

## 体系的几何组成分析

### 1.1 学习目的

本章的主要内容是利用几何不变体系的组成规律,分析杆件体系的几何组成。

学习这些内容的目的有如下几个方面:

(1) **正确地选择计算方法** 内力计算方法与结构的组成有关,静定结构只需平衡条件即可求解,超静定结构还需用到变形条件。另外在确定使用力法还是位移法求解超静定结构时也需要这方面知识。

(2) **确定受力分析的次序** 由若干部分组成的静定结构,受力分析次序与几何组成次序有关。

(3) **学习力法的基础** 力法的基本思想是将超静定结构化成静定结构来求解,这需要本章所讲述的知识。

### 1.2 基本内容总结和学习建议

#### 1.2.1 主要概念

(1) **刚片** 可以是一个杆,也可以是由杆件组成的几何不变体系。具体应用时要特别注意刚片中是否有多余约束。

(2) **约束** 对体系自由度有影响的约束为**必要约束**;对体系自由度没有影响的约束为**多余约束**。这里的必要和多余的含义仅限于对自由度的影响。

这是本章最重要的两个概念,分析体系的几何组成就是依据体系中刚片和刚片间的约束情况确定体系的几何性质。分析中有时也将一些刚片看成约束,这使得分析过程可能不同,但体系多余约束的个数是唯一的。

### 1.2.2 静定结构的组成规则

(1) **三刚片规则** 三个本身无多余约束的刚片用三个不共线的单铰两两相连,则组成的体系为静定结构,即无多余约束的几何不变体系。

(2) **两刚片规则(分两种情况)**

① 两个本身无多余约束的刚片用一个单铰和一个不通过该铰的链杆相连,则组成的体系为静定结构,即无多余约束的几何不变体系。

② 两个本身无多余约束的刚片用三个既不相互平行、又不相交于一点的三根链杆相连,则组成的体系为静定结构,即无多余约束的几何不变体系。

(3) **二元体规则**

在任意一个体系上加二元体或减二元体都不会改变体系的几何组成结论。

这部分是本章的核心内容,具体要求是:①深刻理解并熟记规则的内容。这一点比较容易做到。②熟练地应用规则去分析体系的几何组成。分析体系的几何组成,方法非常灵活,分析技巧很多。必须多做练习,并注意总结,才能达到熟练掌握的程度。

### 1.2.3 几何可变体系

(1) **常变体系** 可能发生宏观位移的几何可变体系。

(2) **瞬变体系** 发生微小位移以后变成几何不变体系的几何可变体系。

对这部分内容学习的要求是:①理解并能说明这两种体系不能作为结构的原因。②掌握体系为常变体系或瞬变体系的几种约束的情况。

### 1.2.4 体系几何组成分析常用方法

体系的几何组成分析主要有以下几个方法,分析时要灵活应用。

(1) **去掉二元体** 分析一个体系时,有二元体一定要先去掉,使体系简化。分析时,一定要确认去掉的是否是二元体。

(2) **去掉基础(或刚片)** 若基础(或刚片)与体系的其他部分用三个约束连接,且符合几何不变体系的组成规则,则可以将基础(或刚片)和三个约束一起去掉,只分析余下的部分。

(3) **刚片转换** ①若一个无多余约束的刚片仅用两个铰与其他部分相连,则可用一根链杆代替这个刚片。②若一个无多余约束的刚片仅用三个铰与其他部分相连,则可用连接这三个铰的三根链杆(也称为铰结三角形)代替这个刚片。

(4) **大刚片** 若体系的杆件比较多,可以先将一些杆件组成大刚片。

(5) **三刚片规则** 用三刚片规则时,有时会觉得找不准刚片。一般情况下,若体系有9根杆件,则可试着选3根杆件做刚片、其余6根杆件做约束;若有11根杆件,则可试着选1个三角形和2个杆件做刚片、其余6根杆件做约束。若有13根杆件,则可试着选两个三角形和一个杆件做刚片、其余6根杆件做约束。依此类推。选择刚片时,可以先指定一个刚片,则与这个刚片相连的杆件都是约束,不可能是刚片。这样另外两个刚片就容易确定了。

注意:这一段所述方法不具有一般性,只对某一种特殊体系有效。比如图1-1所示体系有11根杆,怎么分析呢?4个三角形无论取哪一个三角形均连接有6个杆,不可能只形成两个虚铰。

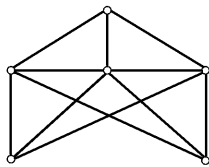


图 1-1

(6) **增加链杆** 当无法直接用组成静定结构的规则分析时,可考虑增加约束,使其能够用三角形规则分析。若增加联系的体系是无多余约束的几何不变体系时,则可以得出原体系是几何可变体系的结构。若增加约束的体系是有多余约束的几何不变体系时,则结论不确定。

## 1.3 附加例题

**附加例题 1.1** 试分析图1-2(a)所示体系的几何组成。

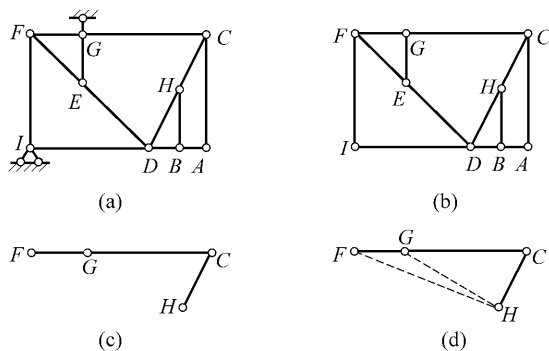


图 1-2

**解:** 首先,将体系与基础之间的约束去掉,得到图1-2(b)后,依次按A、B、I、D、E的顺序去掉二元体,得到图1-2(c)所示体系。很明显,若在该体系上增加两个链杆约束(图1-2(d)),则体系就变成没有多余约束的几何不变体

系。因此,本题的分析结论是几何可变体系,少了两个必要约束。若要使其成为几何不变体系需至少增加两个约束。

### 思考

- (1) 是否可以按其他顺序去掉二元体?
- (2) 是否可以在其他位置加约束,使本题体系变成无多余约束的几何不变体系?
- (3) 在图 1-2(c)中,若接着去掉  $C$  点的二元体,只剩下杆  $FG$ 。一个杆件是无多余约束的几何不变体系。由此,可以得到本题的分析结论是无多余约束的几何不变体系。这与前面的分析结论不一样,试分析错在哪里?

### 附加例题 1.2 分析图 1.3(a)所示体系的几何组成。

**解:** 去掉图 1-3(a)所示体系右侧的两个二元体,并将阴影部分的三角形看成一个刚片,如图 1-3(b)所示;这个刚片与左侧部分用三根链杆(图 1-3(b)虚线所示)相连,这三根链杆既不相互平行也不交于一点。这时可以将三角形刚片连同这三个链杆一起去掉,只分析剩下部分(图 1-3(c))。

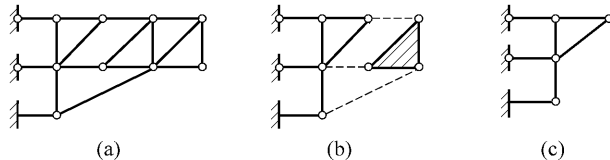


图 1-3

很明显,剩下部分(用去掉二元体的方法或用从固定杆件增加二元体的方法分析)为无多余约束的几何不变体系。则原体系也为无多余约束的几何不变体系。

### 附加例题 1.3 分析图 1-4(a)所示体系的几何组成。

**解:** 首先,对体系进行简化。杆件  $CA$  可以简化成沿  $CA$  杆方向的支链杆;折杆  $DB$  化成沿  $DB$  连线方向的支链杆。这样,原体系就可以简化成图 1-4(b)所示的情况。很明显,结论是无多余约束的几何不变体系。

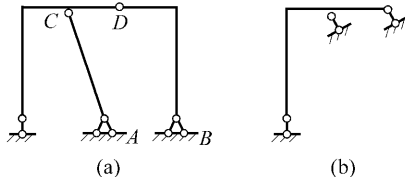


图 1-4

**附加例题 1.4** 试分析图 1-5(a) 所示体系的几何组成。

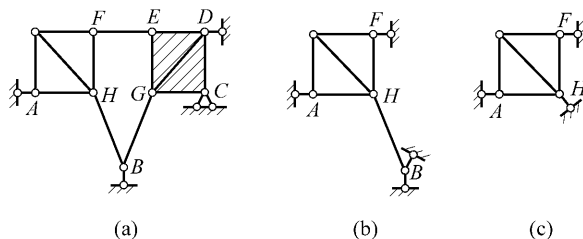


图 1-5

**解：**还是先将体系进行简化。图 1-5(a) 中阴影部分与基础组成了一个大刚片，这样杆件  $FE$ 、 $GB$  就可以看成是与基础相连的支链杆。这时，体系可简化成图 1-5(b) 所示情况。进一步，图 1-5(b) 中的杆件  $HB$  也可看成是与地基相连的支链杆。这时，体系可进一步简化为图 1-5(c) 所示情况。很明显，该体系为无多余约束的几何不变体系。则原体系也是无多余约束的几何不变体系。

**附加例题 1.5** 试分析图 1-6(a) 所示体系的几何组成。

**解：**还是先对体系进行简化。

图 1-6(a) 中杆件  $AD$ 、 $AE$  可以看成是与基础相连的支链杆。这时，体系可简化成图 1-6(b) 所示情况。

这个体系与基础之间有 4 个约束，可以考虑将基础看成一个刚片，用三刚片规则分析。因此，关键的问题是找另外两个刚片。

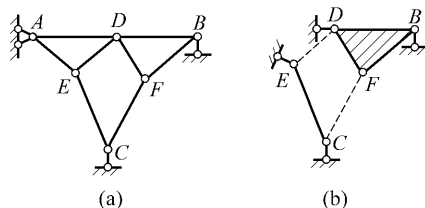


图 1-6

数一数，图 1-6(b) 体系中有基础、4 个支链杆再加上其余 6 个杆件总共有 11 个。因此，可以将基础、一个三角形和一根杆件看成 3 个刚片，其余 6 根杆件看成 3 对约束（相当于 3 个虚铰）。

基础和三角形（图 1-6(b) 中阴影所示）刚片很容易找到，那么第 3 个刚片是哪一根杆件呢？许多读者在这个地方感到没有思路。既然找这个刚片困难，那么我们可以换个思路，试着找作为约束的杆件，剩下的杆件就是刚片了。因为在这个体系中任意两个刚片之间都是通过两根链杆相连的。按照这个思路，首先将与三角形相连的杆件找出来，它们一定是作为约束的杆件（图 1-6(b) 中虚线所示）。这时，就只剩下一个杆件没有被画成虚线了，

显然,这根杆件就是第三个刚片。分析的结论是体系为无多余约束的几何不变体系。

**附加例题 1.6** 分析图 1-7(a)所示体系的几何组成。

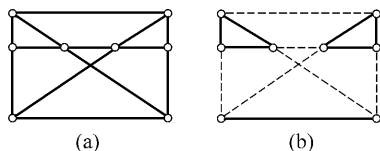


图 1-7

**解:** 图 1-7(a)所示体系杆件较多,可以考虑按三刚片规则分析。

体系中有 11 根杆件,所以,需要将两个三角形和 1 根杆件作为刚片(总共 7 根杆件),其余 6 根杆件作为约束。

两个三角形很容易找出来。然后,将与这两个三角形相连的杆件用虚线表示,很明显,最下面的水平杆就是第三个刚片了。分析的结论是体系为几何瞬变体系。

**附加例题 1.7** 分析图 1-8(a)所示体系的几何组成。

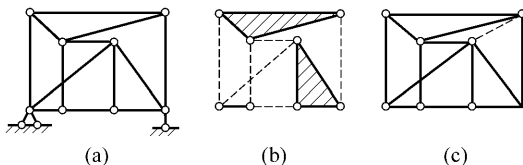


图 1-8

**解:** 首先去掉基础及相应的约束(图 1-8(b)),只分析内部可变性。图 1-8(b)杆件比较多,考虑采用三刚片规则分析。

图 1-8(b)所示体系中有 13 根杆件,需要将两个三角形和一个杆件看成刚片(总共 7 根杆件)、其余 6 根杆件看成约束(相当于 3 个虚铰)。

两个三角形刚片如图 1-8(b)中阴影所示。然后,将与两个三角形相连的杆件用虚线表示。这时,就只剩下左下角的水平杆了,这根杆件就是第三个刚片。分析的结论是原体系为无多余约束的几何不变体系。

**思考**

(1) 若将上部结构增加一根杆件(图 1-8(c)虚线所示),从上面的三角形开始,依次增加二元体,则结论是有一个多余约束的几何不变体系。因此,原体系是无多余约束的几何不变体系。请问这个分析过程严密吗?

(2) 图 1-9(a)所示体系与地基之间有 4 个约束,考虑采用三刚片规则分析。将地基和阴影所示的两部分看成三刚片,则分析的结论是三铰共线、瞬变体系。

若在原体系上增加一根链杆,如图 1-9(b)所示,则阴影所示的两个刚片用一个铰和虚线链杆相连,组成一个无多余约束的刚片。此刚片与地基用四个支链杆相连,则整个体系为有一个多余约束的几何不变体系。因为,虚线链杆是后加上的,所以断定原结构是无多余约束的几何不变体系。这与上面的结论不一样,为什么?

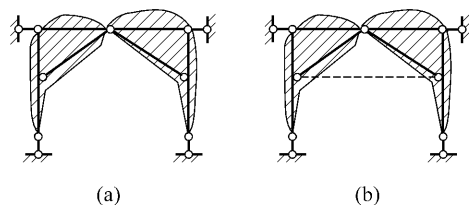


图 1-9

(3) 若增加杆件后得到的体系是无多余约束的几何不变体系,是否可以判定原体系是几何可变体系。缺少的约束数量与增加的杆件数量是否相等?

## 1.4 思考题及答案

1. 无多余约束几何不变体系(静定结构)的三个组成规则之间有何关系?

答:最基本的是三角形规则,它与其他规则的关系可用图 1-10 说明。

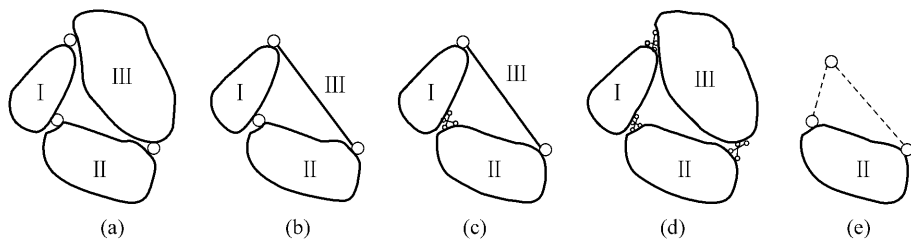


图 1-10

图 1-10(a)为三刚片三铰不共线情况。图 1-10(b)为Ⅲ刚片改成链杆,两刚片一铰一杆不共线情况。图(c)为Ⅰ、Ⅱ刚片间的铰改成两链杆(虚铰),两刚片三杆不全部平行、不交于一点的情况。图(d)为三个实铰均改成两链杆(虚铰),变成三刚片每两刚片间用一虚铰相连、三虚铰不共线的情况。图(e)为将Ⅰ、Ⅲ看成二元体,减二元体所成的情况。

## 2. 实铰与虚铰有何差别?

答: 从瞬间转动效应来说, 实铰和虚铰是一样的。但是, 实铰的转动中心是不变的, 而虚铰转动中心为瞬间的链杆交点, 产生转动后转动中心将发生变化。

3. 试举例说明瞬变体系不能作为结构的原因。接近瞬变的体系是否可作为结构?

答: 如图 1-11(a) 所示, 刚片(阴影所示)与基础用三根竖向平行不等长的支链杆相连。刚片作用有一水平荷载  $F_P$ 。很明显, 这时刚片在水平方向上只作用有荷载  $F_P$ , 是不能平衡的。因此, 刚片会发生水平方向的运动  $\Delta$ , 三个杆件分别绕 A、B、C 点发生转动  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 。微小运动之后, 因为三个杆件的转动的角度不一样, 所以, 三杆位置是既不相互平行, 也不交于一点。根据二刚片原则, 体系变成几何不变体系了。此时, 刚片上的受力如图 1-11(b) 所示。水平方向的平衡方程为

$$F_P = F_{N1} \sin \alpha_1 + F_{N2} \sin \alpha_2 + F_{N3} \sin \alpha_3$$

因为  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$  为微小转角、 $F_P$  为有限值, 所以  $F_{N1}$ 、 $F_{N2}$ 、 $F_{N3}$  将非常大。也就是说该体系在正常的荷载作用下, 会产生非常大的内力, 因此, 瞬变体系不能作为结构使用。同样, 接近瞬变的体系也不能作为结构。

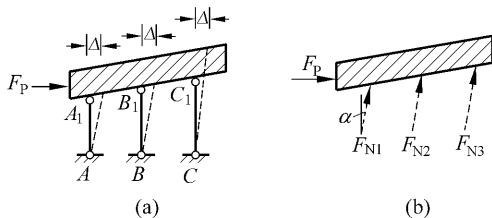


图 1-11

## 4. 平面体系几何组成特征与其静力特征间关系如何?

答: 无多余约束几何不变体系 ↔ 静定结构(仅用平衡条件就能分析受力)

有多余约束几何不变体系 ↔ 超静定结构(仅用平衡条件不能全部解决受力分析)

瞬变体系 ↔ 受小的外力作用, 瞬时可导致某些杆无穷大的内力

常变体系 ↔ 除特定外力作用外, 不能平衡

## 5. 体系计算自由度有何作用?

答: 若体系的计算自由度大于零, 则可直接判断体系为几何可变体系。当能判断体系为结构时, 计算自由度的绝对值即为多余约束的个数。



6. 作平面体系组成分析的基本思路、步骤如何?

答: 分析的基本思路是先设法化简, 找刚片看能用什么规则分析。

一般步骤:

(1) 仅三支链杆(不全平行, 不交一点)可化为内部可变性分析; 有二元体, 从体系中减去; 从基本刚片加二元体找大刚片化简体系。

(2) 对化简后的体系看适合用什么规则并具体分析。

(3) 结论。

7. 连接  $n$  根杆复铰相当于多少单铰?

答: 相当于  $(n-1)$  个单铰。

8. 连接  $n$  根杆的复刚结点相当于多少个单刚结点?

答:  $(n-1)$  个单刚节点。

9. 连接  $n$  个点的复链杆相当于多少根单链杆?

答:  $(2n-3)$  个单链杆。

10. 若三刚片三铰体系中的一个虚铰在无穷远处, 何种情况下体系几何不变? 何种情况下体系常变? 何种情况下体系瞬变?

答: 另外两个铰的连线与无穷远的方向不平行时, 体系是几何不变的; 发生微小位移以后, 另外两个铰的连线与无穷远的方向还平行时, 体系是几何常变的; 另外两个铰的连线与无穷远的方向平行, 发生微小位移以后, 另外两个铰的连线与无穷远的方向不平行了, 体系是几何瞬变的。

11. 若三刚片三铰体系中的两个虚铰在无穷远处, 何种情况下体系是几何不变的? 何种情况下体系是常变的? 何种情况下体系是瞬变的?

答: 当两个无穷远的方向不平行时, 体系是几何不变的; 两个无穷远的方向平行, 发生微小位移后, 两个无穷远方向还平行, 体系是常变的; 两个无穷远的方向平行, 发生微小位移以后, 两个无穷远方向不平行了, 则体系为几何瞬变体系。

12. 瞬变体系产生瞬变的原因是因为约束的数量不够吗?

答: 不是。瞬变体系产生瞬变的原因是因为约束的位置不对。

13. 若三刚片三铰体系中的三个虚铰均在无穷远处, 体系一定是几何可变吗?

答: 一定是几何可变。因为在当前位置体系会运动。

14. 超静定结构中的多余约束是从何角度被看成是“多余”的?

答: 是从约束对体系自由度影响的角度来看的。若约束不能减少体系的自由度, 则是多余的。

## 1.5 自测题及答案

### 几何组成分析自测题(A)

一、是非题(将判断结果填入括弧:以○表示正确,以×表示错误,16分)

1. 图 1-12 中链杆 1 和 2 的交点  $O$  可视为虚铰。( ) (5 分)
2. 在图 1-13 所示体系中,去掉 1-5, 3-5, 4-5, 2-5, 四根链杆后,得简支梁 1-2, 故该体系为具有 4 个多余约束的几何不变体系。( ) (5 分)
3. 图 1-14 所示体系为几何可变体系。( ) (6 分)

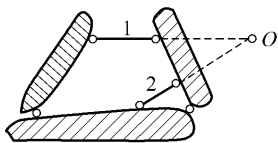


图 1-12

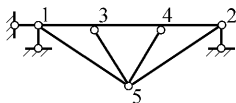


图 1-13

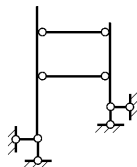


图 1-14

二、选择题(将选中答案的字母填入括弧内,24分,每小题8分)

1. 图 1-15 所示体系有 3 个多余约束,为保证其几何不变,哪两根链杆是不能同时去掉的( )。  
A.  $a$  和  $e$ ;      B.  $a$  和  $b$ ;      C.  $a$  和  $c$ ;      D.  $c$  和  $e$ 。
2. 图 1-16 所示体系的几何组成为( )。  
A. 几何不变,无多余约束;      B. 几何不变,有多余约束;  
C. 瞬变体系;      D. 常变体系。
3. 图 1-17 所示体系的几何组成为( )。  
A. 几何不变,无多余约束;      B. 几何不变,有多余约束;  
C. 瞬变体系;      D. 常变体系。

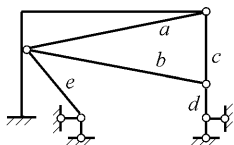


图 1-15

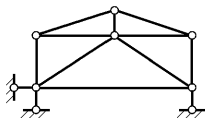


图 1-16

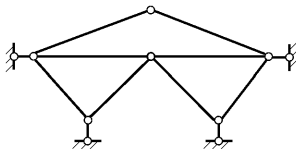


图 1-17

三、填空题(将答案写在空格内,20分,每小题10分)

1. 图 1-18 所示体系是\_\_\_\_\_体系。

2. 图 1-19 所示体系是\_\_\_\_\_体系。

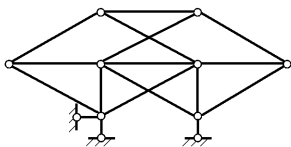


图 1-18

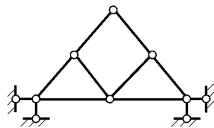


图 1-19

四、分析图示平面体系的几何组成(40 分,每小题 20 分)

1. 如图 1-20 所示。

2. 如图 1-21 所示(图中未画圈的点为交叉点)。

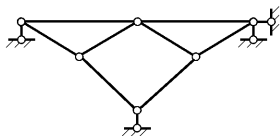


图 1-20

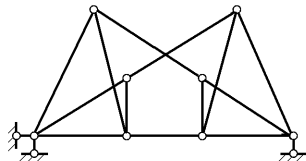


图 1-21

## 几何组成分析自测题(B)

一、是非题(将判断结果填入括弧:以○表示正确,以×表示错误,16 分)

1. 两刚片或三刚片组成几何不变体系的规则中,不仅指明了必需的约束数目,而且指明了这些约束必须满足的位置要求。( ) (5 分)

2. 几何瞬变体系产生的运动非常微小并很快就转变成几何不变体系,因而可以用作工程结构。( ) (5 分)

3. 图 1-22 所示体系是几何不变体系。( ) (6 分)

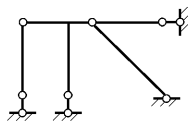


图 1-22

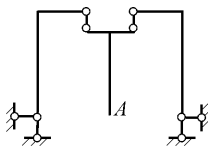


图 1-23

二、选择题(将选中答案的字母填入括弧内,24 分,每小题 8 分)

1. 欲使图 1-23 所示体系成为无多余约束的几何不变体系,则需在 A 端加入( )。

- A. 固定铰支座;  
 C. 滑动铰支座;  
 2. 图 1-24 所示体系的几何组成为( )。  
 A. 几何不变,无多余约束;  
 C. 瞬变体系;  
 3. 图 1-25 所示体系的几何组成为( )。  
 A. 几何不变,无多余约束;  
 C. 瞬变体系;
- B. 固定支座;  
 D. 定向支座。  
 B. 几何不变,有多余约束;  
 D. 常变体系。  
 B. 几何不变,有多余约束;  
 D. 常变体系。

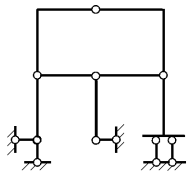


图 1-24

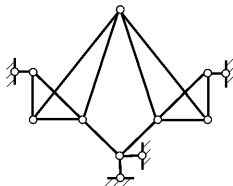


图 1-25

三、填充题(将答案写在空格内,20 分,每小题 10 分)

1. 图 1-26 所示体系是\_\_\_\_\_体系。  
 2. 图 1-27 所示体系是\_\_\_\_\_体系。

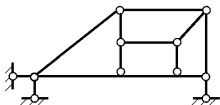


图 1-26

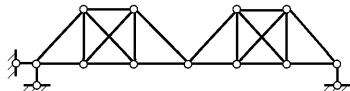


图 1-27

四、分析图示平面体系的几何组成(40 分,每小题 20 分)

1. 如图 1-28 所示。(图中未编号的点为交叉点)  
 2. 如图 1-29 所示。

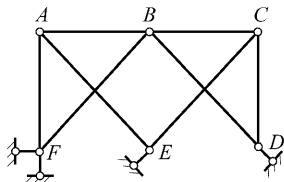


图 1-28

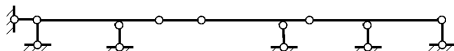


图 1-29

**参考答案(A)**

一、1.  $\times$       2.  $\times$       3.  $\times$

二、1. B      2. B      3. C

三、1. 有一个多余约束的几何不变      2. 瞬变

四、1. 几何不变,无多余约束      2. 几何不变,无多余约束

**参考答案(B)**

一、1.  $\bigcirc$       2.  $\times$       3.  $\times$

二、1. B      2. D      3. A

三、1. 无多余约束的几何不变      2. 常变

四、1. 几何不变,无多余约束      2. 几何不变,无多余约束

## 静定结构受力分析

### 2.1 学习目的

本章的主要内容是利用平衡条件求解各种静定杆系结构在荷载作用下的内力及其变化规律。

学习这些内容的目的有如下几个方面：

(1) 计算静定结构内力并进行截面设计

(2) 为求解静定结构的位移作准备 在利用虚功原理求解静定结构的位移时,需要分别求出静定结构在荷载和单位力作用下的内力。这是静定结构位移求解的第一步。

(3) 为超静定结构的分析作准备 在超静定结构的分析中,既要用到位移的协调条件,也要用到力的平衡条件。

因此,静定结构内力分析是结构力学十分重要的基础性内容,需要熟练掌握。

### 2.2 基本内容总结和学习建议

#### 2.2.1 一般方法

静定结构是无多余约束的几何不变体系,其上所有的约束都是维持平衡所必需的。因此,静定结构的全部反力和内力都可以利用平衡方程求解。求解的基本过程是取隔离体、列平衡方程、解方程求未知力。这个过程对所有静定结构都是适用的,必须熟练掌握。学习时要特别注意对这个过程的总体把握及其在具体问题中的灵活应用。下面,总结一下这个基本过程在求支反力(约束力)及内力中的具体应用。

### 1. 求支座反力或刚片间约束力的一般方法

(1) **二刚片型结构** 两个刚片间有三个约束力。取其中一个刚片为隔离体,可列出三个平衡方程,解出三个约束力。

(2) **三刚片型结构** 任意两个刚片间都有两个约束力。分别取这两个刚片为隔离体,可列出两个包含这两个约束力的联立方程,进而解出约束力。

双截面法是求解三刚片型结构的一般方法,凡是符合三刚片组成规律的结构,用这个方法均可以求出全部约束力。对于一些简单的结构,有时并不用解联立方程。

(3) **基-附型结构** 首先,求附属结构的约束力;然后,将约束力反向作用到基本结构上,再求解基本结构的约束力。

### 2. 求内力的一般方法

求出支座反力和刚片间约束力以后,就可以针对每一个刚片求截面内力了。

(1) **切断控制截面,取出部分结构作为隔离体** 取隔离体时要注意约束必须全部断开,用相应的约束反力来代替。未知力按规定的正向画,已知力按实际方向画。

(2) **列隔离体的平衡方程,求截面内力** 列方程时尽量使一个方程只包含一个未知力,避免解联立方程。

从上面的总结可以看出,无论是求支反力还是求内力,过程都是一样的。

## 2.2.2 桁架结构的受力分析

### 1. 桁架分类

有不同的分类方法,若根据几何组成方式进行分类,不同的桁架类型可采用不同的求解过程。

(1) **简单桁架** 由基础或基本三角形,通过依次增加二元体所组成的桁架。这种桁架只需用结点法不解联立方程就可以依次求出所有杆的内力。

(2) **联合桁架** 由几个简单桁架按二、三刚片组成规则构造的静定结构。这种桁架需要用截面法先求出支反力和简单桁架间的约束力,然后,再解每一个简单桁架。

(3) **复杂桁架** 可根据情况有些可用结点法和截面法联合求解。

学习时要熟练掌握简单桁架、联合桁架的求解。了解复杂桁架的求解。

## 2. 桁架的一般求解方法

(1) **结点法** 取结点作为隔离体。隔离体上的力为平面汇交力系,所以只有两个平衡方程可以利用,由隔离体的平衡最多能求出两个未知力。

对于简单桁架,按照去掉二元体的顺序逐步求解,不用解联立方程,就可依次求得全部杆件的轴力。

(2) **截面法** 用截面切开桁架,取其中的一部分作为隔离体。隔离体上的力为平面任意力系,有三个平衡方程可以利用,最多能求三个未知力。

(3) **联合法** 联合应用结点法和截面法建立只包含一个未知力的平衡方程,主要用于复杂桁架的求解。求解步骤与具体问题有关,一般是用结点法建立出截面法方程中未知力间的关系。

## 3. 桁架求解的一些特殊情况

### (1) 零杆的情况

- ① 二杆结点(图 2-1(a))
- ② 结点单杆(图 2-1(b))
- ③ 对称性中的“K”结点(图 2-1(c))

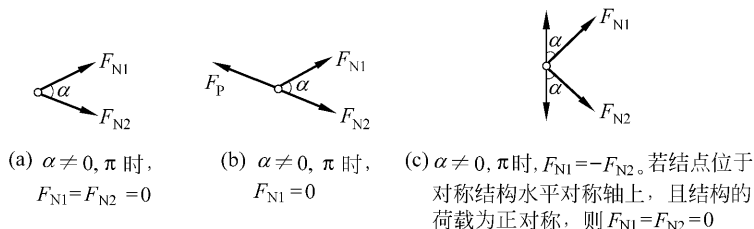


图 2-1

### (2) 特殊结点(图 2-2)

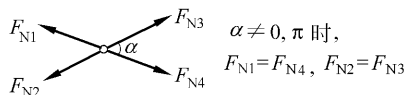


图 2-2

(3) **截面单杆的情况** 截断三杆以上时,若除一根杆(单杆)外,其余各杆均交于一点,用力矩法求该杆内力。若除一根杆(单杆)外,其余各杆均平行,



用投影法求该杆内力。

(4) **杆件轴力的滑移和分解** 有些斜杆轴力的力臂不方便求,可以将轴力滑移某一特殊位置,使该力的一个分力力臂等于零,另一个分力的力臂也很容易确定。求出一个分力后,按照比例关系,就可以求出轴力了。

(5) **对称性的利用** 利用对称性可以判断某些杆件的轴力;对于复杂结构还可以将荷载进行分组计算。

上面几种特殊情况可以使桁架计算过程得到简化。还有一些其他情况建议读者在学习时注意总结和积累。

#### 4. 各类平面梁式桁架的比较

学习这部分内容的目的是通过轴力分布特点的比较,了解各种梁式桁架的适用范围、施工特点等。使读者认识到合理的结构形式不是唯一的,选择时要综合考虑使用功能、荷载形式、环境特点、材料种类、施工的难易程度等多方面的要求。这对培养读者工程意识是非常重要的。

### 2.2.3 三铰拱结构的受力分析

学习这部分内容的要求是:

(1) **明确拱结构的受力特点、材料选用和适用范围等内容。**

轴线为曲线、在竖向荷载作用下能产生水平反力。可以发挥混凝土及砖石材料受压性能好的特点。

(2) **熟练掌握竖向荷载作用下等高拱反力和截面内力计算公式。**通过计算公式,正确理解拱与等代梁受力的异同点,加深对拱结构受力特点的认识。

(3) **理解合理拱轴的定义,熟练掌握其计算公式。**

### 2.2.4 静定梁、静定刚架和组合结构的受力分析

(1) **熟练绘制简支梁、悬臂梁和伸臂梁在均布荷载、集中力和集中力偶作用下的弯矩图和剪力图** 读者应该作到“提笔就画”的程度。

(2) **熟练求解多跨静定梁、多层多跨刚架(基-附结构)的支反力及各部分之间的约束力** 读者应作到思路清晰、求解正确。

(3) **熟练掌握弯矩的区段叠加法**(这个方法在梁及刚架的受力分析中具有非常广泛的应用) 建议读者一定要多做练习,做到熟能生巧。

(4) **熟练掌握组合结构的计算** 一定要区分哪些杆件是桁架杆、哪些杆件是梁式杆。取隔离体时,应尽量切断桁架杆,减少未知力的个数。

### 2.2.5 静定结构性质

解答的唯一性是基本性质,在前面的学习积累中注意体会静定结构的下列导出性质:

(1) 支座移动、温度改变、制造误差等因素只能使结构产生位移,不能产生内力、反力。

(2) 结构局部能平衡外荷载时,仅此部分受力,其他部分没有内力。

(3) 结构的一个几何不变部分上的外荷载作静力等效变换时,仅使变换部分范围内的内力发生变化。

(4) 结构的一个几何不变部分在保持连接方式、不变性的条件下,用另一构造方式的几何不变体代替,则其他部分受力不变。

(5) 具有基本部分和附属部分的结构,当仅基本部分受荷载时,附属部分不受力。

熟练地应用上述静定结构性质,可使分析计算得到简化。

### 2.3 附加例题

附加例题 2.1 试分析确定图 2-3(a)所示桁架的零杆。

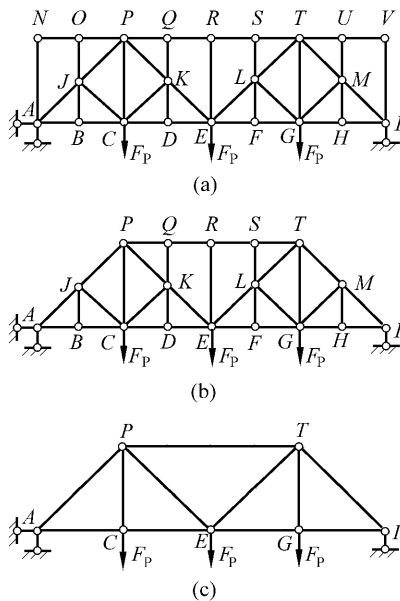


图 2-3

解：这个例题中包括两种零杆情况。

(1) **二杆结点** 结点  $N$  是二杆结点，且无荷载作用，故杆件  $NA$ 、 $NO$  均为零杆。去掉杆件  $NA$ 、 $NO$  以后，结点  $O$  也是同样的二杆结点，故杆件  $OJ$ 、 $OP$  也是零杆。同理，可判断结点  $V$  的杆件  $VI$  和  $VU$ 、结点  $U$  的杆件  $UT$  和  $UM$  也是零杆。

(2) **结点单杆** 去掉已判断出的零杆后的结构如图 2-3(b) 所示。在这个图中可以明显看出，杆件  $JB$ 、 $DK$ 、 $QK$ 、 $RE$ 、 $SL$ 、 $LF$ 、 $MH$  都是无荷载作用时的结点单杆，因此，均为零杆。去掉这些零杆后，又发现杆件  $JC$ 、 $CK$ 、 $LG$ 、 $MG$  也变成了同样的结点单杆，也是零杆。

去掉全部零杆后，得到如图 2-3(c) 所示结构。这时，再进行计算就简单多了。

**附加例题 2.2** 试确定图 2-4(a) 所示桁架中的零杆。

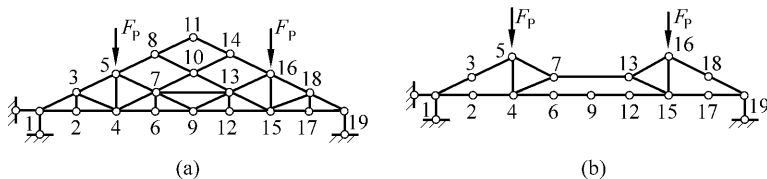


图 2-4

解：这个例题中包括三种零杆情况。

(1) **二杆结点** 结点 11 上只有两个不共线的杆，且无荷载作用，故杆件 11-8、11-14 均为零杆。接下来，可同理判断结点 8 的杆件 8-5 和 8-10、结点 14 的杆件 14-10 和 14-16、结点 10 的杆件 10-7 和 10-13 也是零杆。

(2) **结点单杆** 结点 2 有一个单杆 2-3，且无荷载作用，故单杆 2-3 为零杆。同理单杆 6-7、12-13、17-18 也是零杆。去掉这些零杆后，杆件 3-4、15-18 也变成了单杆，也是零杆。

(3) **对称性中的“K”结点** 结点 9 为“K”结点，杆件 7-9、9-13 的轴力应该等值反向；但是，这两个杆件又位于对称轴两侧的对称位置，且荷载对称，因此，从对称性的角度出发，两个杆件的轴力又应该相等。由此，可以判定杆件 7-9、9-13 为零杆。

去掉全部零杆后，得到如图 2-4(b) 所示结构。

**附加例题 2.3** 试求图 2-5(a) 所示桁架各杆轴力。

解：由于结构和荷载都是对称的，处于对称位置的一对杆件轴力相等，故

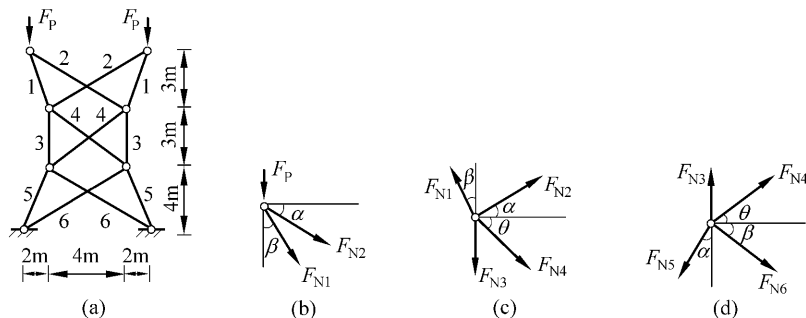


图 2-5

每对杆件采用了相同的编号。为了方便,先将一些角度的函数值计算出来

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \beta = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin \theta = \frac{3}{5}, \quad \cos \theta = \frac{4}{5}$$

该结构是简单桁架,可以从上部依次取二元体结点计算,解出全部杆件的轴力。

取杆件 1、2 组成的二元体结点为隔离体(图 2-5(b)),列

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N1} \sin \beta + F_{N2} \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N1} \cos \beta + F_{N2} \sin \alpha + F_P = 0$$

得

$$F_{N1} = -\frac{\sqrt{13}}{2}F_P = -1.8028F_P, \quad F_{N2} = \frac{\sqrt{5}}{2}F_P = 1.118F_P$$

取杆件 3、4 组成的二杆结点为隔离体(图 2-5(c)),分别列

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N4} \cos \theta + F_{N2} \cos \alpha - F_{N1} \sin \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N3} + F_{N4} \sin \theta - F_{N2} \sin \alpha - F_{N1} \cos \beta = 0$$

得

$$F_{N4} = -2.5F_P, \quad F_{N3} = 0.5F_P$$

取杆件 5、6 组成的二杆结点为隔离体(图 2-5(d)),列

$$\sum F_x = 0, \quad F_{N6} \cos \beta - F_{N5} \sin \alpha + F_{N4} \cos \theta = 0$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{N6} \sin \beta + F_{N5} \cos \alpha - F_{N4} \sin \theta - F_{N3} = 0$$

得

$$F_{N5} = -1.9566F_P, \quad F_{N6} = 1.3521F_P$$