1 离散时间信号与离散时间系统习题参考解答

1.1(1.1)* 给定信号 $x(n)=\begin{cases}2n+10 & -4\leqslant n\leqslant -1\\ 6 & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0 & n\text{ 为其他值}\end{cases}$

(1) 画出 $x(n)$的图形,并标上各点的值。

(2) 试用 $\delta(n)$及其相应的延迟表示 $x(n)$。

(3) 令 $y_1(n)=2x(n-1)$,试画出 $y_1(n)$的图形。

(4) 令 $y_2(n)=3x(n+2)$,试画出 $y_2(n)$的图形。

(5) 将 $x(n)$延迟 4 个抽样点再以 y 轴翻转,得 $y_3(n)$,试画出 $y_3(n)$的图形。

(6) 先将 $x(n)$翻转,再延迟 4 个抽样点得到 $y_4(n)$,试画出 $y_4(n)$的图形。

解:

(1) $x(n)$的图形如图 1.1.1 所示。

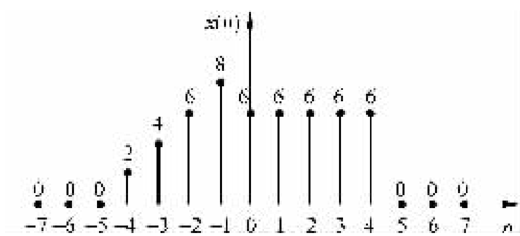

图 1.1.1

(2) $x(n)=6\delta(n)+6\delta(n-1)+6\delta(n-2)+6\delta(n-3)+6\delta(n-4)$
$+8\delta(n+1)+6\delta(n+2)+4\delta(n+3)+2\delta(n+4)$

* 括号中的题号为《数字信号处理导论》中的习题序号。详见前言。

(3) $y_1(n)=2x(n-1)$是原序列$x(n)$延迟1个抽样周期,再乘以系数2得到的,其图形如图1.1.2所示。

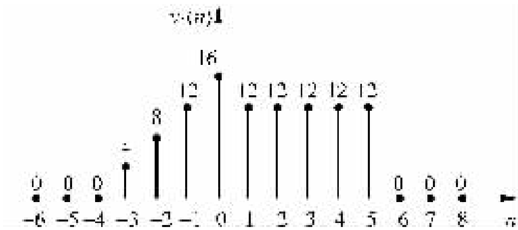

图 1.1.2

(4) $y_2(n)=3x(n+2)$是原序列$x(n)$提前2个抽样周期,并乘以系数3得到的,图形如图1.1.3所示。

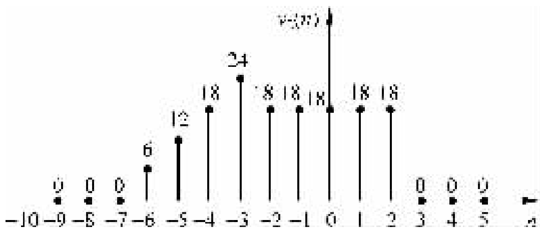

图 1.1.3

(5) 将$x(n)$延迟4个抽样点得$x'(n)=x(n-4)$,再将$x'(n)$以y轴翻转得$y_3(n)=x'(-n)=x(-n-4)$,$y_3(n)$的图形如图1.1.4所示。

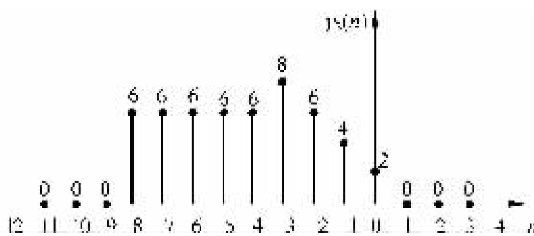

图 1.1.4

(6) $y_4(n)$可表达为:$y_4(n)=x(-n+4)$,其图形如图1.1.5所示。

1.2(1.2) 对1.1给出的$x(n)$:

(1) 画出$x(-n)$的图形。

(2) 计算$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$,并画出$x_e(n)$的图形。

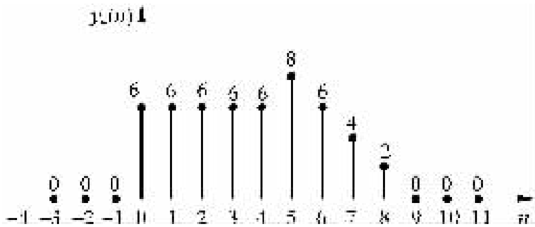

图　1.1.5

(3) 计算 $x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$，并画出 $x_o(n)$ 的图形。

(4) 试用 $x_e(n)$，$x_o(n)$ 表示 $x(n)$，并总结将一个序列分解为一个偶对称序列与一个奇对称序列的方法。

解：

(1) $x(-n)$ 的图形如图 1.2.1 所示。

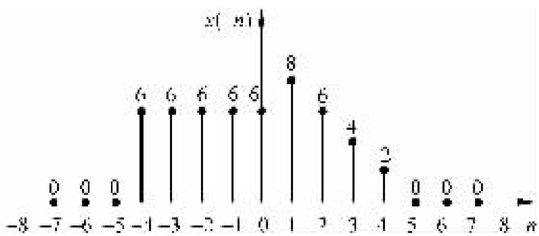

图　1.2.1

(2) $x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]=\begin{cases} n+8 & -4\leqslant n\leqslant -1 \\ -n+8 & 1\leqslant n\leqslant 4 \\ 6 & n=0 \\ 0 & n\text{ 为其他值} \end{cases}$

其图形如图 1.2.2 所示。

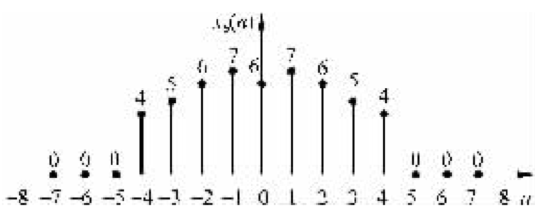

图　1.2.2

(3) $x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]=\begin{cases}n+2 & -4\leqslant n\leqslant -1\\ n-2 & 1\leqslant n\leqslant 4\\ 0 & n\text{ 为其他值}\end{cases}$

其图形如图 1.2.3 所示。

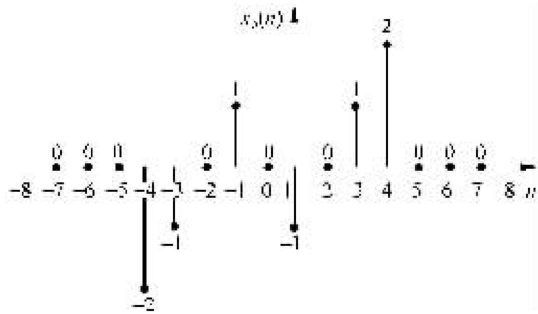

图 1.2.3

(4) 对于任何离散时间序列 $x(n)$，可以将其分解为一个偶对称序列 $x_e(n)$ 和一个奇对称序列 $x_o(n)$ 之和，这是离散时间信号分解的一种重要方式，即

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$$

式中

$$\begin{cases}x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]\\ x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]\end{cases}$$

很容易证明，$x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 分别满足 $x_e(n)=x_e(-n)$，$x_o(n)=-x_o(-n)$ 的对称关系。

1.3(2.1) 给定下述系统：

(1) $y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)$。

(2) $y(n)=y(-n)$。

(3) $y(n)=x(n^2)$。

(4) $y(n)=x^2(n)$。

(5) $y(n)=x(n)\sin(n\omega)$。

(6) $y(n)=ax(n)+b$，其中 a,b 为常数。

试判断每一个系统是否具有线性、移不变性？并说明理由。

解：

(1) 对系统 $y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2)$，给定输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，由所给差分方程，有

$$y_1(n)=T[x_1(n)]=x_1(n)+x_1(n-1)+x_1(n-2)$$
$$y_2(n)=T[x_2(n)]=x_2(n)+x_2(n-1)+x_2(n-2)$$

令

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

则系统对 $x(n)$ 的响应

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] \\ &= \alpha x_1(n) + \beta x_2(n) + \alpha x_1(n-1) + \beta x_2(n-1) + \alpha x_1(n-2) + \beta x_2(n-2) \\ &= \alpha[x_1(n) + x_1(n-1) + x_1(n-2)] + \beta[x_2(n) + x_2(n-1) + x_2(n-2)] \end{aligned}$$

即

$$y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

因此系统(1)是线性的。

由于

$$y(n) = T[x(n)] = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$$

那么系统对 $x(n-k)$ 的响应 $y_k(n)$ 是

$$y_k(n) = T[x(n-k)] = x(n-k) + x(n-k-1) + x(n-k-2)$$

而

$$y(n-k) = x(n-k) + x(n-k-1) + x(n-k-2)$$

显然

$$y(n-k) = T[x(n-k)] = y_k(n)$$

因此系统(1)具有移不变性。

(2) 对系统 $y(n)=y(-n)$，给定输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，由所给差分方程，有

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(-n)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(-n)$$

令

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

那么系统对 $x(n)$ 的响应

$$y(n) = T[x(n)] = \alpha x_1(-n) + \beta x_2(-n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

上式的右边正是 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的叠加，故系统(2)是线性的。

由于

$$y(n) = T[x(n)] = x(-n)$$

那么系统对 $x(n-k)$ 的响应 $y_k(n)$ 是

$$y_k(n) = T[x(n-k)] = x[-(n-k)]$$

而

$$y(n-k) = x[-(n-k)]$$

显然

$$y(n-k) = T[x(n-k)] = y_k(n)$$

所以系统(2)具有移不变性。

(3) 对系统 $y(n)=x(n^2)$，给定输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，由所给差分方程，有

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n^2)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n^2)$$

令

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

那么系统对 $x(n)$ 的响应

$$y(n) = T[x(n)] = \alpha x_1(n^2) + \beta x_2(n^2) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

上式的右边正是 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 的叠加，故系统(3)是线性的。

由于

$$y(n) = T[x(n)] = x(n^2)$$

那么系统对 $x(n-k)$ 的响应 $y_k(n)$ 是

$$y_k(n) = T[x(n-k)] = x[(n-k)^2]$$

而

$$y(n-k) = x[(n-k)^2]$$

显然

$$y(n-k) = T[x(n-k)] = y_k(n)$$

所以系统(3)具有移不变性。

(4) 对系统 $y(n)=x^2(n)$，给定输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，由所给差分方程，有

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1^2(n)$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2^2(n)$$

令

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

那么系统对 $x(n)$ 的响应

$$y(n) = T[x(n)] = [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]^2 \neq \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

因此，系统(4)是非线性的。

由于

$$y(n) = T[x(n)] = x^2(n)$$

那么系统对 $x(n-k)$ 的响应 $y_k(n)$ 是

$$y_k(n) = T[x(n-k)] = x^2(n-k)$$

而

$$y(n-k) = x^2(n-k)$$

显然

$$y(n-k) = T[x(n-k)] = y_k(n)$$

所以系统(4)具有移不变性。

(5) 对系统 $y(n)=x(n)\sin(n\omega)$，给定输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，由所给差分方程，有

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = x_1(n)\sin(n\omega)$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = x_2(n)\sin(n\omega)$$

令

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

那么系统对 $x(n)$ 的响应

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = [\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)]\sin(n\omega) \\ &= \alpha x_1(n)\sin(n\omega) + \beta x_2(n)\sin(n\omega) \end{aligned}$$

即

$$y(n) = \alpha y_1(n) + \beta y_2(n)$$

因此，系统(5)是线性的。

由于

$$y(n) = T[x(n)] = x(n)\sin(n\omega)$$

那么系统对 $x(n-k)$ 的响应 $y_k(n)$ 是

$$y_k(n) = T[x(n-k)] = x(n-k)\sin(n\omega)$$

而

$$y(n-k) = x(n-k)\sin[(n-k)\omega]$$

显然

$$y(n-k) \neq T[x(n-k)] = y_k(n)$$

因此，系统(5)不具有移不变性。

(6) 对系统 $y(n)=ax(n)+b$，给定输入 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，由于 a,b 为常数，由所给差分方程，有

$$y_1(n) = T[x_1(n)] = ax_1(n) + b$$
$$y_2(n) = T[x_2(n)] = ax_2(n) + b$$

令

$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

那么系统对 $x(n)$ 的响应

$$\begin{aligned} y(n) &= T[x(n)] = a[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] + b \\ &\neq \alpha y_1(n) + \beta y_2(n) \end{aligned}$$

因此，系统(6)是非线性的。

由于

$$y(n) = T[x(n)] = ax(n) + b$$

那么系统对 $x(n-k)$ 的响应 $y_k(n)$ 是

$$y_k(n) = T[x(n-k)] = ax(n-k)+b$$

而

$$y(n-k) = ax(n-k)+b$$

显然

$$y(n-k) = T[x(n-k)] = y_k(n)$$

因此,系统(6)具有移不变性。

1.4(2.2) 给定下述系统:

(1) $y(n)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}x(n-k)$,其中 N 为大于零的整数。

(2) $y(n)=ax(n)+b$。

(3) $y(n)=x(n)+cx(n+1)$,其中 c 为常数。

(4) $y(n)=x(n^2)$。

(5) $y(n)=x(kn)$,其中 k 为大于零的整数。

(6) $y(n)=x(-n)$。

试判定哪一个是因果系统?哪一个是非因果系统?并说明理由。

解:

(1) $y(n)=\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}x(n-k)$,其中 N 为大于零的整数。

因为该系统在任意时刻的输出只决定于现在时刻和过去的输入 $x(n),x(n-1),\cdots,x(n-N)$,而和将来的输入无关,所以,该系统是因果系统。

(2) $y(n)=ax(n)+b$。

因为该系统在任意时刻的输出只决定于现在时刻的 $x(n)$,而和将来的输入无关,所以,该系统是因果系统。

(3) $y(n)=x(n)+cx(n+1)$,其中 c 为常数。

因为该系统在当前时刻(n)的输出不但取决于当前时刻(n)的输入 $x(n)$,而且还取决于将来时刻($n+1$)时的输入 $x(n+1)$,所以该系统是非因果系统。

(4) $y(n)=x(n^2)$。

在 $n\geqslant 2$ 时,该系统对任意时刻 n 时的输出都由将来时刻 n^2 的输入所决定,因此该系统为非因果系统。

(5) $y(n)=x(kn)$,其中 k 为大于零的整数。

如同问题(4),当 $n>0$ 时,系统的输出由将来时刻 kn 的输入所决定,因此系统为非因果系统。

(6) $y(n)=x(-n)$。

该系统在 $n<0$ 时的输出决定于 $n>0$ 时的输入(即将来的输入),因此该系统也是非

因果系统。

1.5(2.3)　如下两个系统：

(1) $y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k x(n-k)$，其中 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{N-1}$ 为常数。

(2) $y(n)=2\alpha\cos\omega_0 y(n-1)-\alpha^2 y(n-2)+x(n)-\alpha\cos\omega_0 x(n-1)$，其中 α,ω_0 为常数。

试求其单位抽样响应 $h(n)$，并判断系统是否稳定？稳定的条件是什么？

解：

(1) 单位抽样响应是系统在输入为单位抽样序列 $\delta(n)$ 时的输出。对于该系统，其单位抽样响应

$$h(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\delta(n-k)$$

它是一个起始于 $n=0$，长度为 N 的有限长序列，即是一个 FIR 系统。又由于 α_0，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{N-1}$ 都为有限的常数，所以该系统总是稳定的。

(2) 可用两种方法求得该系统的单位抽样响应。

方法一：令 $x(n)=\delta(n)$，则系统的输出 $y(n)=h(n)$，即

$$h(n)=2\alpha\cos\omega_0 h(n-1)-\alpha^2 h(n-2)+\delta(n)-\alpha\cos\omega_0\delta(n-1)$$

$$n=0\quad h(0)=1$$

$$n=1\quad h(1)=2\alpha\cos\omega_0-\alpha\cos\omega_0=\alpha\cos\omega_0$$

$$n=2\quad h(2)=2\alpha\cos\omega_0[\alpha\cos\omega_0]-\alpha^2=\alpha^2\cos2\omega_0$$

$$n=3\quad h(3)=2\alpha\cos\omega_0[\alpha^2\cos2\omega_0]-\alpha^2[\alpha\cos\omega_0]=\alpha^3\cos3\omega_0$$

依此类推，有

$$h(n)=\alpha^n\cos n\omega_0 u(n)$$

方法二：我们可以利用教材第 2 章关于 Z 变换的方法求出系统的单位抽样响应。对系统的差分方程进行 Z 变换，得

$$(1-2\alpha z^{-1}\cos\omega_0+\alpha^2 z^{-2})Y(z)=(1-\alpha z^{-1}\cos\omega_0)X(z)$$

进而得到该系统转移函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\alpha z^{-1}\cos\omega_0}{1-2\alpha z^{-1}\cos\omega_0+\alpha^2 z^{-2}}$$

单位抽样响应 $h(n)$ 是转移函数 $H(z)$ 的逆 Z 变换，由教材的表 2.3.1(注：对《数字信号处理导论》是表 2.5.1)，得

$$h(n)=Z^{-1}[H(z)]=\alpha^n\cos n\omega_0 u(n)$$

当然，两种方法给出的结果是一样的。

为了考察该系统是否稳定，我们给定一个有界的输入 $x(n)$，即 $|x(n)|\leqslant M,n=-\infty,\cdots,+\infty$，$M$ 为有限值。这时，系统的输出

$$|y(n)|=|h(n)*x(n)|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\cos\omega_0 kx(n-k)\right|$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha^k\cos\omega_0 k||x(n-k)|\leqslant M\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha^k\cos\omega_0 k|$$
$$\leqslant M\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha^k|\leqslant M\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha|^k$$

当$|\alpha|<1$时，系统的输出

$$|y(n)|=|h(n)*x(n)|=\frac{M}{1-|\alpha|}$$

也是有界的，所以系统是稳定的。反之，如果$|\alpha|\geqslant 1$，则系统不稳定。上面所用的判别方法即是稳定性的定义，即有界的输入产生有界的输出(BIBO)。

1.6(2.5) 令 $h(n)=\{h(0),h(1),h(2)\}=\{3,2,1\}$，求

(1) $y_1(n)=h(n)*h(n)$

(2) $y_2(n)=h(n)*h(n)*h(n)$

解：

求解该题有两种方法，一是直接由卷积的定义求，二是由 MATLAB 中的 m 文件 conv 来求，现分别给出相应的结果。

方法一：对问题(1)，由 $y_1(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}h(n-m)h(m)$，可求出

$$y_1(0)=h(0)h(0)=9$$
$$y_1(1)=h(0)h(1)+h(1)h(0)=12$$
$$y_1(2)=h(0)h(2)+h(1)h(1)+h(2)h(0)=10$$
$$y_1(3)=h(1)h(2)+h(2)h(1)=4$$
$$y_1(4)=h(2)h(2)=1$$

对问题(2)，实际上 $y_2(n)=y_1(n)*h(n)$，按照卷积的定义可求出

$$y_2(n)=\{27,54,63,44,21,6,1\}$$

具体的求解步骤请读者自己给出。

方法二：实现问题(1)的 MATLAB 程序是 ex_01_06_1.m，运行该程序的结果为

```
9    12    10    4    1
```

实现问题(2)的 MATLAB 程序请读者自己给出。

1.7 $h(n)$仍由 1.6 题给出，令 $x(n)=\{x(0),x(1),x(2),x(3)\}=\{1,2,3,4\}$。

(1) 求 $h(n)$的自相关函数 $r_h(m)$。

(2) 求 $h(n)$和 $x(n)$的互相关函数 $r_{hx}(m)$，并画出 $r_h(m)$，$r_{hx}(m)$的图形。

解：

如同问题 1.6，求解该题也有两种方法，一是用相关函数的定义直接求解，二是用