第 3 章 一阶逻辑

3.1 内容提要

1. 一阶逻辑基本概念

个体词 个体常项、个体变项、个体域、有限个体域、全总个体域.

谓词 谓词常项、谓词变项、1元谓词(表示事物性质)、$n(n\geqslant 2)$元谓词(表示事物之间的关系)、0元谓词、特性谓词.

量词 全称量词、存在量词.

命题符号化 设 D 为个体域.

(1)“D 中所有 x 都有性质 F”,符号化为

$$\forall xF(x)$$

(2)“D 中存在 x 具有性质 F”,符号化为

$$\exists xF(x)$$

(3)“对 D 中所有 x 而言,如果 x 有性质 F,则 x 就有性质 G”,符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(4)“D 中存在 x 具有性质 F,又有性质 G”,符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

(5)“对于 D 中的所有 x 和 y 而言,若 x 有性质 F,y 有性质 G,则 x 与 y 有关系 H”,符号化为

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$$

(6)“对于 D 中所有 x 而言,若 x 具有性质 F,就存在 y 有性质 G,并且 x 与 y 有关系 H”,符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$

(7)“存在 D 中的 x 有性质 F,并且对 D 中所有 y 而言,如果 y 有性质 G,则 x 与 y 就有关系 H”,符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$$

(8)“D 中存在着 x 与 y，x 有性质 F，y 有性质 G，并且 x 与 y 有关系 H”，符号化为

$$\exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge H(x,y))$$

一阶逻辑公式、解释与分类：

一阶语言 $\mathscr{L}$ 字母表、项、原子公式、合式公式(公式)、指导变元、量词的辖域、自由出现的个体变项、约束出现的个体变项、闭式及性质、公式的解释、永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式、代换实例.

2. 一阶逻辑等值演算

一阶逻辑等值式与基本等值式：

等值式 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真式.

基本等值式：

第一组 命题逻辑公式的代换实例.

第二组 一阶逻辑中的重要等值式：

(1) 在有限个体域 $D=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中消去量词等值式：

① $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$；

② $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$.

(2) 量词否定等值式：

① $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$；

② $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$.

(3) 量词辖域收缩与扩张等值式，$A(x)$ 中 x 是自由出现的，B 中不含 x 的自由出现，则有下面 8 个等值式：

① $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$；

② $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$；

③ $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$；

④ $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$；

⑤ $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$；

⑥ $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$；

⑦ $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$；

⑧ $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$.

(4) 量词分配等值式：

① $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$；

② $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

一阶逻辑等值演算的 3 个规则：

(1) 置换规则.

(2) 换名规则.

(3) 代替规则.

一阶逻辑前束范式：

(1) 前束范式.

(2) 与公式 A 等值的前束范式(也称 A 的前束范式).

(3) 求给定公式 A 的前束范式：利用重要的等值式、置换规则、代替规则、换名规则等，对给定公式 A 进行等值演算，直到求出与 A 等值的前束范式.

3.2 习　　题

3.1　设个体域为实数集 $\mathbf{R}$，$F(x)$：$x>5$，求下列 0 元谓词的真值.

(1) $F(5)$.　　(2) $F(\sqrt{2})$.　　(3) $F(-2)$.　　(4) $F(\sqrt{6})$.

(5) $F(\sqrt{27})$.　　(6) $F(7.9)$.

3.2　设个体域 $D=\{x|x$ 为英语单词$\}$，令 $F(x)$：x 含字母 c. 求下列各 0 元谓词的真值.

(1) F(about)　　(2) F(call)　　(3) F(error)　　(4) F(erect)

3.3　将下列命题用 0 元谓词符号化.

(1) 王小山来自山东省或河北省.

(2) 除非李联不怕吃苦，否则她不会取得这样好的成绩.

(3) $\sqrt{2}$不是有理数.

(4) 3 大于 2 仅当 3 大于 4.

3.4　设个体域为 $D=\{x|x$ 是人$\}$，$L(x,y)$：x 喜欢 y. 将下列命题符号化.

(1) 所有的人都喜欢赵小宝.

(2) 所有的人都喜欢某些人.

(3) 没有人喜欢所有的人.

(4) 每个人都喜欢自己.

3.5　设个体域为全总个体域，又令 $M(x)$：x 是人. 将题 3.4 中 4 个命题符号化.

3.6　在一阶逻辑中将下面命题符号化，并分别讨论个体域限制为(a)、(b)条件时命题的真值.

(1) 凡有理数都能被 2 整除.

(2) 有的有理数能被 2 整除.

其中，(a) 个体域为有理数集合；(b) 个体域为实数集合.

3.7　设个体域为整数集 $\mathbf{Z}$，$L(x,y)$：$x+y=x-y$，求下列各式的真值.

(1) $L(1,1)$.　　(2) $L(2,0)$.

(3) $\forall yL(1,y)$.　　(4) $\exists xL(x,2)$.

(5) $\exists x\exists yL(x,y)$.　　(6) $\forall x\exists yL(x,y)$.

(7) $\exists y\forall xL(x,y)$.　　(8) $\forall x\forall yL(x,y)$.

3.8　在一阶逻辑中将下面命题符号化,并分别讨论个体域限制为(a)、(b)条件时命题的真值.

(1) 对于任意的 x,均有 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2) 存在 x,使得 $x+5=9$.

其中,(a) 个体域为自然数集合;(b) 个体域为实数集合.

3.9　设个体域为整数集 $\mathbf{Z}$,确定下列各公式的真值.

(1) $\forall x(x^2>0)$.　　(2) $\exists x(x^2=0)$.

(3) $\forall x(x^2\geqslant x)$.　　(4) $\forall x\exists y(x^2<y)$.

(5) $\exists x\forall y(x<y^2)$.　　(6) $\forall x\exists y(x+y=0)$.

(7) $\exists x\exists y(x^2+y^2=6)$.　　(8) $\forall x\forall y\exists z(z=(x+y)/2)$.

3.10　在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 没有不吃饭的人.

(2) 在北京卖菜的人不全是东北人.

(3) 自然数全是整数.

(4) 有的人天天锻炼身体.

3.11　在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 火车都比汽车快.

(2) 有的火车比有的汽车快.

(3) 不存在比所有火车都快的汽车.

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的.

3.12　将下列命题符号化,个体域为实数集合 $\mathbf{R}$,并指出各命题的真值.

(1) 对所有的 x,都存在 y,使得 $x\cdot y=0$.

(2) 存在着 x,对所有的 y 都有 $x\cdot y=0$.

(3) 对所有 x,都存在着 y,使得 $y=x+1$.

(4) 对所有的 x 和 y,都有 $x\cdot y=y\cdot x$.

3.13　将下列各公式翻译成自然语言,个体域为整数集 $\mathbf{Z}$,并判断各命题的真假.

(1) $\forall x\forall y\exists z(x-y=z)$.　　(2) $\forall x\exists y(x\cdot y=1)$.

(3) $\exists x\forall y\forall z(x+y=z)$.

3.14　指出下列公式中的指导变元,量词的辖域,各个体变项的自由出现和约束出现.

(1) $\forall x(F(x)\to G(x,y))$.

(2) $\forall xF(x,y)\to\exists yG(x,y)$.

(3) $\forall x\exists y(F(x,y)\land G(y,z))\lor\exists xH(x,y,z)$.

3.15 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D_I 为实数集 $\mathbf{R}$.

(b) D_I 中特定元素 $\bar{a}=0$.

(c) 特定函数 $\bar{f}(x,y)=x-y,x,y\in D_I$.

(d) 特定谓词 $\bar{F}(x,y)$：$x=y$，$\bar{G}(x,y)$：$x<y,x,y\in D_I$.

说明下列公式在 I 下的含义,并指出各公式的真值.

(1) $\forall x\forall y(G(x,y)\to\neg F(x,y))$.

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),a)\to G(x,y))$.

(3) $\forall x\forall y(G(x,y)\to\neg F(f(x,y),a))$.

(4) $\forall x\forall y(G(f(x,y),a)\to F(x,y))$.

3.16 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 为自然数集).

(b) D 中特定元素 $\bar{a}=2$.

(c) D 上函数 $\bar{f}(x,y)=x+y,\bar{g}(x,y)=x\cdot y$.

(d) D 上谓词 $\bar{F}(x,y)$：$x=y$.

说明下列各式在 I 下的含义,并讨论其真值.

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$.

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\to F(f(y,a),x))$.

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$.

(4) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$.

3.17 判断下列各式的类型.

(1) $F(x,y)\to(G(x,y)\to F(x,y))$.

(2) $\forall x(F(x)\to F(x))\to\exists y(G(y)\land\neg G(y))$.

(3) $\forall x\exists yF(x,y)\to\exists y\forall xF(x,y)$.

(4) $\exists x\forall yF(x,y)\to\forall y\exists xF(x,y)$.

(5) $\forall x\forall y(F(x,y)\to F(y,x))$.

(6) $\neg(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\land\exists yG(y)$.

3.18 (1) 给出一个非闭式的永真式.

(2) 给出一个非闭式的永假式.

(3) 给出一个非闭式的可满足式,但不是永真式.

3.19 证明下面公式既不是永真式也不是矛盾式.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow \exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$.

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$.

3.20 将下列各式的否定号内移,使得否定号只能出现在谓词前.

(1) $\neg\exists x\exists yL(x,y)$.

(2) $\neg\forall x\forall yL(x,y)$.

(3) $\neg\exists x(F(x)\wedge\forall y\neg L(x,y))$.

(4) $\neg\forall x(\exists yL(x,y)\vee\forall yH(x,y))$.

3.21 将下列公式化成与之等值的公式,使其没有既是约束出现的,又是自由出现的个体变项.

(1) $\forall xF(x,y)\wedge\exists yG(x,y,z)$.

(2) $\exists x(F(x,y)\wedge\forall yG(x,y))$.

3.22 证明:

(1) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\not\Leftrightarrow\forall x(A(x)\wedge B(x))$.

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\not\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$.

其中,$A(x)$和 $B(x)$为含 x 自由出现的公式.

3.23 设个体域 $D=\{a,b\}$,消去下列各公式的量词.

(1) $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(y))$.

(2) $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(x,y))$.

(3) $\exists xF(x)\wedge\forall xG(x)$.

(4) $\exists x(F(x,y)\vee\forall yG(y))$.

3.24 设个体域 $D=\{a,b,c\}$,消去下列各公式中的量词.

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\forall yG(y)$.

(2) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(y))$.

3.25 设个体域 $D=\{1,2\}$,请给出两种不同的解释 I_1 和 I_2,使得下面公式在 I_1 下都是真命题,而在 I_2 下都是假命题.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$.

(2) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$.

3.26 给定公式 $A=\exists xF(x)\rightarrow\forall xF(x)$.

(1) 在解释 I_1 中,个体域 $D_1=\{a\}$,证明公式 A 在 I_1 下的真值为 1.

(2) 在解释 I_2 中,个体域 $D_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$n\geqslant 2$,$A$ 在 I_2 下的真值还一定是1吗?为什么?

3.27 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\{3,4\}$.

(b) $\bar{f}(x)$为$\bar{f}(3)=4,\bar{f}(4)=3$.

(c) $\overline{F}(x,y)$为 $\overline{F}(3,3)=\overline{F}(4,4)=0$,$\overline{F}(3,4)=\overline{F}(4,3)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值.

(1) $\forall x \exists y F(x,y)$.

(2) $\exists x \forall y F(x,y)$.

(3) $\forall x \forall y(F(x,y) \rightarrow F(f(x),f(y)))$.

3.28 在一阶逻辑中将下面命题符号化,要求用两种不同的等值形式.

(1) 没有小于负数的正数.

(2) 相等的两个角未必都是对顶角.

3.29 求下列各式的前束范式(只用换名规则).

(1) $\exists x F(x) \rightarrow \forall y G(x,y)$.

(2) $\forall x(F(x,y) \rightarrow \forall y G(x,y,z))$.

3.30 只用代替规则求题 3.29 各题的前束范式.

3.31 求下列各式的前束范式.

(1) $F(x) \wedge G(x) \rightarrow L(x,y)$.

(2) $\forall x_1(F(x_1) \rightarrow G(x_1,x_2)) \rightarrow (\exists x_2 H(x_2) \rightarrow \exists x_3 L(x_2,x_3))$.

(3) $\exists x_1 F(x_1,x_2) \rightarrow (F(x_1) \rightarrow \neg \exists x_2 G(x_1,x_2))$.

3.32 将下列命题符号化,要求符号化的公式全为前束范式.

(1) 有的汽车比有的火车跑得快.

(2) 有的火车比所有的汽车跑得快.

(3) 说所有的火车比所有汽车都跑得快是不对的.

(4) 说有的飞机比有的汽车慢是不对的.

3.33 求下列各公式的前束范式.

(1) $\exists x F(x) \vee \exists x G(x) \vee L(x,y)$.

(2) $\neg(\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$.

3.3 习题解答与分析

3.1 (1)～(4)的真值为 0,(5)与(6)的真值为 1.

分析 这里的 1 元谓词 $F(F(x)$: $x>5, x\in \mathbf{R})$为谓词常项,所以(1)～(6)全为命题.由于 $5,\sqrt{2},-2,\sqrt{6}$全都小于或等于 5,所以(1)～(4)为假命题.而 $\sqrt{27}$和 7.9 均大于 5,所以(5)与(6)均为真命题.

3.2 (1)与(3)的真值为 0,(2)与(4)的真值为 1.

分析 这里的 1 元谓词 $F(F(x)$: x 含字母 $c)$为谓词常项,所以(1)～(4)全为命题,其中,(1)与(3)中单词不含字母 c,所以为假命题,而(2)与(4)中单词含字母 c,所以为真

命题.

3.3 (1) 设 $F(x)$：x 来自山东省，$G(x)$：x 来自河北省，a：王小山. 命题符号化为

$$(F(a) \wedge \neg G(a)) \vee (\neg F(a) \wedge G(a)) \text{或} F(a) \vee G(a)$$

(2) 设 $F(x)$：x 怕吃苦，$G(x)$：x 取得好成绩，a：李联. 命题符号化为

$$G(a) \rightarrow \neg F(a) \text{或} F(a) \rightarrow \neg G(a)$$

(3) 设 $F(x)$：x 是有理数，命题符号化为

$$\neg F(\sqrt{2})$$

(4) 设 $F(x,y)$：$x>y$，命题符号化为

$$F(3,2) \rightarrow F(3,4)$$

分析 (1)中命题的真值要根据王小山来自哪个省而定. 若他既不是来自山东省，也不是来自河北省，则命题为假. 若他真来自山东省或河北省，则命题为真，但不可能既来自山东省又来自河北省，所以既可以符号化为排斥或，又可以符号化为相容或.

对于(2)中命题，注意"李联取得好成绩"的必要条件是"李联不怕吃苦".

另外，还应注意，(1)与(2)的真值要根据具体情况而定. 而(3)和(4)的真值是确定的，(3)是真命题，而(4)是假命题.

3.4 设二元谓词 $L(x,y)$：x 喜欢 y.

(1) 设 a：赵小宝，命题符号化为

$$\forall x L(x,a)$$

(2) $\forall x \exists y L(x,y)$.

(3) $\neg \exists x \forall y L(x,y)$.

(4) $\forall x L(x,x)$.

3.5 设 $M(x)$：x 为人，$L(x,y)$：x 喜欢 y.

(1) 设 a：赵小宝. $\forall x(M(x) \rightarrow L(x,a))$.

(2) $\forall x(M(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$.

(3) $\neg \exists x(M(x) \wedge \forall y(M(y) \rightarrow L(x,y)))$.

(4) $\forall x(M(x) \rightarrow L(x,x))$.

分析 题 3.4 与题 3.5 说明：同一个命题在不同的个体域下，可有不同形式的符号化形式，当然，也可能有相同的符号化形式. 设有命题"自然数都是整数"，

① 个体域 $D_1=\mathbf{R}$($\mathbf{R}$ 为实数集)，命题符号化为

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

其中，$F(x)$：x 为自然数，$G(x)$：x 为整数.

② 个体域 $D_2=\mathbf{Q}$($\mathbf{Q}$ 为有理数集)，命题符号化为

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$$

$F(x)$，$G(x)$的含义同①.

③ 个体域 $D_3=\mathbf{N}$($\mathbf{N}$为自然数集),命题符号化为

$$\forall x G(x)$$

$G(x)$的含义同①.

D_1、D_2、D_3 不同,命题"自然数都是整数"在 D_1 与 D_2 下,符号化形式相同,但在 D_3 下的符号化形式与 D_1 与 D_2 下符号化形式不同.

3.6 (a) 个体域为有理数集合:

(1) $\forall x F(x)$,其中,$F(x)$:x 能被 2 整除. 真值为 0. 例如,3 为有理数,但 2 不能整除 3.

(2) $\exists x F(x)$,$F(x)$同(1). 真值为 1. 所有的偶数都是有理数,它们都能被 2 整除.

(b) 个体域为实数集:

(1) $\forall x(G(x)\rightarrow F(x))$,其中,$G(x)$:$x$ 为有理数,$F(x)$:x 能被 2 整除,其真值为 0.

(2) $\exists x(G(x)\wedge F(x))$,其中,$G(x)$、$F(x)$同(1),其真值为 1.

3.7 (1)、(3)、(4)、(8)的真值为 0,而(2)、(5)、(6)、(7)的真值为 1.

分析 (1) 因为 $1+1\neq 1-1$,所以 $L(1,1)$为假.

(2) 因为 $2+0=2-0$,所以 $L(2,0)$为真.

(3) 对于除 0 以外的任何 y,均有 $1+y\neq 1-y$,所以,$\forall y L(1,y)$为假.

(4) 对于任意的 x,都有 $x+2\neq x-2$,所以,$\exists x L(x,2)$为假.

(5) 取 $y=0$,均有 $x+0=x-0$,所以 $\exists x\exists y L(x,y)$为真.

(6) 取 $y=0$,对于任何 x,均有 $x+0=x-0$,故有 $\forall x\exists y L(x,y)$为真.

(7) 取 $y=0$,则 $\forall x L(x,0)$(即 $\forall x(x+0=x-0)$为真,故 $\exists y\forall x L(x,y)$为真).

(8) 只要 $y\neq 0$,就有 $x+y\neq x-y$,所以,$\forall x\forall y L(x,y)$为假.

3.8 设 $F(x)$:$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$,$G(x)$: $x+5=9$.

(a) (1) $\forall x F(x)$,其真值为 0.

(2) $\exists x G(x)$,其真值为 1.

(b) (1) $\forall x F(x)$,其真值为 1.

(2) $\exists x G(x)$,其真值为 1.

分析 本题说明,在不同个体域中,同一个命题的符号化形式可能相同,但真值可能不同.

3.9 (1)、(7)、(8)的真值为 0;(2)、(3)、(4)、(5)、(6)的真值为 1.

分析 (1) 因为 $0\in\mathbf{Z}$,而 $0^2=0$,所以 $\forall x(x^2>0)$为假命题.

(2) 因为 $0\in\mathbf{Z}$,且 $0^2=0$,所以 $\exists x(x^2=0)$为真命题.

(3) $\forall x\in\mathbf{Z}$,若 $x=0$,则 $0^2=0$,若 $x\neq 0$,则 $x^2>x$,所以命题 $\forall x(x^2\geqslant x)$为真命题.

(4) 对于任意的 $x\in\mathbf{Z}$,取 $y=x^2+1$,则 $y\in\mathbf{Z}$,并且 $x^2<y$,所以 $\forall x\exists y(x^2<y)$为真命题.

(5) 取 x 为负整数,比如 $x=-1$,则对于任意整数 y,均有 $-1<y^2$,所以 $\exists x\forall y(x<y^2)$

为真命题.

(6) 对于任意的 $x\in \mathbf{Z}$,若 $x=0$,则取 $y=0$,若 $x\neq 0$,则取 $y=-x$,均有 $x+y=0$,所以 $\forall x\exists y(x+y=0)$为真命题.

(7) 在整数集合 $\mathbf{Z}$ 中,不存在 x,y,使得 $x^2+y^2=6$,所以 $\exists x\exists y(x^2+y^2=6)$为假命题.

(8) 当 x 与 y 一个为奇数,另一个为偶数时,$(x+y)/2$ 不在 $\mathbf{Z}$ 中,所以 $\forall x\forall y\exists z(z=(x+y)/2)$为假命题.

3.10 本题中没指定个体域,因而使用全总个体域,并且要引入特性谓词.

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

其中,$F(x)$:x 为人,$G(x)$:x 吃饭.

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

其中,$F(x)$:x 在北京卖菜,$G(x)$:x 是东北人.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

其中,$F(x)$:x 为自然数,$G(x)$:x 是整数.

(4) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

其中,$F(x)$:x 为人,$G(x)$:x 天天锻炼身体.

3.11 本题中没指定个体域,因而使用全总个体域.设 $F(x)$:x 是火车,$G(y)$:y 是汽车,$L(x,y)$:x 比 y 快,$H(x,y)$:x 比 y 慢.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$

(3) $\neg\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\rightarrow L(y,x)))$

(4) $\neg\forall y(G(y)\rightarrow\forall x(F(x)\rightarrow H(y,x)))$

分析 以上 4 个命题的符号化还有不同形式.利用主教材 3.2 节的等值式和置换规则可进行如下的演算.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\rightarrow(G(y)\rightarrow L(x,y)))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg F(x)\vee\neg G(y)\vee L(x,y))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee L(x,y))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$ (蕴涵等值式)

通过以上演算可知:

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$$

因而,(1)中命题常符号化为