第 1 章　绪　　论

人工智能是近 30 多年来计算机科学的一个重要的研究领域, 受到各个方面科学家的广泛重视. 而人工智能的推理研究又是最为活跃的研究方向之一. 计算机的设计基于“非此即彼”的精典逻辑, 本质上是采用演绎推理的功能, 这种推理是一种“保真”的推理. 而真正模拟人的思维活动的智能计算机, 都是实现某种“合情”的推理, 因此它是一种近似推理. 这样, 就需要研究某种“非单调性”和“非协调性”, 即具有某种“容错”性, 部分地描写了思维过程的不确定性的推理. 人工智能的整个发展过程就伴随着不确定推理的研究过程.

1.1　人工智能及其推理特征

“人工智能”这一术语是在 1956 年由 McCarthy 和 Minsky 等人发起的关于用机器模拟智能的学术讨论会议上提出的, 这标志着人工智能这一学科的正式诞生.

美国麻省理工学院 (MIT) 的 Winston 指出, 人工智能就是研究如何使计算机去做过去只有人才能做的智能的工作. 因此, 人工智能是关于知识的科学, 它要求人们去解决如何表示知识, 怎样获取知识, 怎样使用知识, 怎样去不断地根据实例去修正知识. 在这里, 知识即是一种常识, 也是一种相对真理, 它具有局部的和暂时的合理性. 随着时间和空间的推移, 它不断地改变自己的形式. 为了方便起见, 我们将使用常识的推理叫做常识推理.

以严格的经典逻辑为基础的推理是一种演绎推理, 而常识推理本质上是一种非演绎推理. 虽然演绎推理也是一种人类的智能活动, 而人工智能中的推理主要指常识推理.

常识推理与演绎推理有着明显的区别：

演绎推理使用的是抽象而严格的定义以及在一定理论框架下的绝对正确的定义与公式. 而常识推理使用的是具有局部与暂时合理性的知识和超知识, 即人们的共识或个人的经验.

演绎推理有一定抽象的理论承诺, 它所使用的概念是清晰的, 无二义的, 对于任何人都有相同的含义, 因而是确定的. 而常识推理使用的概念是模糊的, 不确定的,

对于不同的人可能会有不同的理解, 具有不确定性. 知识中不肯定性表现了人类认识的局限性, 作为普遍的知识中可能有一部分具体对象不正确. 超知识的不确定性表现在个人的主观片面性, 作为特殊的知识与全面的知识比较上的片面性.

演绎推理是一种“保真”的推理, 如果前提正确, 那么由前提经演绎推出的结论也正确; 而常识推理是一种“未必保真”的推理, 即使前提正确, 而结论也未必严格正确, 是一种近似保真而具有直观合理性的结论.

演绎推理是具有相容性的推理, 在一个理论体系中不可能同时推出两个相反的命题成立. 而常识推理具有矛盾性, 是一种非协调推理, 在一个知识系统中可能会得到两个相反的结论.

演绎推理是完全的, 即具有单调性, 增加新的事例不会影响原有的结论, 而常识推理是不完全的非单调推理, 增加新的事例可能会影响原有的结论.

总之, 演绎推理是在抽象的逻辑结构上进行的. 它是一种从普遍性到特殊性的推理. 它不承认任何由已知前提推不出的东西, 不承认任何不经过演绎推理的假设, 不承认任何含有例外事例的结论. 它是一种让人“放心”而偏于“保守”的推理机制. 而常识推理是在时间和经验的基础上进行的, 它是一种从特殊到普遍性的推理. 它具有“容错”的特征, 它通过不断地发现矛盾和限制矛盾与修正和维护知识. 知识的正确性即不取决于逻辑的推理规则, 也不取决于以知识为前提的推理过程, 而取决于推理的结果与事实的符合程度和用户要求相一致的程度. 演绎推理的真值只能是或“真”或“假”, 而常识推理的真值可以是从“真”到“假”之间的一种过渡值. 因此, 常识推理经常用一种确定度来表示结果的真实程度, 有时也称为不确定推理. 由此可见, 常识推理, 或不确定推理是人工智能中智能性质的核心内容. 不确定推理研究的任何进展, 必将推动计算机模拟人的思维过程的进行, 必将使计算机科学有一个新的飞跃.

1.2 常识推理的基本内容

常识推理是一种非演绎推理, 它是在前提知识不完全、不确定和有例外甚至含有矛盾的情况下, 依据某些合理性标准得出一些可错而有用的结论, 这是与演绎推理不同的. 因此在演绎推理中是已知条件和推导的结论, 在常识推理中是已知证据与所得假设. 这样, 常识推理就包含有以下三个组成部分.

假设生成：根据已有证据得到某些假设;

假设评价：根据已有证据对某些假设作出评价;

假设修正：假设被反驳时对原假设的修复与维护.

假设生成有许多方法, 最常用的有归纳推理、拓广推理、类比推理、逆向推理、统计推理等.

归纳推理是一种从部分到整体、从特殊到一般、从个体到全体的推理过程, 它是一种纵向思维. 比如当看到乌鸦、麻雀、燕子等鸟会飞, 归纳得到 “鸟会飞” 的假设. 因此, 归纳的基础是一组数据、一组事例和一组观察, 称为证据. 根据这些证据选择符合这些证据的假设即是归纳推理. 拓广推理也是从特殊到一般的推理, 也是一种纵向思维, 但它与归纳推理不同. 归纳推理一般是从有限个观察得到一种假设, 拓广推理是直接以某些特殊观察得到一般假设. 比如看到乌鸦会飞, 直接得到 “鸟会飞” 的假设. 类比推理是通过对两个类似系统的研究, 由一个系统的性质对另外一个系统的性质获得假设, 它是一种横向思维. 1924 年, 法国物理学家 Broglie 即是用类比推理提出了实物具有波动性的假设. 他认为, 现今可观察到的宇宙都是由场和实物组成的, 既然一般认为具有波动性的场 (例如光) 同时具有粒子性, 那么具有粒子性的实物也应具有波动性. 逆向推理是一种扭转思维, 是 “由果到因” 的推理方式. 比如 “天上下雨地面湿”, 那么由地面湿可得到 “下雨” 的假设. 统计推理是一种数值计算的推理方式, 它是利用统计假设 “小概率事件在一次试验中是不可能发生的”. 比如有人统计《红楼梦》的前八十回与后四十回的用字、词、句的比例搭配, 有惊人的相似, 从而得到他们同出于一个作者的手笔. 当然, 也有人用类似的方法得到了相反的结论. 以上的方法都是由证据得到假设的方法, 都是假设生成方法. 其实还有一些其他的一些假设生成方法. 比如系统思维、形象思维、类比思维和层次思维等一些创新思维方法, 甚至灵感等都是假设生成的方法. 由证据到假设并不能保证一定是正确的, 它不仅要与当时的背景知识相协调, 而且有待于未来事实的验证或反驳.

假设的评价是对假设成立的一种不确定性的度量, 它是对假设的一种排序, 使其能够对不同的假设甚至相互冲突的假设进行比较和筛选. 因此假设的评价一般称为不确定推理.

不确定推理, 首先要给出度量假设成立的程度的公式, 它可以用各种不同的方法给出计算公式. 不管采用什么度量公式, 关键在于它的比较和筛选结果是否具有直观合理性. 有了度量假设的计算公式, 还要解决不确定性度量的合成、传播与修正. 所谓度量的合成, 即是通过某些假设的度量计算这些假设复合以后得到的假设度量. 所谓度量的传播是对假设作为证据而得到的新的假设的不确定性的度量. 证据是不确定的, 推理规则也不是保真的, 所得到的假设也是不确定的. 这样就必须由原证据得到的假设的不确定性计算新的不确定性. 假设的度量的合成是多元函数, 假设的度量传播是复合函数, 先合成后传播, 还是先传播后合成, 不应该导致不同的结果. 如果证据在不断的变化, 对假设的度量也要不断调整, 这即是度量的修正. 因

此, 提出任何不确定性推理方法, 必须同时解决不确定性度量的合成、传播与修正问题.

假设的修正是一个知识维护问题. 在常识推理中, 假设的生成是一种非演绎推理, 本身就有容错的特征. 正因为如此, 才可以有新的、创造性的、大胆的假设. 既然容错, 就必须不断地修正错误, 通过对假设的修正使假设更加符合实际情况. 一般来说有两种错误: 一种错误是假设与事实不符, 这时就要去掉假设中与事实不相符的部分, 并最大限度地维护原有知识; 另一种错误是不同途径得到相互冲突的假设, 就要考虑哪一种假设更加优先. 这些属于非单调逻辑与非协调逻辑研究的内容. 修正以后的假设同样可能会与新的证据相悖, 因此假设的修正是一个无限过程, 是一个从相对真理到绝对真理的演化过程.

假设的生成、假设的评价、假设的修正构成了常识推理的基本内容. 但是, 它们不是相互独立的, 而是相互制约与相互促进的. 假设的生成往往辅之以对假设的评价和筛选, 假设的修正也是对旧的假设的淘汰和对新的假设的生成, 而且假设的修正也往往辅之以对假设的评价和筛选. 因此, 假设的评价在常识推理中有着特殊的作用.

1.3 不确定推理原理与方法

不确定推理是常识推理中最为活跃的研究领域之一, 也是计算机智能系统走向实用化的一个重要方面.

不确定推理有许多方法, 有定量方法、定性方法, 还有定性与定量相结合的方法. 定量的方法比较容易在计算机上实现, 因此, 这里讲的不确定推理主要指定量的方法.

不确定推理的定量方法, 首先是对不确定信息的表示和度量. 不同的信息表示与度量方法即构成不同的不确定推理. 目前常采用的不确定推理方法有基于概率论的概率推理方法, 基于证据理论的证据方法, 基于模糊集理论的可能度方法, 这三种方法各有优缺点, 几乎同时产生并同时在发展着.

概率推理方法中最早使用的是不确定因子方法, 是由 Shortliffe 和 Buchanan 于 1975 年提出来的, 并用于处理 MYCIN 系统中的不确定信息. 不确定因子方法在给定证据下假设的信任程度的增量与怀疑程度的增量的差的标准化值, 作为假设的信任度计算公式. 标准化后的数据在 $[-1, 1]$ 中. -1 表示假设的否定被确认, $+1$ 表示假设被确认. 1976 年, Duda 等提出了主观贝叶斯方法, 并应用于探矿专家系统 PROSPECTOR 的设计. 主观贝叶斯方法主要基于贝叶斯公式和变形的贝叶斯公式来计算给定证据下的假设承认的概率. 1985 年, Pearl 给出了信息网络方法. 信息网

络是一个无圈的有向图, 其中节点是变元, 弧表示相关变元间的依赖关系, 变元的取值对应于证据与假设, 变元之间的依赖程度用条件概率表示. 信息网络所以被采用, 主要是有某种独立性假设, 大大简化了计算工作量. 1986 年, Nilsson 提出了概率逻辑, 得到了 Nilsson 概率估计.

证据理论又称为 D-S 理论, 最早是由 Dempster 于 20 世纪 60 年代提出的, 70 年代经 Shafer 发展成为比较完整的形式. 证据理论使用取值在 [0, 1] 中的信任函数和似然函数两个数组成的区间表示在给定证据下对于假设的估计与评价.

模糊集理论是 Zadeh 于 1965 年提出来的, 后来经过 Dubois 和 Prade 发展成为一种重要的可能度推理方法. 可能度推理方法更好地处理模糊不确定性和不完全信息, 它使用的度量是可能性度量与必然性度量.

在我国, 胡国定对 Shannon 信息给出了新的定义, 用概念的外延补集作为信息, 外延补集概率作为信息量. 胡国定给出的信息量的定义更适合于概念思维过程. 在此基础上, 胡国定又用他所定义的信息量研究或然逻辑, 信息推理作为一种新的不确定推理应运而生. 信息推理不仅可以描述不确定推理, 而且对于假设的生成有着重要意义. 另外一种很有意义的工作是王国俊引进的计算逻辑学. 他通过引进的蕴涵真度的概念, 通过计算讨论了语义理论与语构理论, 得到了包含经典逻辑、多值逻辑、模糊逻辑的大多数重要结论. 王国俊提出的蕴涵真度本身就是包含度, 用包含度方法从语义出发即得计算推理.

以上讲到的定量的不确定推理方法, 其中共同点是用一种测度度量假设, 这种测度可能是一种可加的概率测度, 利用一种测度来度量假设的信息. 而推理的实质是一种包含关系, 对于推理的度量用包含的程度来度量. 基于以上的共同认识, 提出了包含度的概念, 它有着很好的性质. 在一定的意义下, 它对概率推理方法、证据推理方法、模糊推理方法以及信息推理方法、计算推理方法是一种很好的概括. 由于包含度的广泛性及生成方法的多样性, 形成了包含度理论.

提出一种不确定推理方法, 不仅要给出已知证据下假设的信息度量, 还必须解决信息度量的合成、传播与修正. 有了合成、传播与修正的信息计算公式, 只要知道某些假设的信息度量, 就可以从某些证据的信息量得到由这些证据得到的假设, 再由这些假设作为证据得到新的假设的信息度量, 也可以对改变了的证据对假设的影响作出信息度量. 遗憾的是, 这些问题并不总是容易的. 如在概率推理中, 两个假设的“或”运算得到的假设, 要得到一个信息度量合成公式都是困难的, 必须要有某种独立性假设, 但是在概率推理方法中, 由于概率的性质和贝叶斯公式, 信息度量的传播与修正却是方便的. 对于证据推理方法、模糊推理方法、信息推理方法、计算推理方法同样要研究信息度量的合成、传播与修正. 只要提出一种不确定推理方法, 都需要研究信息度量的合成、传播与修正问题, 这样才能使不确定推理充分发

挥作用. 从包含度理论出发, 书中提出的信息度量的合成与传播的公理及生成方法, 显然在专家系统中是非常有意义的.

1.4 本书的结构

本书的重点, 是利用书中提出的包含度理论, 讨论定量的不确定推理, 主要指概率推理方法、证据推理方法、模糊推理方法、信息推理方法和计算推理方法. 对于在这些方法中涉及的测度与信息的工具在第 2 章中作出详细介绍.

本书的第 3 章重点介绍包含度理论及其应用. 介绍了包含度的定义及其性质、包含度的生成方法以及包含度在专家系统检索、不确定推理中的应用, 特别是在各种关系数据库中的应用方法. 指出了包含度理论作为一般原理对于描述不确定推理的有效性和实用性. 包含度理论构成本书研究内容的理论基础.

本书的第 4~6 章介绍了概率推理、证据推理与模糊推理, 指出了它们与包含度理论的关系. 同时在包含度理论的指导下, 给出了专家系统中若干重要的结果, 解决了专家系统中不确定性规则的生成及矛盾模糊规则的排除问题等, 充分显示出包含度理论作为方法学对研究不确定现象的重要意义.

第 7 章介绍了信息推理, 充分利用了胡国定关于新的信息量的定义及关于或然逻辑定量化的基本思想, 通过信息之间的包含度建立了信息推理, 并给出了假设生成的某些方法. 假设的修正引用了李末的文章.

第 8 章介绍了计算推理. 王国俊提出了计算逻辑学, 从语构和语义两方面对经典逻辑、多值逻辑、模糊逻辑进行了系统的研究, 得到了系统的研究成果. 本书从语义出发, 利用蕴涵真值形成的包含度, 给出了计算推理的实用性描述.

常识推理内容很丰富, 方法也很多, 本身就是在不断研究与发展中的课题. 如非单调逻辑、次协调逻辑、默认推理等, 这里不可能作全面介绍. 本书只是以定量的不确定推理为主介绍常识推理, 并且局限于作者的研究工作. 在阅读本书过程中, 要善于抓住包含度的实质以及包含度与现实世界的联系, 才能推进自己的研究工作. 集合是描述现实世界中客观对象的最基本的概念, Zadeh 将集合概念模糊化提出了模糊集可以描述不确定的对象, 拓宽了“对象”的研究范围; 而包含度理论是将包含关系“模糊化”, 提出包含度可以描述不确定的关系, 拓宽了“关系”的研究范围. 也就是说, 凡是用包含关系研究确定性现象的方法, 都可以用包含度理论研究不确定现象. 因此, 包含度理论是研究不确定现象的方法学. 随着人们研究领域的扩大, 以及所研究领域复杂性的增加, 不可能把复杂性现象都限制为确定的现象, 必须直接对不确定现象加以研究, 包含度理论将成为研究复杂现象的一个重要的研究工具.

第 2 章　测度与信息

不确定推理处理的是不清晰的、不确定的、不完全的信息. 通过不确定性的度量对假设进行比较和排序, 以便对不同的假设甚至相互矛盾的假设进行筛选, 这是不确定推理的基本思想. 不确定性度量可以是定量的, 可以是定性的, 也可以是定量与定性混合的. 但是对于目前的计算机系统来讲, 定量的不确定推理实现起来要方便得多. 为了介绍定量的不确定推理方法, 需要引进测度与信息的基本概念与运算.

2.1　经典集合与模糊集合

在人工智能中遇到大量的经典集合. 比如在专家诊断系统中, 有专家的集合、病例的集合、症状的集合; 在汉字识别系统中, 有汉字的集合、笔画的集合、拼音字母的集合等. 在一个实际问题中, 将考虑对象的全体称为一个基本集合, 或论域, 通常以 X 记之. 如 26 个英文字母集合, 平面上所有点的集合等, 都是一个论域. 论域 X 中的一部分称为 X 的子集合, 通常以 A, B, C 表示. X 中的对象称为元素, 以小写字母 (如 x, y) 记之. 如果 x 属于 A, 记作 $x \in A$; 若 x 不属于 A, 记作 $x \notin A$. 以 $\varnothing$ 表示空集合, 以 X 表示全集合. 任给性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$, 具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的 x 全体构成一经典集合：

$$A = \{x \mid \; P_1(x), P_2(x), \cdots, P_m(x)\}.$$

对于 X 中的两个子集 A 和 B, 若 $x \in A$ 时必有 $x \in B$, 称 A 含于 B, 或 B 包含 A, 记作 $A \subseteq B$. 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 同时成立, 称 A 等于 B, 并记作 $A = B$.

设 X 为论域, 记

$$\mathscr{P}(X) = \{A \mid \; A \subseteq X\},$$

称 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的幂集. 如果 X 中有 n 个元素, 则 $\mathscr{P}(X)$ 中有 2^n 个元素. 对于 X 的两个子集 A 和 B 可定义运算：

$$A \cup B = \{x \mid \; x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid \; x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A^{c}=\{x\mid\ x\notin A\},$$

称 $A\cup B$ 与 $A\cap B$ 分别为 A 与 B 的并集合与交集合, A^{c} 称为 A 的补集合. 如果定义 $A\setminus B=A\cap B^{c}$ 为 A 与 B 的差集合, 则 $A^{c}=X\setminus A$.

设 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{P}(X)$, 称 $\mathscr{D}$ 为集代数, 若满足以下条件:

(1) $X\in\mathscr{D}$;

(2) 若 $X\in\mathscr{D},Y\in\mathscr{D}$, 则 $X\cup Y\in\mathscr{D}$;

(3) $X\in\mathscr{D}$ 时 $X^{c}\in\mathscr{D}$.

对于 X 中的子集可以引进特征函数:

$$A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

则特征函数完全刻画了经典集合. 特征函数是从 X 到 $\{0,1\}$ 的映射, X 中的一个经典子集合对应着 X 上的一个特征函数, X 上的一个特征函数完全确定了 X 中的一个经典子集合

$$A=\{x\mid\ A(x)=1\}.$$

从特征函数的角度来看, 经典集合是一个分明集合, 它对应着二值逻辑. 从集合的角度来讲, 一个元素或属于这个集合, 或不属于这个集合, 二者必居其一. 从逻辑的角度来讲, 一个命题或真或假, 不可能是又真又假. 经典集合反映了一种“非此即彼”的分明逻辑.

从实际问题来讲, 二值逻辑并不能完全反映实际情况. 比如“张三是年轻人, 李四是老年人”就不能反映在二值逻辑中. 张三目前是 30 岁, 是否为年轻人? 李四目前是 60 岁, 是否为老年人? 如果张三是年轻人, 那么再过一年是否还是年轻人? 如果仍为年轻人, 一直下去就可能导致李四也是年轻人的荒唐结论. 在这里“年轻人”和“非年轻人”,“老年人”和“非老年人”之间没有明确的界限, 在一定意义下它是一种过渡状态. 为了描述这种不分明的状态, 需要扩充特征函数为隶属函数. 所谓 X 上的隶属函数是指 X 到 $[0,1]$ 的映射, 它代表的是一个模糊集 [96].

例 2.1 设 $X=[0,100]$ 表示年龄的某个集合, $\tilde{Y}$ 及 $\tilde{O}$ 表示“年轻”与“年老”. 它的隶属函数分别为

$$\tilde{Y}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 25,\\ \left(1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1}, & 25<x\leqslant 100.\end{cases}$$

$$\tilde{O}(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 50,\\ \left(1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & 50<x\leqslant 100.\end{cases}$$

对于模糊集合 $\tilde{A}$, 必须用隶属函数 $\tilde{A}(x)$ 描述. $\tilde{A}(x)$ 表示 x 隶属于模糊集合 $\tilde{A}$ 的程度. 若 $\tilde{A}(x_1)=0.8$, $\tilde{A}(x_2)=0.6$, 那么 x_1 比 x_2 相对地更属于 $\tilde{A}$. 一般地, 一个模糊集可以表示为图 2.1.

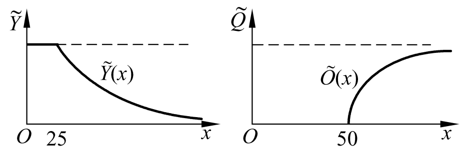

图 2.1　“年轻”与“年老”的隶属函数

对于一个模糊集, 可以表示为

$$\tilde{A}=\{(x,\ \tilde{A}(x))\mid\ x\in X\},$$

如果 X 是有限集合或可数集合, 可表示为

$$\tilde{A}=\sum\tilde{A}(x_i)/x_i,$$

如果 X 是无限不可数集合, 可表示为

$$\tilde{A}=\int\tilde{A}(x)/x.$$

用 $\mathscr{F}(X)$ 表示 X 上的模糊集合的全体, 即

$$\mathscr{F}(X)=\{\tilde{A}\mid\ \tilde{A}\text{:}\ X\to[0,1]\}.$$

若 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ 是 X 上的模糊集合, 对于任意 $x\in X$ 有 $\tilde{A}(x)\leqslant\tilde{B}(x)$, 称 $\tilde{A}$ 含于 $\tilde{B}$, 或 $\tilde{B}$ 包含 $\tilde{A}$, 记作 $\tilde{A}\subseteq\tilde{B}$. 若 $\tilde{A}\subseteq\tilde{B}$ 且 $\tilde{B}\subseteq\tilde{A}$ 同时成立, 称 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 相等, 记作 $\tilde{A}=\tilde{B}$. $\varnothing$ 表示隶属函数恒为 0 的模糊集合, X 表示隶属函数恒为 1 的模糊集合.

对于 X 上的两个模糊集合 $\tilde{A}$ 及 $\tilde{B}$, 定义运算:

$$\begin{aligned}(\tilde{A}\cup\tilde{B})(x)&=\tilde{A}(x)\vee\tilde{B}(x)\\&=\max(\tilde{A}(x),\ \tilde{B}(x)),\\(\tilde{A}\cap\tilde{B})(x)&=\tilde{A}(x)\wedge\tilde{B}(x)\\&=\min(\tilde{A}(x),\ \tilde{B}(x)),\\\tilde{A}^{\mathrm{c}}(x)&=1-\tilde{A}(x).\end{aligned}$$

称 $(\tilde{A}\cup\tilde{B})(x)$ 及 $(\tilde{A}\cap\tilde{B})(x)$ 分别为 $\tilde{A}$ 与 $\tilde{B}$ 的并集 $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ 及交集 $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ 的隶属函数, $\tilde{A}^{\mathrm{c}}(x)$ 为 $\tilde{A}$ 的补集 $\tilde{A}^{\mathrm{c}}$ 的隶属函数 (见图 2.2).

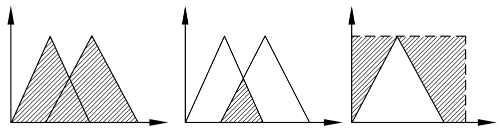

图 2.2 模糊集合并集、交集、补集运算

对于模糊集合的运算显然有以下性质：

(1) $\tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{B}\cup\tilde{A},\ \tilde{A}\cap\tilde{B}=\tilde{B}\cap\tilde{A}$; (交换律)

(2) $(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cup\tilde{C}=\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C}),(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}=\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})$; (结合律)

(3) $\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C}),\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$; (分配律)

(4) $\tilde{A}\cup(\tilde{A}\cap\tilde{B})=\tilde{A},\ \ \tilde{A}\cap(\tilde{A}\cup\tilde{B})=\tilde{A}$; (吸收律)

(5) $(\tilde{A}\cup\tilde{B})^{\mathrm{c}}=\tilde{A}^{\mathrm{c}}\cap\tilde{B}^{\mathrm{c}},\ \ (\tilde{A}\cap\tilde{B})^{\mathrm{c}}=\tilde{A}^{\mathrm{c}}\cup\tilde{B}^{\mathrm{c}}$; (对偶律)

(6) $(\tilde{A}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}=\tilde{A}$; (对合律)

(7) $\tilde{A}\cup\tilde{A}=\tilde{A}\cap\tilde{A}=\tilde{A}$; (幂等律)

(8) $X\cap\tilde{A}=\varnothing\cup\tilde{A}=\tilde{A},\ \ X\cup\tilde{A}=X,\ \ \varnothing\cap\tilde{A}=\varnothing$. (两极律)

以上运算性质对于经典集合全部成立. 但是经典集合中的互补律对于模糊集合一般不再成立. 比如 $X=[0,1],\ \tilde{A}(x)=x,\ \tilde{A}\cup\tilde{A}^{\mathrm{c}}\neq X,\ \tilde{A}\cap\tilde{A}^{\mathrm{c}}\neq\varnothing$. 模糊集合运算不满足互补律, 给研究工作带来了困难. 而正是这一性质, 使它更能客观地反映实际情况. 事实上, 在大量实际问题中, 大量存在着这种模棱两可的情形.

2.2 粗糙集与随机集

人们认识事物的基本方法即是分类, 即把所有研究对象按照某种规则分为有限个类, 每两类之间没有公共对象, 且每个对象必在某一类中. 比如对于要考虑的小轿车, 可以用不同颜色分成不同类, 也可以用不同生产国家分成不同的类, 有了不同的分类就可以获得不同的知识. 人们就可以通过分类的知识去认识那些不能用分类精确表达的对象集, 这种不能用分类精确刻画的对象集即是粗糙集.

设 X 是一个有限论域, $X\times X$ 是乘积空间, 即 $X\times X=\{(x_1,x_2)\mid\ x_1,x_2\in X\}$. $R\subseteq X\times X$, 称 R 为 X 上的关系, 当 $(x,y)\in R$ 时, 称 x,y 有关系 R; 当 $(x,y)\notin R$ 时, 称 x,y 无关系 R, X 上的关系 R 称为等价关系, 若满足以下性质：

(1) 自反性：$(x_i,x_i)\in R,\ x_i\in X$;

(2) 对称性：$(x_i,x_j)\in R$ 时, $(x_j,x_i)\in R,\ x_i,x_j\in X$;

(3) 传递性：$(x_i,x_j)\in R,(x_j,x_k)\in R$, 则 $(x_i,x_k)\in R,\ x_i,x_j,x_k\in X$.