第 1 章　随机事件与概率

1.1　内 容 提 要

1. 随机事件与样本空间

（1）必然现象与随机现象

在一定条件下，必然出现某种结果或必然不出现某种结果的现象称为必然现象.

在相同条件下，多次进行同一试验，所得结果却不尽相同，并且事先无法预测将会出现什么结果的现象称为随机现象.

（2）随机试验与随机事件

在相同条件下可以重复进行，每次试验的结果不止一个，并且所有可能出现的结果都是已知的，但在一次试验之前又不知道究竟会出现哪一个结果的试验称为随机试验.

在一次随机试验中，可能出现也可能不出现的结果称为随机事件，简称事件，通常用大写英文字母 $A,B,\cdots$表示. 其中，不能再分解的随机事件称为基本事件.

每次试验中，在一定条件下必然发生的事件称为必然事件，记为 Ω；不可能发生的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$.

（3）样本空间

在一个随机试验 E 中，一个基本事件称为 E 的一个样本点，记为 ω；由 E 的所有样本点构成的集合称为 E 的样本空间，记为 $\Omega=\{\omega_i \mid i=1,2,\cdots\}$.

2. 事件的关系与运算

（1）子事件与事件的相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 为事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$. 显然，对任一事件 A，均有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 A 是 B 的子事件，而 B 又是 A 的子事件，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

（2）和事件与积事件

事件 A 与事件 B 至少发生一个的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$；

事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB.

（3）差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 显然 $A-B=A-AB$.

(4) 互斥事件与对立事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互斥,或称事件 A 与事件 B 互不相容.

若事件 A 与事件 B 互斥,且其和事件为必然事件,即 $AB=\varnothing$,且 $A+B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件,记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

(5) 互斥事件完备组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:① $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,② $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个互斥事件完备组.

(6) 事件之间的运算规则

随机事件之间的运算满足下列规则:

① 交换律 $A\cup B=B\cup A,AB=BA$;

② 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

③ 分配率 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC),(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

④ 德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},(\overline{AB})=\overline{A}\cup\overline{B}$;

⑤ 包含律 $A\subset A\cup B,B\subset A\cup B,AB\subset A,AB\subset B$;

⑥ 吸收律 $A\cup\Omega=\Omega,A\cup\varnothing=A,A\Omega=A,A\varnothing=\varnothing$;

⑦ 重叠律 $A\cup A=A,AA=A$;

⑧ 对立律 $A\overline{A}=\varnothing,A\cup\overline{A}=\Omega$.

3. 随机事件的概率

(1) 概率的统计定义

在相同条件下重复进行 n 次试验,如果事件 A 发生的频率 $\frac{\mu}{n}$ 在某个确定数值 p 的附近摆动,并且随着试验次数 n 的增大,摆动幅度越来越小,则称数值 p 为事件 A 发生的概率,记为 $P(A)$,即 $P(A)=p$.

(2) 古典概型

若随机试验 E 满足以下两个条件:

① 试验的结果只有有限个,即样本空间只有有限个样本点,设为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

② 每个结果出现的可能性都相同,即样本点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 出现的可能性都一样.则称 E 为古典概型.

设随机试验 E 为古典概型,样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,如果事件 A 包含 μ 个样本点,即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_\mu}\},$$

则称 $\frac{\mu}{n}$ 为随机事件 A 的概率,记为 $P(A)=\frac{\mu}{n}$.

(3) 几何概率

在等可能性的前提下，利用图形的几何度量(长度、面积、体积等)表示随机事件概率的方法称为几何概率.

(4) 概率的公理化定义与性质

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，如果对于 E 的每一事件 A，都有确定的实数 $P(A)$ 与之对应，并且满足下列三条公理：

公理 1(非负性)　对于任一随机事件 $A\subset\Omega$，都有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2(规范性)　$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

公理 3(可加性)　对于 Ω 中两两互斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都有

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

4. 概率的基本性质

(1) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个两两互斥的事件，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(2) 设 A 为任一事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

(3) 设 A, B 为两个事件，且 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；

(4) 设 A, B 为任意两个事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

1.2　学习目的与要求

(1) 理解样本空间、随机事件、互斥事件和对立事件等基本概念；

(2) 领会差事件、和事件与积事件的含义；

(3) 掌握事件之间的运算规则；

(4) 理解概率的统计定义、古典概型、几何概率和概率的公理化定义；

(5) 掌握利用概率的各种定义和性质计算随机事件概率的方法.

1.3　典型例题分析

例 1　写出下列各随机试验的样本空间：

(1) 同时掷两枚骰子，记录两枚骰子可能出现的点数；

(2) 同时掷两枚骰子，记录两枚骰子的点数之和；

(3) 一袋子中装有标号分别为 1,2,3,4 的 4 只球，从袋中不放回地连取两只，记录两次取球的结果；

(4) 将(3)的取球方式改为一次从袋中任取两只,记录取球的结果;

(5) 将(3)的取球方式改为从袋中任取一只,放回袋中再任取一球,记录两次取球的结果;

(6) 将(3)的取球方式改为不放回地从袋中一个接一个地取球,直到取得 1 号球为止,记录取球的结果;

(7) 对某厂生产的产品进行检验,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”. 如果连续查出 2 个次品,或检查完 4 个产品就停止检查,记录检查的结果;

(8) 将一尺之棰折成 3 段,观察各段的长度.

解　(1) 若用 x_i,y_j 分别表示两枚骰子出现的点数,则结果可用二元数组(x_i,y_j)表示,于是

$$\Omega_1=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4,5,6\},$$

样本点总数为 $n_1=6\times6=36$ 个.

(2) 仍用 x_i,y_j 分别表示两枚骰子出现的点数,用 z 表示所得点数之和,于是

$$\Omega_2=\{z\mid z=x_i+y_j;\ x_i,y_j=1,2,3,4,5,6\},$$

即 $\Omega_2=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. 此时,样本点总数为 $n_2=11$ 个.

(3) 若用 x_i,y_j 分别表示两次取出球的标号,则结果也可用二元数组(x_i,y_j)表示. 注意到在不放回的取球试验中,两只球的标号一定不同,所以

$$\Omega_3=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4;\ x_i\neq y_j\},$$

即 $\Omega_3=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$. 此时,样本点总数为 $n_3=\mathrm{P}_4^2=4\times3=12$ 个.

(4) 若用 x_i,y_j 分别表示所取两球的标号,由于一次取出两球,没有先后之分,所以不用考虑次序,于是

$$\Omega_4=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4;\ x_i<y_j\},$$

即 $\Omega_4=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. 此时,样本点总数 $n_4=\mathrm{C}_4^2=6$ 个.

(5) 仍用 x_i,y_j 分别表示两次取出球的标号,则结果也可用二元数组(x_i,y_j)表示. 注意到在有放回的取球试验中,两只球的标号可以相同,所以

$$\Omega_5=\{(x_i,y_j)\mid x_i,y_j=1,2,3,4\},$$

此时,样本点总数 $n_5=4\times4=16$ 个.

(6) 由于这个试验具有以下特点:一是不放回地取球,各次所取球的标号互不相同;二是只要取得 1 号球试验就停止,因而所取最后一球必然是 1 号球,因此

$$\begin{aligned}\Omega_6=\{&(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),(2,4,1),(3,2,1),(3,4,1),(4,2,1),(4,3,1),\\&(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1),(4,2,3,1),(4,3,2,1)\},\end{aligned}$$

此时,样本点总数为 $n_6=1+\mathrm{P}_3^1+\mathrm{P}_3^2+\mathrm{P}_3^3=16$ 个.

(7) 若用 0 表示次品,用 1 表示正品,则每个样本点均可用最少两位、最多四位数字来

表示，且少于四位数时，其最后两位一定是 00；达到四位数时，其前三位不会出现 00，即

$$\Omega_7 = \{00,100,0100,1100,1010,0110,1110,0101,1101,1011,0111,1111\},$$

此时，样本点总数为 $n_7=12$.

(8) 分别用 x,y,z 表示所得各段棰的长度，于是

$$\Omega_8 = \{(x,y,z) \mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\},$$

此时，样本点总数有(不可数)无穷多个.

例 2 射击运动员使用的靶纸是同心圆环形区域，其中，10 环区是半径为 5cm 的圆域，9 环、8 环、7 环区依次是半径为 10cm，15cm 和 20cm 的圆环. 某射手向靶纸打了一枪，试表示下列各随机事件：

(1) 脱靶；

(2) 得 8 环；

(3) 至少得 8 环；

(4) 最多得 8 环.

解法 1 分别用 A_1,A_2,A_3,A_4 表示命中 10 环、9 环、8 环和 7 环区，于是

(1) $(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4})=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$；

(2) A_3；

(3) $A_1+A_2+A_3$；

(4) A_3+A_4.

解法 2 若分别用 A_1,A_2,A_3,A_4 表示半径依次为 5cm、10cm、15cm 和 20cm 的圆形区域，则

(1) $\overline{A}_4$；

(2) $A_3\overline{A}_2$；

(3) A_3 或 $A_1\cup A_2\cup A_3$；

(4) $A_4\overline{A}_2$.

例 3(2001 年考研题，数学四) 对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $\bar{B}\subset\overline{A}$　　C. $A\bar{B}=\varnothing$　　D. $\overline{A}B=\varnothing$

解 利用作图法，把 4 个选项与 $A\cup B=B$ 比较可知，应选择 D.

例 4 化简下列各事件表达式：

(1) $(A\cup C)(B\cup C)$；

(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-(\overline{AB})$；

(3) $(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 (1) 由于$(A\cup C)(B\cup C)=AB\cup AC\cup BC\cup C$，且 $AC\subset C,BC\subset C$，所以

$$AC\cup BC\cup C=C,$$

从而

$$(A\cup C)(B\cup C)=AB\cup C.$$

(2) 由于 $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}=(A\cup\overline{A})B\cup(A\cup\overline{A})\overline{B}=B\cup\overline{B}=\Omega$,所以

$$AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-(\overline{AB})=\Omega-(\overline{AB})=AB.$$

(3) 由于$(A\cup B)(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB\cup\overline{A}B\cup B=B$,同样

$$(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup\overline{B}\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{B}\text{,所以}$$

$$(A\cup B)(\overline{A}\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing.$$

例 5(多项选择题) 种植 3 棵树木,用 $A_i(i=1,2,3)$表示第 i 棵树木成活,则表示至少有一棵树木成活的事件为( ).

A. $A_1\cup A_2\cup A_3$　　　　B. $\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$

C. $A_1\cup(A_2-A_1)\cup[(A_3-A_2)-A_1]$　　　　D. $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

解 首先,由于 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示 A_1,A_2,A_3 至少有一个出现,所以选 A.

其次,因为

$$\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\Omega(\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3})=\overline{\overline{A}}_1\cup\overline{\overline{A}}_2\cup\overline{\overline{A}}_3=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

所以选 B.

又因为

$$\begin{aligned}
&A_1\cup(A_2-A_1)\cup[(A_3-A_2)-A_1]\\
=&A_1\cup A_2\overline{A}_1\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
=&(A_1\cup A_2\overline{A}_1)\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
=&(A_1\cup\overline{A}_1A_1\cup A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
=&[(A_1+\overline{A}_1)(A_1\cup A_2)]\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
=&A_1\cup A_2\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1\\
=&[A_1\cup(A_3\overline{A}_2)\overline{A}_1]\cup A_2\\
=&[A_1\cup\overline{A}_1A_1\cup A_1(A_3\overline{A}_2)\cup\overline{A}_1(A_3\overline{A}_2)]\cup A_2\\
=&[(A_1+\overline{A}_1)(A_1\cup A_3\overline{A}_2)]\cup A_2\\
=&A_1\cup A_3\overline{A}_2\cup A_2\\
=&A_1\cup[A_2\cup\overline{A}_2A_2\cup A_2A_3\cup\overline{A}_2A_3]\\
=&A_1\cup[(A_2\cup\overline{A}_2)(A_2\cup A_3)]\\
=&A_1\cup A_2\cup A_3,
\end{aligned}$$

所以,C 也入选(事实上,此题采用作图法将更为简捷);

至于 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,显然表示“恰好有一棵成活”,所以 D 当然不能入选;

因此,应当选择 A,B 和 C.

小结 在上述几个题目的推演过程中,反复使用了事件运算所满足的以下运算律:

交换律 $AB=BA,A\cup B=B\cup A$;

结合律 $(AB)C=A(BC),(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

包含律 $\varnothing\subset A,AB\subset A$;

吸收律 $A=A\cup\varnothing=A\cup AB,A\Omega=A,AA=A,A\cup A=A$;

对立律 $A+\overline{A}=\Omega$.

可见,熟练掌握这些运算律,对于准确、简练地表示一个事件是非常重要的.

另一方面,作图法直观、简单,利用作图法,常可迅速找到正确答案.

例 6 设 A,B,C 是任意三个随机事件,则下列命题正确的是( ).

A. 若 $A\cup C=B\cup C$,则 $A=B$　　B. 若 $A-C=B-C$,则 $A=B$

C. 若 $AC=BC$,则 $A=B$　　D. 若 $AB=\varnothing$,且 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,则 $\overline{A}=B$

分析 要想说明一个命题成立,就需要对这个命题进行严格论证.但是,若要说明一个命题不成立,则只要能够举出一个反例即可.所以,对于估计不成立的命题,经常采用举反例的方法加以说明.

解 前三个命题都不成立,现举例如下:

在 5 次定点投篮中,事件 A,B,C_1,C_2 都表示投中的次数.其中,

$$A=\{0,1,2\},\quad B=\{4,5\},\quad C_1=\{0,1,2,3,4,5\},\quad C_2=\{3\},$$

由于 $A\cup C_1=B\cup C_1=C_1=\Omega,A-C_1=B-C_1=\varnothing,AC_2=BC_2=\varnothing$,但 $A\neq B$,所以 A,B,C 都不成立.

又因为 $AB=\varnothing$,且 $\overline{A}\overline{B}=\varnothing$,所以$(\overline{\overline{A}\overline{B}})=(\overline{\overline{A}})\cup(\overline{\overline{B}})=A\cup B=\overline{\varnothing}=\Omega$,即有 $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,因此 $\overline{A}=B$.

例 7(1989 年考研题,数学四) 若以 A 表示"甲产品畅销,乙产品滞销",则其对立事件 $\overline{A}$ 为( ).

A. "甲产品滞销,乙产品畅销"　　B. "甲、乙两种产品都畅销"

C. "甲产品滞销"　　D. "甲产品滞销,或乙产品畅销"

解 分别用 B,C 表示甲、乙两种产品畅销,则 $A=B\overline{C}$,于是利用德·摩根律有

$$\overline{A}=(\overline{B\overline{C}})=\overline{B}\cup\overline{\overline{C}}=\overline{B}\cup C,$$

即 A 的对立事件是"甲产品滞销,或乙产品畅销",所以 D 正确.当然,其余的三个都不正确,因此选择 D.

例 8 设 A,B,C 是任意三个事件,则下列等式成立的是( ).

A. $(A\cup B)-B=A-B$　　B. $(A-B)\cup B=A$

C. $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$　　D. $A\cup B=A\overline{B}\cup\overline{A}B$

解 由于$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B$,所以 A 正确;同时,由于

$$(A-B)\cup B=(A\overline{B})\cup B=AB\cup A\overline{B}\cup B\cup B\overline{B}$$

$$= (A \cup B)(B \cup \overline{B}) = A \cup B,$$

$$(A \cup B) - C = (A \cup B)\overline{C} = A\overline{C} \cup B\overline{C} = (A - C) \cup (B - C),$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup AB = A\overline{B} \cup \overline{A}B \cup AB,$$

所以,B,C,D 都不正确,因此选择 A.

例 9 将 A,C,I,I,S,S,S,T,T,T 等 10 个字母分别写在 10 张卡片上,然后把 10 张卡片随意排成一列,试求恰好排成英文单词"STATISTICS"(统计学)的概率.

解 10 张卡片排成一列的不同排列总数(样本点总数)为 10! =3628800 种,恰好排成"STATISTICS"的不同排法有 3×3×1×2×2×2×1×1×1×1=72 种.事实上,三张写有"S"的卡片交换位置有 3! 种不同的排法,三张写有"T"的卡片交换位置有 3! 种不同的排法,两张写有"I"的卡片交换位置有 2! 种不同的排法,而写有"A"和"C"的卡片,分别只有一个合适的位置,所以单词"STATISTICS"的不同排法共有 3!×3!×2!=72 种,因此

$$p = \frac{3! \times 3! \times 2!}{10!} = \frac{72}{3628800} = \frac{1}{50400} \approx 0.00001984.$$

例 10 抛掷 5 枚骰子,试求:

(1) 恰好有三枚点数相同的概率;

(2) 至少有两枚 6 点的概率.

解法 1 这个随机试验的样本空间所含的样本点总数为 6^5.若用 A 表示"恰好有三枚点数相同",用 B 表示"恰好有两枚 6 点".

(1) 事件 A 所含的样本点数可以这样计算:在 5 枚骰子中任取三枚,有 C_5^3 种取法;在 1,2,3,4,5,6 点中任取一个点数,使这三枚骰子都出现这个点数,又有 C_6^1 种取法;其余的两枚骰子可以取剩余的 5 个点数的任一个,有 5^2 种取法.上述三个步骤全部完成,正是事件 A——"恰好有三枚点数相同"发生,即事件 A 所含的样本点数为 $C_5^3C_6^1 5^2$.因此

$$P(A) = \frac{C_5^3 C_6^1 5^2}{6^5} = \frac{125}{648} \approx 0.193.$$

(2) 事件 B——"至少出现两枚 6 点"可以分解为:"或者出现两枚 6 点","或者出现三枚 6 点","或者出现四枚 6 点","或者五枚全是 6 点"等基本事件.其中,各个基本事件的不同组合方式分别有 $C_5^2 5^3$,$C_5^3 5^2$,$C_5^4 5$ 和 1 种.而且,每个基本事件发生都将导致事件 B 发生,所以,事件 B 所包含的样本点总数为 $C_5^2 5^3 + C_5^3 5^2 + C_5^4 5 + 1 = 1526$,因此

$$P(B) = \frac{C_5^3 5^3 + C_5^3 5^2 + C_5^4 5 + 1}{6^5} = \frac{1526}{7776} \approx 0.196.$$

解法 2 (2) 事件 B 的对立事件 $\overline{B}$ 意为"不足两个 6 点",它可以分解为:"或者没有出现 6 点","或者只有一个 6 点"两个基本事件.其中,"没有出现 6 点"的不同组合方式有 5^5 种,"只有一个 6 点"的不同组合方式有 $C_5^1 5^4$ 种,所以,事件 $\overline{B}$ 所包含的样本点总数为

$5^5+C_5^1 5^4$，因此

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{5^5+C_5^1 5^4}{6^5}=1-\frac{6250}{7776}=\frac{1526}{7776}\approx 0.196.$$

小结 由此例的两种不同解法可以看出，若直接计算某个随机事件需要考虑的情况较多、比较复杂；而其对立事件相对简单，因此通过其对立事件来计算它的概率常常比较容易.

例 11 一个袋子中有 n 个球，其中有 $m(0\leqslant m\leqslant n)$ 个红球，其余为白球. 现在从袋中一个一个抽球，试求：

(1) 在作有放回抽球时，第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 次抽到红球的概率；

(2) 在作不放回抽球时，第 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 次抽到红球的概率.

分析 对于有放回的抽球，情况非常简单，因为每次抽球时袋中的条件都一样；而对于不放回的抽球，第 k 次抽球时袋中的条件显然与前面的 $k-1$ 次抽球的结果有关，需要仔细分析才能解决.

解法 1 用 $A_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 表示第 k 次抽到红球.

(1) 对于有放回的抽球，显然

$$P(A_k)=\frac{m}{n}.$$

(2) 对于不放回的抽球问题，可以按多种方法求解.

设想把 n 个球一一编号，不仅区分颜色，而且区分编号. 把 n 个球一个一个全部取出，相当于把 n 个自然数排成一列，共有 $n!$ 种不同的排法，即样本点总数为 $n!$. 先从 m 个红球中任取一个放在第 k 位（即第 k 次把它取出），有 m 种取法；再把剩余的 $n-1$ 个球按任意次序一一取出，共有 $(n-1)!$ 种不同的取法. 这样，第 k 次抽到红球 A_k 所包含的样本点数为 $m(n-1)!$，因此

$$P(A_k)=\frac{m(n-1)!}{n!}=\frac{m}{n}.$$

解法 2 (2) 仍把 n 个球一一编号. 从 n 个不同的球中接连取出 k 个，相当于从 n 个不同的元素中选出 k 个元素的选排列，总共有 $P_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 种不同的取法；仍然先从 m 个红球中任取一个放在第 k 位（即第 k 次把它取出），再从剩余的 $n-1$ 个球中任意选出 $k-1$ 个排成一列. 于是，导致事件 A_k 发生的不同取法有

$$mP_{n-1}^{k-1}=m(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

因此

$$P(A_k)=\frac{m(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}=\frac{m}{n}.$$

解法 3 (2) 不区分同颜色的球. 把 n 次抽球设想为将 n 个球任意放入编号依次为

$1,2,\cdots,n$ 的盒子里. 从 n 个盒子选出 m 个放红球，其余盒子放白球（每盒一球），总共有 C_n^m 种不同的放法，即样本点总数为 C_n^m；先在第 k 个盒子放入一个红球，再从其余的 $n-1$ 个盒子中选出 $m-1$ 个放红球，其他盒子放白球，共有 C_{n-1}^{m-1} 选法，于是，事件 A_k 所包含的样本点数为 C_{n-1}^{m-1}. 因此

$$P(A_k)=\frac{C_{n-1}^{m-1}}{C_n^m}=\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\cdot\frac{m!(n-m)!}{n!}=\frac{m}{n}.$$

小结 此例说明，无论是有放回的抽样还是不放回的抽样，抽到某种结果的概率只与此结果在总数中所占的比例有关，而与抽样的次序无关.

在此例的三种解法中，不同的解法来源于对基本事件的不同理解；而对基本事件的每一种理解，都会带来一种相应的解法. 但值得注意的是，在按照某种方法解题过程中，计算样本点总数与事件 A 所包含的样本点数时，对基本事件的理解必须保持一致.

例 12 从 5 双不同的鞋子中任意抽取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成 1 双的概率.

分析 这是一个不放回的抽样、且不考虑次序的抽样问题. 可以按照下列方法求解. 用 $A_k(k=0,1,2)$ 表示“所取的 4 只鞋子中恰好有 $2k$ 只配成 k 双”，用 A 表示“所取的 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成 1 双”.

解法 1 由于从 10 只鞋子中抽取 4 只，共有 C_{10}^4 种不同的取法，即样本点总数为 $n=C_{10}^4=210$.

“4 只中恰好有 2 只配成 1 双”所包含的样本点数可以这样计算：先从 5 双中任取 1 双，有 C_5^1 种取法，再从其余的 4 双中任取 2 双，有 C_4^2 种取法，且从这 2 双中各取 1 只，分别有 C_2^1 种取法. 于是，A_1 包含的样本点数为 $m_1=C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1=120$.

从 5 双中任取 2 双，有 C_5^2 种取法，所以，“所取 4 只恰好配成 2 双”，即 A_2 所包含的样本点数为 $m_2=C_5^2=10$.

显然，$A=A_1+A_2$，因此

$$P(A)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{120}{210}+\frac{10}{210}=\frac{13}{21}.$$

解法 2 考虑到 $\overline{A}=A_0$，并且 A_0 即“所取的 4 只中任意 2 只都不能配成 1 双”所包含的样本点数可以这样计算：先从 5 双中任取 4 双，再从这 4 双中各取 1 只，共有 $m_0=C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$ 种不同的取法，因此

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_0)=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}.$$

解法 3 无次序问题也可按有次序的方式处理. 设想鞋子是一只一只取出来的，于是，从 10 只鞋子中任取 4 只，共有 P_{10}^4 种不同的取法，即样本点总数 $n=P_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$.