

封举富 王立威

北京大学信息科学技术学院,视觉与听觉信息处理国家重点实验室,北京 100871

1.1 引言

给定两幅图像,如何度量它们的差异或相似性,这是图像识别和检索的基本问题。一幅 $M \times N$ 大小的数字图像通常以矩阵的方式来表示和存储:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x^1 & \cdots & x^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{(M-1) \times N + 1} & \cdots & x^{M \times N} \end{bmatrix} \quad (1)$$

一般要把二维图像扩展为 $\mathbf{R}^{M \times N}$ 空间中的一个点或者向量 $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{M \times N})$ 。这样,一幅图像对应 $\mathbf{R}^{M \times N}$ 空间中的一个点,我们把图像所对应的空间称为图像空间。一组图像或者一段视频图像在 $\mathbf{R}^{M \times N}$ 空间张成一个子空间或者流形。如在人脸图像识别过程中,在各种姿势和光照等条件下,可以得到大量的人脸图像,它们生成了图像空间中的一个低维人脸子空间^[1]。在视频识别中,数据的基本单位是一段视频,也就是由很多帧组成的一系列图像。衡量两段视频的相似程度就要求给出两组图像间的距离度量。

在图像空间中可以建立各种距离。严格意义上的距离度量满足非负性、自反性、对称性和三角不等式等性质。本文主要介绍图像空间中两幅图像间的距离和两组图像间的距离。

1.2 两幅图像间的距离

度量图像距离的方法有很多^[2,6,9,10,14~20],最常用的是欧氏距离。图像空间中,两幅图像的欧氏距离就是两个点之间的欧氏距离:

^{*} 本文得到国家自然科学基金(60575002,60635030)、国家重点基础研究发展计划(2004CB318000)和新世纪优秀人才支持计划资助。

$$d_{ED}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{M \times N} (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

更一般的,有 Minkowski 距离:

$$d_{MD}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{M \times N} |x^i - y^i|^p \right)^{1/p} \quad (3)$$

通常也称为 L_p 范数。 L_1 范数,也称为 Manhattan 距离或城区距离。 L_∞ 范数就是 $|x^i - y^i|$ 的最大值。

二值图像可以看做二维图像平面上的点集,因此,可以借鉴数学上关于点集之间距离的定义。给定欧氏空间中的两个点集 $A = \{a_1, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$,可以定义它们之间的 Hausdorff 距离:

$$H(A, B) = \max[h(A, B), h(B, A)]$$

$$h(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\| \quad (4)$$

$h(A, B)$ 通常被称作有向 Hausdorff 距离,它给出了点集 A 中的点到点集 B 的最大距离。 $h(B, A)$ 则给出了点集 B 中的点到点集 A 的最大距离。因此, Hausdorff 距离度量了点集 A 与 B 之间的最大差异。当 A, B 都是闭集时, Hausdorff 距离满足非负性、自反性、对称性和三角不等式。当 A, B 都是凸集时, Hausdorff 距离等于它们的边缘之间的 Hausdorff 距离。因此,在用 Hausdorff 距离来度量图像距离时,一般要先进行边缘提取。但是, Hausdorff 距离对于噪声非常敏感。当图像存在噪声时,它们将成为图像差异最大的点。由此, Huttenlocher 等人^[2]提出了广义 Hausdorff 距离来度量二值图像的距离。广义 Hausdorff 距离采用第 k 个最大值来决定距离。其最大的特点是允许图像在有遮挡的情况下(即部分图像)进行比较。该距离现已广泛应用于二值图像以及形状的比较^[3~5]。

人的视觉对于图像的几种典型变化,如图像的平移、旋转、伸缩等具有很强的鲁棒性。当图像发生上述某种变化时,所有这些由变化生成的图像在图像空间中构成的集合是什么样的呢?如果变化只取决于一个参数(比如横向平移的参数,就是平移的距离),那么图像变化的轨迹就是一条曲线。如果变化有 k 个自由度(比如二维空间中的刚体运动有 3 个自由度),那么所有经变化得到的图像构成图像空间中的 k 维流形。必须要注意的是,即使是平移和旋转这样简单的变换,得到的图像流形也是非线性的。为了使图像距离对于变换具有不变性,一个很自然的想法是定义图像距离为两个流形之间的距离。但是,由于流形是非线性的,求解流形间的距离非常困难。另一方面,有时候我们只希望图像距离并非对于变换总是不变的,只具有局部不变性——也就是对微小的变化具有不变性就够了。比如“6”和“9”两个数字,如果图像距离对旋转完全不变,那么这两个数字的距离是零,这并不是我们希望的结果,因此局部不变显得更加合理。

Simard 等人^[6]正是基于上述考虑在研究手写数字识别时提出了切距离(tangent distance)。

它首先考虑两幅图像 P 与 E 的变化流形在两幅图像处的切空间。显然,如果流形是 k 维的,则切空间也是 k 维的。切距离就定义为两个切空间之间的最小距离。由于两个线性子空间之间的距离就是最小二乘问题,因此非常容易解出。在手写数字应用中,切距离考虑 7 种变换:纵横两个方向的平移、旋转、伸缩、线条粗细以及两个双曲变换(保证 6 种二维平面仿射变换都包括在内)。采用切距离的最近邻方法在著名的美国邮政服务手写数字数据集(USPS)上,达到了与人的识别率相同的水平,大大超过其他方法。该方法还被推广到一般的模式识别问题^[7,8]上。但是,计算切距离需要充分利用先验知识,针对具体图像考虑可能的变换,不同类型的图像一般具有不同的变换。尽管切距离在手写数字识别中取得了很大的成功,但其应用还是受到一定的限制。

图像的先验知识不仅可以表示为确定的信息,也可以由模糊集合的隐身概念引出。模糊图像度量 FIM(fuzzy image metric)^[9]就是这方面的代表。模糊图像度量基于模糊积分的概念,改进像传统欧氏距离那样逐像素对比的方法,考虑一个像素及其周围某个邻域内所有像素的关系,并且应用于图像压缩与编码,取得了较好的效果。

我们继续考虑图像空间中的欧氏距离。当图像由矩阵形式扩展为向量形式时,图像所具有的几何空间关系消失了,因此欧氏距离对图像噪声和变化非常敏感,即使图像仅有微小变化,也可能产生很大的距离数值。一个很自然的想法就是把图像的几何空间关系纳入到距离度量中。

首先,以 $e_1, \dots, e_{M \times N}$ 作为图像空间的一组基,其中 e_{kN+l} 对应于位于 (k, l) 的一个理想点信号源。于是一幅图像 $x = (x^1, \dots, x^{M \times N})$, 其中 x^{kN+l} 是 (k, l) 像素的灰度值,就对应于图像空间中的一个点,并且 x^{kN+l} 是 e_{kN+l} 的坐标值。图像空间的原点代表一幅灰度值处处为零的图像。

图像空间的距离度量完全由基向量的度量系数确定。度量系数 $g_{ij}, i, j = 1, \dots, M \times N$ 定义为

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} \sqrt{\langle e_j, e_j \rangle} \cdot \cos \theta_{ij} \quad (5)$$

其中, $\langle, \rangle$ 代表标量积, θ_{ij} 是基向量 e_i 和 e_j 之间的夹角。注意,如果 $\langle e_i, e_i \rangle = \langle e_j, e_j \rangle = \dots$, 即所有基向量的长度都相等,则 g_{ij} 完全依赖于夹角 θ_{ij} 。给定了度量系数,两幅图像的距离度量就可以写成

$$d(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{M \times N} g_{ij} (x^i - y^i)(x^j - y^j) \right)^{1/2} = (x - y)^T \mathbf{G} (x - y) \quad (6)$$

其中对称矩阵 $\mathbf{G} = (g_{ij})_{M \times N \times M \times N}$ 称为度量矩阵。

由此,我们提出了图像欧氏距离^[10]。

定义 1 一个距离度量 $d(x, y) = [(x - y)^T \mathbf{G} (x - y)]^{1/2}$, $\mathbf{G} = (g_{ij})_{M \times N \times M \times N}$ 称为图像欧氏距离 IMED(image euclidean distance),如果它满足条件:

(C1) 度量系数 g_{ij} 完全由像素 $P_i P_j$ 间距离决定。我们用 f 来表示这一函数关系:

$$g_{ij} = f(|P_i - P_j|), \quad i, j = 1, \dots, M \times N \quad (7)$$

(C2) f 是连续函数, 而且 g_{ij} 随 $|P_i - P_j|$ 的增加而单调减小;

(C3) f 是普适函数, 也就是说, 它适用于任意大小和分辨率的图像。

C1 要求像素距离信息必须包含于图像距离度量中。 g_{ij} 仅由 $|P_i - P_j|$ 决定使得距离对于图像的线性变换具有不变性。同时, 这还意味着所有的基向量具有相同长度, 因此, g_{ij} 与 $\cos\theta_{ij}$ 具有线性关系。C2 指出了如何将像素距离信息融合到度量系数中, 从而使诱导的图像距离直观上是合理的。 f 的连续性是一个一般性的要求。 g_{ij} 随 $|P_i - P_j|$ 的增加而单调减小意味着图像距离与形变的程度有关。最后, C3 保证了定义的度量对所有图像都适用。

为了使条件 C1~C3 全部得到满足, f 必为正定函数。最重要的正定函数是 Gauss 函数。

$$g_{ij} = f(|P_i - P_j|) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-|P_i - P_j|^2 / 2\sigma^2) \quad (8)$$

其中 σ 是方差参数, 在本文中总是设为 1。由式(2)和式(8)可以看出, 当 $\sigma \rightarrow \infty$ 时, 图像欧氏距离趋于传统的欧氏距离。实际上, 当二维图像扩展为高维空间中的点或向量时, 传统的欧氏距离没有考虑图像像素之间的空间关系, 其基向量是完全独立的。而图像欧氏距离考虑了图像像素之间的空间关系, 并体现在度量系数中。

我们利用它来构造图像欧氏距离(IMED):

$$d_{\text{IMED}}(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{M \times N} \exp(-|P_i - P_j|^2 / 2) (x^i - y^i)(x^j - y^j) \right)^{1/2} \quad (9)$$

进一步考虑矩阵 $\mathbf{G}$ 的分解: $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 。尽管存在着无穷多种形如 $\mathbf{G} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的分解, 我们采用其中十分特殊的一种:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{1/2} \mathbf{G}^{1/2} \quad (10)$$

其中, 对称矩阵 $\mathbf{G}^{1/2}$ 唯一地被下式定义:

$$\mathbf{G}^{1/2} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{\Gamma}^T \quad (11)$$

这里, $\mathbf{\Lambda}$ 是以 $\mathbf{G}$ 的特征根为元素的对角阵 (由于 $\mathbf{G}$ 正定, 因此 $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ 的对角元素都是正实数), $\mathbf{\Gamma}$ 是正交阵, 其列向量是 $\mathbf{G}$ 的特征向量。由此, 图像欧氏距离诱导了一个变换, 我们称之为标准化变换 (standardizing transform):

$$u = \mathbf{G}^{1/2} x, v = \mathbf{G}^{1/2} y \quad (12)$$

图像欧氏距离实质上也是变换域上的欧氏距离:

$$d_{\text{IMED}}(x, y) = ((x - y)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (x - y))^{1/2} = ((u - v)^T (u - v))^{1/2} \quad (13)$$

我们目前的大部分识别方法都是基于欧氏距离的。因此, 所有这些识别方法都可以移植到这个变换域中来。也就是说, 可以先对图像做一个标准化变换, 然后利用这些识别

方法来进行识别。另外,注意到 Gauss 函数是可分离的,因此可以由矩阵的 Kronecker 积来实现标准化变换的快速算法。

我们针对 USPS 手写数字数据集,利用最近邻法对不同图像距离进行了实验比较,如图 1 所示。其中, TED 代表传统欧氏距离; TD 代表切距离; HD 代表广义 Hausdorff 距离; FIM 代表模糊图像距离; IMED 代表图像欧氏距离。图像欧氏距离(IMED)仅次于专门针对该问题设计的切距离,而优于其他图像距离。由于图像欧氏距离不依赖先验知识,并且等价于标准化变换后的欧氏距离,因此可以非常方便地嵌入到当前的主要识别算法中,如 SVM 等。目前,图像欧氏距离在人脸检测和识别、三维姿态估计、非线性降维等方面得到了广泛应用^[11~13]。实验结果表明,利用图像欧氏距离优于传统的欧氏距离。

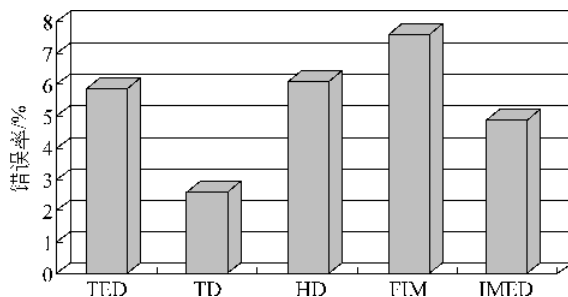


图 1 USPS 手写数字数据集,不同图像距离识别结果比较

1.3 两组图像间的距离

研究两组图像之间距离的首要问题是如何方便地描述一组图像。目前比较普遍的方法是子空间法。将每幅图像看做图像空间中的一个点,一组图像就张成一个子空间。因此,研究两组图像之间距离的问题就转化为研究子空间之间距离的问题。

Hotelling^[21]最先给出了主角度(principal angle)的递归定义:子空间 U, V 之间的主角度 $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_k \leq (\pi/2)$ 唯一地定义为

$$\cos(\theta_k) = \max_{u \in U} \max_{v \in V} u^T v \quad (14)$$

并满足下面的约束:

$$\begin{aligned} u^T u &= v^T v = 1, \\ u^T u_i &= v^T v_i = 0, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (15)$$

Yamaguchi 等人^[22]在图像识别领域中较早考虑子空间距离的工作。他们利用最小主角度作为衡量两个视频序列相似度的度量。

Wolf 和 Shashua^[23,24]采用 $\prod_{i=1}^k \cos^2(\theta_i)$ 作为子空间的相似度,并将其推广到非线性子

空间。同时,他们还很巧妙地证明了此相似度是一个正定函数,满足 Mercer 条件,因此可以作为 SVM 的核函数用于识别。

在矩阵理论中,子空间距离由它们所对应的投影矩阵之差的范数来定义。考虑 $\mathbf{R}^d$ 中的两个子空间 U, V 。我们首先假定 U, V 具有相同的维数,比如说 $m (m \leq d)$ 。令 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 为子空间 U 的一组标准正交基。 U 的投影矩阵 P_U 为

$$P_U = [u_1, u_2, \dots, u_m][u_1, u_2, \dots, u_m]^T \quad (16)$$

Golub^[25] 定义了 U 与 V 之间的距离为投影矩阵差的 2 范数:

$$d_G(U, V) = \|P_U - P_V\|_2 \quad (17)$$

Werman 等人^[26]则采用 Frobenius 范数来定义:

$$d_W(U, V) = \|P_U - P_V\|_F \quad (18)$$

上述两个定义都是从矩阵的角度给出的,我们对 Golub-Werman 定义的几何内涵予以解释,给出等价的几何定义。

记 $d(u_i, V)$ 为从向量 u_i 到子空间 V 的所谓 L_2 -Hausdorff 距离。

$$d(u_i, V) = \min_{v \in V} \|u_i - v\|_2 \quad (19)$$

我们如下定义子空间距离:

定义 2(Golub-Werman 距离的几何等价定义) 两个 m 维子空间 U, V 之间的距离 $d_{GW}(U, V)$ 定义为

$$d_{GW}(U, V) = \sqrt{\sum_{i=1}^m d^2(u_i, V)} \quad (20)$$

其中, $u_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是子空间 U 的一组标准正交基。

Golub-Werman 子空间距离具有如下性质:

(1) 对正交基的选取具有不变性;

(2) 非负性: $d_{GW}(U, V) \geq 0$, 而且 $d_{GW}(U, V) = 0$ 当且仅当 $U = V$;

(3) 对称性: $d_{GW}(U, V) = d_{GW}(V, U)$;

(4) 三角不等式: $d_{GW}(U, V) \leq d_{GW}(U, W) + d_{GW}(W, V)$ 且等号成立当且仅当 $U = W$ 或 $V = W$;

(5) 有最大值(上界): $d_{GW}(U, V) \leq \sqrt{m}$, 并且 $d_{GW}(U, V) = \sqrt{m}$ 当且仅当 $U \perp V$, 也就是说, U 中的每个向量都垂直 V , 反之亦然。

上面的几何等价定义可以推广到两个子空间具有不同维数的情形。令 U, V 分别为 m, n 维子空间。令 $u_1, u_2, \dots, u_m$ 和 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 分别为 U, V 的一组标准正交基。我们给出了一般性的 L_2 -Hausdorff 子空间距离^[27, 28]。

定义 3 m 维子空间 U 与 n 维子空间 V 之间的 L_2 -Hausdorff 子空间距离为

$$d_H(U, V) = \sqrt{\max(m, n) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle u_i, v_j \rangle^2} \quad (21)$$

可以证明该距离具有对标准正交基选择的不变性,并满足非负性、对称性、三角不等式等性质^[29]。在维数不等的情形下,我们给出的距离与 Golub-Werman 的定义稍有不同。容易验证,Golub-Werman 子空间距离等价于

$$d_{GW}(U, V) = \sqrt{\frac{m+n}{2} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle u_i, v_j \rangle^2} \quad (22)$$

根据给出的等价定义可以发现,距离仅依赖于内积,而与原始输入变量无关。因此能够利用核方法很容易地将它推广到非线性情形。

1.4 结束语

通过图像进行识别是机器感知的主要方式之一。目前,图像识别研究取得了令人瞩目的进展,如 OCR、指纹识别等已得到广泛应用。图像识别一般包括特征提取和识别。好的特征有助于识别,如指纹图像中的细节特征点^[30]。识别的本质是区分不同的类别。所谓好的特征是指区分能力强的特征,亦即使得类间距增大,类内距减小。因此,距离是识别的核心问题。好的距离可以减小类内距或者增加类间距。

本文简要介绍了有关两幅图像间距离和两组图像间距离的一些研究工作。关于两幅图像间的距离,我们认为应该充分考虑图像的空间关系和先验知识。关于两组图像间距离的研究目前还主要限制在线性子空间距离的范畴内。实际上,除了非常简单的情形,一般来说,一组图像构成非线性流形,可以利用核方法对现行子空间的工作进行非线性的扩展^[31]。另外,值得引起关注的是距离学习方面的工作^[32~35]。

总之,研究图像空间中的图像距离和子空间距离,不仅对于图像识别具有基本的理论意义,而且具有重要的应用价值。

参考文献

- [1] Basri R, Jacobs D. Lambertian reflectance and linear subspaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(2): 218~233
- [2] Huttenlocher D P, Klanderman G A, Rucklidge W J. Comparing images using the hausdorff distance. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993, 15(9): 850~863
- [3] Huttenlocher D P, Lilien R H, Olson C F. View-Based recognition using an eigenspace approximation to the hausdorff measure. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1999, 21(9): 951~955
- [4] Arkin E M, Chew L P, Huttenlocher D P, Kedem K, Mitchell J S B. An efficiently computable metric for comparing polygonal shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991, 13(3): 209~216

- [5] Baddeley A J. An error metric for binary images. In: Forstner W, Ruwiedel S, eds. Robust Computer Vision: Quality of Vision Algorithms. Wichmann Verlag, 1992. 59~78
- [6] Simard P, Cun Y L, Dender J. Efficient pattern recognition using a new transformation distance. In: Hanson S, Cowan J, Giles C, eds. Advances in Neural Information Processing System. San Mateo: Morgan Kaufman Publishers, 1993. 50~58
- [7] Simard P, Cun Y L, Dender J, Victorri B. Transformation invariance in pattern recognition tangent distance and tangent propagation. Lecture Notes in Computer Science 1524, Springer-Verlag, 1998. 239~274
- [8] Keyser D, Macherey W, Ney H, Dahmen J. Adaptation in statistical pattern recognition using tangent vectors. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(2): 269~274
- [9] Li J, Chen G, Chi Z. A fuzzy image metric with application to fractal coding. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 11(6): 636~643
- [10] Wang L, Zhang Y, Feng J. On the euclidean distance of images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(8): 1334~1339
- [11] Wang R, Chen J, Shan S, Gao W. Enhancing training set for face detection. In: Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition. Hong Kong, 2006. 477~480
- [12] Chen J, Wang R, Shan S, Chen X, Gao W. Isomap based on the image euclidean distance. In: Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition. Hong Kong, 2006. 1110~1113
- [13] Tangkuampien T, Suter D. 3D object pose inference via kernel principal component analysis with image euclidian distance. In: Proceedings of British Machine Vision Conference. Edinburgh, 2006. 137~146
- [14] Santini S, Jain R. Similarity measures. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1999, 21(9): 871~883
- [15] Rangarajan A, Chui H, Mjolsness E. A new distance measure for non-rigid image matching. In: Proceedings of the 2nd International Workshop on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition. York, UK, 1999. 237~252
- [16] Veltkamp R C. Shape matching: Similarity and algorithms. In: Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Applications. Genova 2001. 188~197
- [17] Prieto M S, Allen A R. A similarity metric for edge images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2003, 25(10): 1265~1273
- [18] Dementhon D, Doermann D, Stichelberg M. Image distance using hidden markov models. In: Proceedings of the 15th International Conference on Pattern Recognition. Barcelona, 2000. 147~150
- [19] Basri R, Costa L, Geiger D, Jacobs D. Determining the similarity of deformable objects. Vision Research, 1998, 38(15): 2365~2385
- [20] Bajcsy R, Lovacic S. Multiresolution elastic matching. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1989, 46(1): 1~21

- [21] Hotelling H. Relations between two sets of variates. *Biometrika*, 1936, 28(3-4): 321~377
- [22] Yamaguchi O, Fukui K, Maeda K. Face recognition using temporal image sequence. In: *Proceedings of the 3rd IEEE International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition*. Nara, 1998. 318~323
- [23] Wolf L, Shashua A. Learning over sets using kernel principal angles. *Journal of Machine Learning Research*, 2004, 4(6): 913~931
- [24] Wolf L, Shashua A. Kernel principal angles for classification machines with applications to image sequence interpretation. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Wisconsin, 2003. 635~640
- [25] Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computations*. 2nd Ed. , The Johns Hopkins University Press, 1989
- [26] Werman M, Weinshall D. Similarity and affine invariant distances between 2d point sets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1995, 17(8): 810~814
- [27] Wang L, Wang X, Feng J. Intrapersonal subspace analysis with application to adaptive Bayesian face recognition. *Pattern Recognition*, 2005, 38(4): 617~621
- [28] Wang L, Wang X, Feng J. Subspace distance analysis with application to adaptive Bayesian face recognition. *Pattern Recognition*, 2006, 39(3): 456~464
- [29] Sun X, Wang L, Feng J. Further results on the subspace distance. *Pattern Recognition*, 2007, 40(1): 328~329
- [30] Maltoni D, Maio D, Jain A K, Prabhakar S. *Handbook of Fingerprint Recognition*. Springer-Verlag, 2003
- [31] Felzenswalb P F. Learning models for object recognition. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Hawaii, 2000. 1056~1062
- [32] Xing E P, Ng A Y, Jordan M I, Russell S J. Distance metric learning with application to clustering with side-information. In: *Becker S, Thrun S, Obermayer K, eds. Advances in Neural Information Processing Systems 15*. Cambridge: MIT Press, 2002. 505~512
- [33] Hertz T, Bar-Hillel A, Weinshall D. Learning distance functions for image retrieval. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Washington, 2004. 570~577
- [34] Mahamud S, Hebert M. Minimum risk distance measure for object recognition. In: *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Computer Vision*. Nice, 2003. 242~248
- [35] Chen H, Liu T, Fuh C. Learning effective image metrics from few pairwise examples. In: *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision*. Beijing, 2005. 1371~1378

高 阳 周如益

南京大学计算机软件新技术国家重点实验室, 南京 210093

2.1 引言

顺序型决策问题通常会采用马尔可夫决策过程(MDP, Markov decision process)建模。但在传统的 MDP 模型中, 决策行为的执行被限定在离散的时刻点上。当决策行为执行的时刻扩展到连续时间时, 顺序型决策问题也常用半马尔可夫决策过程(SMDP, semi-Markov decision process)建模^[1]。在 MDP 和 SMDP 模型中计算最优行为策略的优化问题被广泛应用在控制^[2]、调度^[3]、机器人设计^[4]以及数据挖掘^[5]等问题中。

当 MDP 或 SMDP 模型中的状态转移概率矩阵未知时, 优化问题则转变为机器学习问题。强化学习(reinforcement learning)技术通过值迭代(value iteration)或策略迭代(policy iteration)的方式逼近 MDP 或 SMDP 中的最优策略, 其通过试错(trial-and-error)的方法学习从环境状态到行为的映射, 以使系统行为从环境中获得的目标奖赏和最大^[6,7]。

但在实际强化学习应用中, 通常会有两种不同的方式定义目标奖赏和。它们分别是: 折扣累积奖赏和(式(1))和平均期望奖赏和(式(2))。

$$R = r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r_{t+i}, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (1)$$

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} r_{t+i} \quad (2)$$

考虑到对未来收益的不同评价, 传统强化学习往往采用折扣累积奖赏和(式(1))作为评价目标。通过适当变换, 强化学习技术很容易应用到寻找最短路径等问题中。然而, 对

^{*} 本文得到国家自然科学基金(60475026)资助。