}(t)$ 表示,其函数定义式为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

其波形如图 1.25 所示。

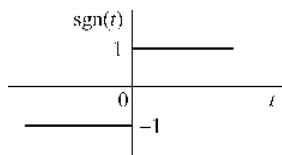


图 1.25 符号信号波形图

【例 1-5】 试画出函数 $f(t) = \text{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{2}t\right)$ 的波形。

$$\text{解} \quad f(t) = \text{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{2}t\right) = \begin{cases} 1, & \cos \frac{\pi}{2}t > 0 \\ -1, & \cos \frac{\pi}{2}t < 0 \end{cases}$$

$\cos \frac{\pi}{2}t$ 与 $f(t)$ 的波形如图 1.26 所示。

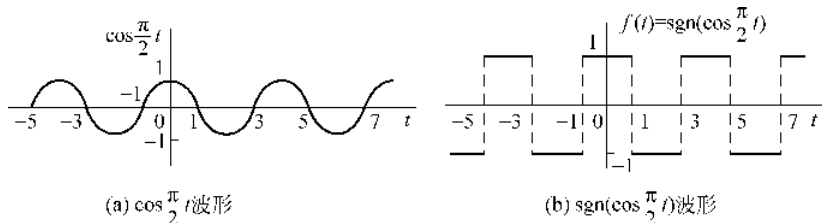


图 1.26 例 1-5 函数波形

1.2.6 单位斜坡信号

单位斜坡信号用 $r(t)$ 表示,其函数定义式为

$$r(t) = t\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

其波形如图 1.27 所示。

单位斜坡信号 $r(t)$ 与单位阶跃信号 $\varepsilon(t)$ 、单位冲激信号 $\delta(t)$ 有如下关系

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad \frac{dr(t)}{dt} = \varepsilon(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau) d\tau d\tau, \quad \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = \delta(t)$$

应用斜坡信号与阶跃信号,可以表示任意的三角脉冲信号。如图 1.28 所示的三角脉冲,可以表示为

$$f_b(t) = \Lambda(t) = (t+1)\varepsilon(t+1) - 2t\varepsilon(t) + (t-1)\varepsilon(t-1)$$

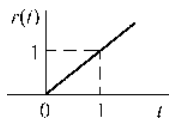


图 1.27 斜坡信号

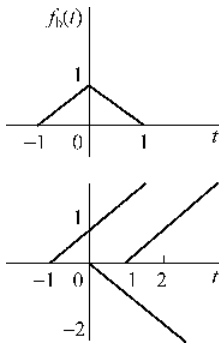


图 1.28 两种三角脉冲信号

1.2.7 抽样信号

抽样信号用 $\text{Sa}(t)$ 表示,其函数的定义式为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.37)$$

其波形如图 1.29 所示。抽样信号具有以下性质:

- (1) 偶函数,即有 $\text{Sa}(-t) = \text{Sa}(t)$ 。
- (2) $\text{Sa}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \text{Sa}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ 。
- (3) 当 $t = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $\text{Sa}(t) = 0$, 即 $t = k\pi$ 为 $\text{Sa}(t)$ 出现零值点的时刻。
- (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ 。
- (5) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Sa}(t) = 0$ 。

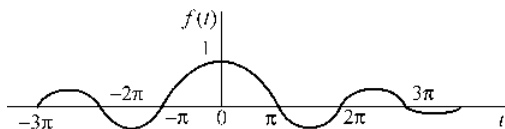


图 1.29 抽样信号

1.3 信号的基本运算与波形变换

众所周知,信号经过任何一种运算和变换都将产生不同于原信号的新信号。而且在信号与系统中经常要对信号进行运算和波形变换,研究信号通过系统各部件后的变形变化。例如,通过加法器、乘法器、放大器、延时器、积分器和微分器等部件后的波形。因此,掌握信号的各种基本运算及其对应波形是非常必要的,下面分别讨论信号的几种基本运算和波形变换。

1.3.1 信号的基本运算

和数学中函数运算一样,对信号也可以进行各种运算。描述与分析信号的基本运算,对强化基本概念和简化运算有着重要的理论意义和实际意义。最基本的信号运算有以下几种。

1. 信号的相加与相乘

(1) 两个连续时间信号相加(相乘)的信号运算,称为信号的相加(相乘)运算。它在任意时刻的瞬时值等于两个信号在该瞬时值的代数和(积)。信号相加与相乘运算可通过信号的波形(或其表达式)进行。连续时间信号相加(相乘)运算可分别表示为

$$y(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (1.38)$$

$$y(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \quad (1.39)$$

(2) 两个(或多个)离散时间信号(序列)相加(或相减)所构成的新信号(序列),即序列中同序号的数值逐项对应相加(或相减),也就是在任意一离散时刻(nT)的值等于两个(或多个)序列在同一时刻取值的代数和。两个(或多个)离散时间信号(序列)相乘(或相除)所构成的新信号(序列),在任意一时刻(nT)的值等于两个(或多个)序列在同一时刻取值的乘积。其运算分别表示为

$$\begin{aligned} y[n] &= f_1[n] + f_2[n] \\ y[n] &= f_1[n] \cdot f_2[n] \end{aligned} \quad (1.40)$$

【例 1-6】 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形分别如图 1.30(a) 和 (b) 所示,试求 $f_1(t) + f_2(t)$ 和 $f_1(t) \cdot f_2(t)$ 的波形,并写出其表达式。

解 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的表达式为

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

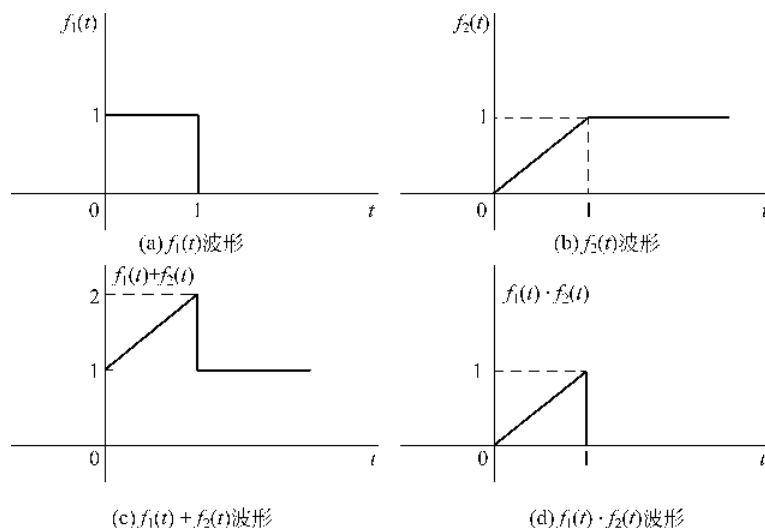


图 1.30 信号的相加与相乘

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$f_1(t) + f_2(t) \text{ 表达式为 } f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1+t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \text{ 表达式为 } f_1(t) \cdot f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

它们的波形分别如图 1.30(c)和(d)所示。

【例 1-7】 已知序列 $f_1[n] = \begin{cases} 2^n, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$ 和 $f_2[n] = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 2^{-n}, & n \geq -2 \end{cases}$, 试求 $f_1[n] + f_2[n]$ 与 $f_1[n] \cdot f_2[n]$ 。

解

$$f_1[n] + f_2[n] = \begin{cases} 2^n, & n < -2 \\ 2^n + 2^{-n}, & n = -1, -2 \\ n+1+2^{-n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$f_1[n] \cdot f_2[n] = \begin{cases} 2^n \times 0, & n < -2 \\ 2^n \times 2^{-n}, & n = -1, -2 \\ (n+1) \times 2^{-n}, & n \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 1, & n = -1, -2 \\ n2^{-n} + 2^{-n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

2. 连续时间信号微分和离散时间序列差分运算

连续时间信号是 t 的连续函数, 故可对它进行微分运算, 信号 $f(t)$ 的微分是指 $\frac{df(t)}{dt}$ 或