第 3 章

函　　数

函数是数学中的最基本概念之一。在高等数学中，函数的定义域与值域都是在实数集上讨论的，即自变量与函数值都是实数的函数。本章将把函数的定义域与值域推广到离散的情况。值得注意的是，函数也是关系的一种特殊形式。本章主要介绍三个与函数相关的内容：函数的基本概念、特殊函数以及复合函数与逆函数。

3.1　函数的基本概念

在离散数学中，任何对象，包括集合都可以做自变量或函数值，并且函数仅指单值函数，也没对两个集合的元素作任何特殊限制。

定义 3.1　设 f 是集合 A 到 B 的关系，如果对每个 $x \in A$，都存在唯一 $y \in B$，使得 $(x, y) \in f$，则称关系 f 为 A 到 B 的**函数**（或**映射**、**变换**），记为 $f: A \to B$。当 $(x, y) \in f$ 时，通常记为 $y = f(x)$，这时称 x 为函数的**自变量**，称 y 为 x 在 f 下的**函数值**（或**象**）。

由函数的定义显然有：

(1) $dom(f) = A$，称为函数 f 的**定义域**；

(2) $ran(f) \subseteq B$，称为函数 f 的**值域**，B 称为函数 f 的**陪域**，$ran(f)$ 也可记为 $f(A)$，并称 $f(A)$ 为 A 在 f 下的**象**；

(3) $(x, y) \in f, (x, z) \in f \Rightarrow y = z$；

(4) $|f| = |A|$。

注意：$f(x)$ 仅表示一个变值，但 f 却代表一个集合，因此有 $f \neq f(x)$，不能混淆这两个概念。同时，在定义一个函数时，必须指定定义域、陪域及变换规则，且变换规则要覆盖定义域中所有的元素。

例 3.1　设集合 $A = \{1, 2, 3\}$，集合 $B = \{a, b, c\}$，判断下列各式是否是函数。

(1) $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$；

(2) $f = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c)\}$；

(3) $f = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$。

解：根据定义 3.1 可知：(1)和(3)满足条件，因此是函数；(2)不是函数，因为在(2)中，集合 A 中的元素 1 对应集合 B 中的两个元素 a, b，故不是函数。

例 3.2　(1) 任意集合 A 上的恒等关系 I_A 是一个函数，常称为恒等函数，并且

$I_A(x)=x$（对任意 $x\in A$）。

（2）自然数集合上的 m 倍关系是一个函数，若用 f 表示这一关系，那么 $f: N\to N$，可表示为：$y=f(x)=mx$。

如何表示一个函数，通常有以下三种方法：

（1）**列表法**：由于函数具有“单值性”，即对任一自变量有唯一确定的函数值，因此可将其序偶排列成一个表，将自变量与函数值一一对应起来。列表法一般适用于定义域为有限集合的情况。

（2）**图表法**：用笛卡儿平面上点的集合表示函数。与列表法一样，图表法一般适用于定义域有限的情况。

（3）**解析法**：用等式 $y=f(x)$ 表示函数，这时可认为 $y=f(x)$ 为函数的“命名式”，有别于“y 是 f 在 x 处的值”。$y=f(x)$ 具有双重意义，可依上下文加以区别。

由于函数归结为关系，因而函数相等的概念、包含概念，也便归结为关系相等的概念及包含概念。

定义 3.2 设函数 $f: A\to B$ 与 $g: C\to D$，如果 $A=C$，$B=D$，并且对任意的 $a\in A$ 或 $a\in C$，都有 $f(a)=g(a)$，则称函数 f 与 g 相等，记作 $f=g$。

函数作为一种特殊的二元关系，其函数相等的定义与关系相等的定义一致，即相等的两个函数必须有相同的定义域、陪域及序偶集合。因此，两个函数相等，一定满足下面两个条件：

（1）$dom(f)=dom(g)$；

（2）$\forall x\in dom(f)=dom(g)$，都有 $f(x)=g(x)$。

定义 3.3 设 A,B,C 是 3 个非空集合，函数 $f: A\to B$，$A\subseteq C$，f 在 $C-A$ 上无定义，则称 f 是 C 到 B 的**偏函数**。

定义 3.4 设 A,B,C 是 3 个非空集合，函数 $f: A\to B$；$g: C\to B$，如果 $C\subseteq A$，且对于所有的 $a\in C$，有 $g(a)=f(a)$，则称 g 是 f 的**限制**，f 是 g 的**扩充**。

如果 g 是 A 到 B 的偏函数，当对 g 无定义处规定一个值，即对 g 作一补充定义，即可构造出 g 的一个扩充。

例 3.3 设 Z 是整数集，并定义函数 $f: Z\to Z$，设 $f=\{(x,2x+1)\mid x\in Z\}$，且 $N\subseteq Z$ 为自然数集合，求 f 在 Z 上的限制。

解：先写出 f 的集合表示形式如下：

$$f=\{\cdots,(-1,-1),(0,1),(1,3),\cdots\}$$

因此，f 在自然数集 N 上的限制为：

$$g=\{(0,1),(1,3),\cdots\}$$

定义 3.5 设 A,B 是非空集合，所有从 A 到 B 的函数记作 B^A（读作“B 上 A”），符号化表示为：$B^A=\{f\mid f: A\to B\}$。

从 A 到 B 上一共可以定义多少个函数呢？有下面定理 3.1 的结论。

定理 3.1 设 A,B 是非空有限集合，则从 A 到 B 共有 $|B|^{|A|}$ 个不同的函数。

证明：设$|A|=n$，$|B|=m$。函数 f 是从 A 到 B 的任一函数，并且 f 由 A 中的 n 个元素的取值唯一确定，对于 A 中的任一元素，f 在该元素处的取值都有 m 种可能，因此从 A 到 B 可以定义 $m\cdot m\cdot\cdots\cdot m=m^n=|B|^{|A|}$ 个不同的函数。

例 3.4　设集合 $A=\{1,2\}$，集合 $B=\{a,b,c\}$，则从 A 到 B 共有 9 个函数，分别表示如下：

$$f_1=\{(1,a),(2,a)\};\quad f_2=\{(1,a),(2,b)\};\quad f_3=\{(1,a),(2,c)\};$$
$$f_4=\{(1,b),(2,a)\};\quad f_5=\{(1,b),(2,b)\};\quad f_6=\{(1,b),(2,c)\};$$
$$f_7=\{(1,c),(2,a)\};\quad f_8=\{(1,c),(2,b)\};\quad f_9=\{(1,c),(2,c)\}。$$

因为函数是一种特殊的关系，所以一个函数确定一个关系；但一个关系不一定确定一个函数，如在例 3.4 中，从 A 到 B 共有 64 个不同的关系，但仅有 9 个不同的函数。

定理 3.2　设 A,B,X,Y 是非空集合，$f: X\to Y$ 且 $A\subseteq f(X)$，$B\subseteq f(X)$，则
(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；
(2) $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

证明：(1) 先证明 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$。

对任意的 $y\in f(A\cup B)$，存在 $x\in A\cup B$，使得

$$y=f(x)$$

即 $x\in A$ 或 $x\in B$ 时，有 $y=f(x)$，因此 $f(x)\in f(A)$ 或 $f(x)\in f(B)$，当 $y\in f(A)\cup f(B)$ 时，则

$$f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$$

再证明 $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$。

对任意的 $y\in f(A)\cup f(B)$，有 $y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)$，因此在集合 A,B 中至少有一个集合里有一个 x，使得

$$y=f(x)$$

即 $y=f(x)\in f(A\cup B)$，则

$$f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$$

因此 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$。

(2) 对任意的 $y\in f(A\cap B)$，存在 $x\in A\cap B$，使得

$$y=f(x)$$

即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 时，有 $y=f(x)$，因此 $f(x)\in f(A)$ 且 $f(x)\in f(B)$，当 $y\in f(A)\cap f(B)$ 时，则

$$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$$

一般地，$f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$。

例 3.5　设集合 $X=\{1,2,3\}$，集合 $Y=\{a,b,c\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{3\}$且 $f: X\to Y$，$f(1)=a$，$f(2)=b$，$f(3)=b$。有 $A\cup B=\{1,2,3\}$，则 $f(A\cup B)=\{a,b\}$。

因此，$f(A)\cup f(B)=\{a,b\}\cup\{b\}=\{a,b\}$，即 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$成立。但是 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$不一定成立。

例 3.6　设集合 $X=\{1,2,3\}$，集合 $Y=\{a,b,c\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{3\}$且 $f: X\to Y$，$f(1)=a$，$f(2)=b$，$f(3)=b$。有 $A\cap B=\varnothing$，则 $f(A\cap B)=\varnothing$。

但是，$f(A)\cap f(B)=\{a,b\}\cap\{b\}=\{b\}$，即 $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$成立。但是不满足$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$。

3.2 特殊函数

函数作为一种关系，也可以进行分类，如果从函数的最基本性质出发，可以讨论单射的、满射的和双射的函数类。本节主要讨论函数的基本性质及几种常用的函数。

定义 3.6 设 $f: A\to B$ 是一个函数：

(1) 如果对任意的 $x_1,x_2\in A$，当 $x_1\neq x_2$ 时，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 A 到 B 的**单射函数**或**单射**，或称一对一的函数。

(2) 如果对任意的 $y\in B$，均有 $x\in A$，使 $y=f(x)$，即 $ran(f)=B$，则称 f 为 A 到 B 的**满射函数**或**满射**，或称 A 到 B 映上的函数。

(3) 如果 f 既是 A 到 B 的单射，又是 A 到 B 的满射，则称 f 为 A 到 B 的**双射函数**或**双射**，或称一一对应的函数。

可以通过下面的例 3.7 来理解这三种函数。

例 3.7 设集合 A,B，定义函数 $f: A\to B$，在图 3.1 中给出了四种不同情形下的函数。

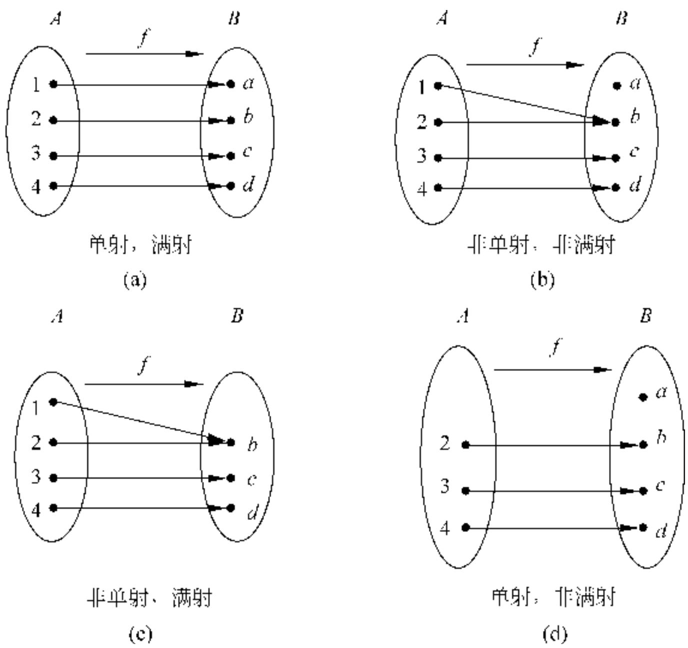

图 3.1

由定义 3.6 可知：当集合 A,B 为有限集时，有

(1) $f: A\to B$ 是单射的必要条件为$|A|\leqslant|B|$；

(2) $f: A\to B$ 是满射的必要条件为$|A|\geqslant|B|$；

(3) $f: A\to B$ 是双射的必要条件为$|A|=|B|$。

例 3.8 在实数集上，也可以找到这样的函数，如：实数集上的函数 $y=5^x$ 是单射而非满射，多项式函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 是满射而非单射，一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 是双射，但二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 既非单射，又非满射。

例 3.9 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，找出一个从 A^2 到 A 的函数。另外，能否找到一个从 A^2 到 A 的满射和一个从 A^2 到 A 的单射。

解：对任意的 $x,y\in A$，设

$$f((x,y)) = \max(x,y)$$

则 f 是一个从 A^2 到 A 的函数，该函数也是一个从 A^2 到 A 的满射，因为

$$|A^2| = |A\times A| = 10\times 10 = 100$$
$$|A| = 10$$

因此 $|A^2|>|A|$，这是满射函数存在的必要条件。但是找不到一个从 A^2 到 A 的单射，因为 $|A^2|>|A|$，不满足单射的必要条件。

定理 3.3 设 A 和 B 为有限集，若 $|A|=|B|$，则 $f: A\to B$ 是单射的充要条件是 $f: A\to B$ 为满射。

证明：(1) 必要性：若 $f: A\to B$ 是单射，则 $|A|=|f(A)|$，因为 $|A|=|B|$，所以

$$|f(A)| = |B|$$

因此，$B=f(A)$。否则，若存在 $b\in B$ 且 $b\notin f(A)$，又 B 是有限集，因此有 $|f(A)|<|B|=|A|$，与 $|f(A)|=|B|$ 矛盾。因此 $f: A\to B$ 是满射。

(2) 充分性：若 $f: A\to B$ 是满射，根据定义有 $B=f(A)$，于是

$$|A| = |B| = |f(A)|$$

则 $f: A\to B$。否则，存在 $x_1,x_2\in A$，尽管 $x_1\neq x_2$，但仍有 $f(x_1)=f(x_2)$，因此，$|f(A)|<|A|=|B|$ 与 $|A|=|B|=|f(A)|$ 矛盾，所以 $f: A\to B$ 是单射。

定义 3.7 设函数 $f: A\to B$，给出几个特殊函数的定义如下：

(1) 若存在 $b\in B$，使得对任意的 $a\in A$ 都有 $f(a)=b$，则称 f 是从 A 到 B 的**常值函数**；

(2) 集合 A 上的恒等关系 I_A 称为集合 A 上的**恒等函数**，即对任意的 $a\in A$，都有 $I_A(a)=a$。

定义 3.8 设 U 是全集，且 $A\subseteq U$，函数 $\psi_A: U\to\{0,1\}$ 定义为

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

称 ψ_A 是集合 A 的**特征函数**。

由特征函数的定义可知，集合 A 的每一个子集都对应于一个特征函数，不同的子集对应于不同的特征函数。因此，可以利用特征函数来表示集合 A 的不同的子集，及利用特征函数建立函数与集合之间的一一对应关系，有利于用计算机去解决集合中的问题。

例 3.10 设 $U=\{a,b,c,d\}$，$A=\{a,b\}$，则 A 的特征函数为：

$$\psi_A: \{a,b,c,d\}\to\{0,1\}$$
$$\psi_A(a)=\psi_A(b)=1,\quad \psi_A(c)=\psi_A(d)=0。$$

关于特征函数有定理 3.4 中的性质成立。

定理 3.4 设 U 是全集，且 $A\subseteq U,B\subseteq U$，则对任意的 $x\in U$，有

(1) $\forall x(\psi_A(x)=0)\Leftrightarrow A=\varnothing$

(2) $\forall x(\psi_A(x)=1)\Leftrightarrow A=U$

(3) $\forall x(\psi_A(x)\leqslant\psi_B(x))\Leftrightarrow A\subseteq B$

(4) $\forall x(\psi_A(x)=\psi_B(x))\Leftrightarrow A=B$

(5) $\psi_A{}'(x)=1-\psi_A(x)$

(6) $\psi_{A\cap B}(x)=\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$

(7) $\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A\cap B}(x)$

(8) $\psi_{A-B}(x)=\psi_{A\cap B'}(x)=\psi_A(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$

证明：这里只给出(6)的证明，其余可类似证明。

若 $x\in A\cap B$，有 $x\in A$ 且 $x\in B$，则 $\psi_A(x)=1$ 且 $\psi_B(x)=1$，于是 $\psi_{A\cap B}(x)=1=\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$。

若 $x\notin A\cap B$，则 $\psi_{A\cap B}(x)=0$，又因为 $x\notin A\cap B$，则有 $x\notin A$ 或 $x\notin B$，因此 $\psi_A(x)=0$ 或 $\psi_B(x)=0$，于是 $\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)=0=\psi_{A\cap B}(x)$。

综上所述，有 $\psi_{A\cap B}(x)=\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$。

利用集合的特征函数可以证明一些集合恒等式。

例 3.11 利用特征函数证明 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

证明：对任意的 x，有

$$
\begin{aligned}
\psi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)&=\psi_{A\cup B}(x)\cdot\psi_{A\cup C}(x)\\
&=(\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_{A\cap B}(x))\cdot(\psi_A(x)+\psi_C(x)-\psi_{A\cap C}(x))\\
&=(\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x))\cdot(\psi_A(x)+\psi_C(x)\\
&\quad-\psi_A(x)\cdot\psi_C(x))\\
&=\psi_A(x)+\psi_A(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_C(x)+\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\\
&\quad+\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\\
&\quad-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)+\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)\\
&=\psi_A(x)+\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)\\
&=\psi_A(x)+\psi_{B\cap C}(x)-\psi_{A\cap B\cap C}(x)\\
&=\psi_{A\cup(B\cap C)}(x)
\end{aligned}
$$

因此，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

定义 3.9 设 R 是定义在非空集合 A 上的等价关系，函数 f：$A\to A/R$，$f(x)=[x]_R$，其中$[x]_R$ 是 x 关于 R 的等价类，则称 f 为从 A 到商集 A/R 的**自然映射**。

显然，自然映射是一个满射。但是当等价关系不是恒等关系时，自然映射都不是单射。

例 3.12 设 $A=\{1,2,3\}$，等价关系 $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，写出从 A 到商集 A/R 的**自然映射**。

解：从 A 到商集 A/R 的**自然映射** f：$A\to A/R$，$f(1)=f(2)=\{1,2\}$，$f(3)=\{3\}$。

3.3 复合函数与逆函数

因为函数是一种特殊的关系，因此关系的复合运算及逆运算也适用于函数，即函数也可以进行复合运算与逆运数。

3.3.1 复合函数

定义 3.10 设 A,B,C 是集合，有函数 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$，则 f 与 g 的**复合函数**是一个由 A 到 C 的函数，记作 $g\circ f$，符号化表示为

$$g\circ f=\{(a,c)\mid a\in A,c\in C,\text{且存在 } b\in B,\text{使得}(a,b)\in f,(b,c)\in g\}$$

对于 $\forall a\in A$，有 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$。

约定，只有当两个函数中一个的定义域与另一个的值域相同时，它们的合成才有意义。当这一要求不满足时，可利用函数的限制与扩充来弥补。

例 3.13 设 f,g 均为实数集上的函数，$f(x)=x+1$，$g(x)=x^2+1$，则

$$g\circ f(x)=g(f(x))=(x+1)^2+1=x^2+2x+2$$

而

$$f\circ g(x)=f(g(x))=(x^2+1)+1=x^2+2$$

例 3.14 设集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的两个函数：$f=\{(a,c),(b,a),(c,c)\}$，$g=\{(a,b),(b,a),(c,c)\}$，则

$$f\circ g=\{(a,c),(b,b),(c,c)\},\quad g\circ f=\{(a,a),(b,c),(c,c)\}$$

一般复合函数是不可交换的，即 $f\circ g\neq g\circ f$。对于复合函数有定理 3.5 中的结论成立。

定理 3.5 设函数 $f: A\to B$，$g: B\to C$，则

(1) 若 f 与 g 是满射，则 $g\circ f: A\to C$ 是满射；

(2) 若 f 与 g 是单射，则 $g\circ f: A\to C$ 是单射；

(3) 若 f 与 g 是双射，则 $g\circ f: A\to C$ 是双射。

证明：(1) 对于任意的 $c\in C$，因为 g 是满射，所以存在 $b\in B$，使得 $c=g(b)$。而对于 $b\in B$，因为 f 是满射，所以存在 $a\in A$，使得 $b=f(a)$。于是 $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(b)=c$，因此 $g\circ f$ 是满射。

(2) 对于任意的 $a,b\in A$，如果 $a\neq b$，则 $f(a)\neq f(b)$。又因为 g 是单射，所以 $g(f(a))\neq g(f(b))$，因此 $g\circ f$ 是单射。

(3) 因为 f 与 g 是双射，即 f 与 g 既是单射又是满射，由(1)和(2)可知，$g\circ f$ 也既是单射又是满射，即 $g\circ f$ 是双射。

定理 3.6 设函数 $f: A\to B$，$g: B\to C$，则

(1) 若 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射；

(2) 若 $g\circ f$ 是单射，则 f 是单射；

(3) 若 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射。

证明：(1) 对于任意的 $c\in C$，因为 $g\circ f$ 是满射，所以存在 $a\in A$，使得 $c=g\circ f(a)$，即 $c=g(f(a))$。因此有 $b=f(a)\in B$，使得 $c=g(b)$，因此 g 是满射。

(2) 对于 $a,b\in A$，如果 $f(a)=f(b)$，又因为 g 是函数，所以 $g(f(a))=g(f(b))$，即 $g\circ f(a)=g\circ f(b)$。由于 $g\circ f$ 是单射，所以 $a=b$，即 f 是单射。

(3) 因为 $g\circ f$ 是双射，所以 $g\circ f$ 既是满射又是单射，由(1)和(2)可知，因此 g 是满射且 f 是单射。

注意：若 $g\circ f$ 是满射，则 f 不一定是满射；若 $g\circ f$ 是单射，则 g 不一定是单射。

例 3.15 设 $f: A\to B$，$g: B\to C$，举例说明：

(1) $g\circ f$ 是满射，则 f 不是满射；

(2) $g\circ f$ 是单射，则 g 不是单射。

解：(1) 设 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b_1,b_2\}$，$C=\{c\}$，定义函数 $f(a_1)=f(a_2)=b_1$，$g(b_1)=g(b_2)=c$，则 $g\circ f: A\to C$ 为

$$g\circ f(a_1)=g\circ f(a_2)=c$$

可以验证 $g\circ f$ 是满射，但是 f 不是满射。

(2) 设 $A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，$C=\{c_1,c_2\}$，定义函数 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_3$，$g(b_1)=g(b_2)=c_1$，$g(b_3)=c_2$，则 $g\circ f: A\to C$ 为

$$g\circ f(a_1)=c_1,\quad g\circ f(a_2)=c_2$$

可以验证 $g\circ f$ 是单射，但是 g 不是单射。

3.3.2 逆函数

函数作为关系可以求取它的逆关系。但是函数的逆关系不一定是函数，那在什么情况下函数的逆关系可以成为函数呢？这里做如下定义 3.11。

定义 3.11 设 $f: A\to B$ 是双射，函数 $g: B\to A$ 使得对于每一个元素 $b\in B$，有 $g(b)=a$，其中 $a\in A$ 且使得 $f(a)=b$，则称 g 是 f 的**逆函数**，记作 f^{-1}。若 f 存在逆函数，则称 f 是**可逆的**。逆函数也称为**反函数**。

例 3.16 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，$f: A\to B$，$f=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$，因为 f 不是单射，因此 f 的逆关系 $\{(a,1),(b,2),(b,3)\}$ 不是函数，但是如果 $f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$，则 f 是双射，f 的逆关系 $f^{-1}=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ 则是 f 的反函数。

定理 3.7 若 f 是从集合 A 到 B 的双射，则它的逆关系 f^{-1} 是从 B 到 A 的双射。

证明：因为 f 是双射，所以逆关系 f^{-1} 是函数。

对于任意的 $a\in A$，存在唯一的元素 $b\in B$ 使得 $b=f(a)$，又由逆函数定义知 $a=f^{-1}(b)$，即 $a\in f^{-1}(B)$，因为 a 是任意的，所以 f^{-1} 是满射。

设 $b_1,b_2\in B$，且 $b_1\neq b_2$，由双射的定义可知，必有两个元素 $a_1,a_2\in A$，且 $a_1\neq a_2$，使得 $b_1=f(a_1)$，$b_2=f(a_2)$，于是 $a_1=f^{-1}(b_1)$，$a_2=f^{-1}(b_2)$，且 $f^{-1}(b_1)\neq f^{-1}(b_2)$，因此 f^{-1} 是单射。

所以 f^{-1} 是从 B 到 A 的双射。

定理 3.8　设 $f: A \to B$，$g: B \to C$，且 f 与 g 都是可逆的，则

（1）$(f^{-1})^{-1} = f$；

（2）$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

证明：（1）由条件可知，f 与 f^{-1} 都是双射，并且有 $(f^{-1})^{-1}$ 是从 A 到 B 的双射。

对于任意的 $a \in A$，设 $f(a) = b \in B$，有 $f^{-1}(b) = a$，因此 $(f^{-1})^{-1}(a) = b$，于是 $f(a) = (f^{-1})^{-1}(a)$，因为 a 是任意的，因此 $(f^{-1})^{-1} = f$。

（2）从假设可知，等式两边都是从 C 到 A 的双射。

对于任意的 $c \in C$，存在 $b \in B$ 与 $a \in A$，使得 $g^{-1}(c) = b$，$f^{-1}(b) = a$，则

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}(b) = a$$

另外，又有 $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$，因此 $(g \circ f)^{-1}(c) = a$。因为 c 是任意的，所以有

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

例 3.17　设 R 为实数集，函数 $f: R \to R$，$g: R \to R$，$f(x) = x+1$，$g(x) = x^2$，求 $f \circ g$，$g \circ f$，如果 f 与 g 存在逆函数，求出相应的逆函数。

解：

$$f \circ g = f(g(x)) = (x^2) + 1 = x^2 + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

因为 g 不是双射，因此不存在逆函数。

习　题　3

1. 下面的关系哪些构成函数？其中 $(x, y) \in R$ 定义为：$x^2 + y^2 = 1$，x, y 均为实数。

（1）$0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；

（2）$-1 \leqslant x \leqslant 1$，$-1 \leqslant y \leqslant 1$；

（3）$-1 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；

（4）x 任意，$0 \leqslant y \leqslant 1$。

2. 设 $A = \{a, b, c\}$，问：

（1）A 到 A 可以定义多少种函数？

（2）$A \times A$ 到 A 可以定义多少种函数？

（3）$A \times A$ 到 $A \times A$ 可以定义多少种函数？

（4）A 到 $A \times A$ 可以定义多少种函数？

3. 设 $A = \{0, 1, 2\}$，$B = \{a, b\}$，问下列关系哪些是 A 到 B 的函数？

（1）$f_1 = \{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$；

（2）$f_2 = \{(0, a), (1, b), (2, a)\}$；

（3）$f_3 = \{(0, a), (1, b)\}$；

（4）$f_4 = \{(0, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$。

4. 设 f 与 g 是函数，证明 $f \cap g$ 也是函数。

5. 设 f 与 g 是函数，且 $f \subseteq g$，$dom(g) \subseteq dom(f)$，则 $f = g$。

6．设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，问下列函数哪些是单射？哪些是满射？哪些是双射？

（1）$f_1=\{(1,a),(3,b),(2,d),(4,c),(5,e)\}$；

（2）$f_2=\{(1,a),(3,a),(2,d),(4,c),(5,d)\}$；

（3）$f_3=\{(1,a),(2,b),(3,d),(4,c),(5,e)\}$。

7．设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，试给出满足下列条件的函数的例子：

（1）是单射不是满射；

（2）是满射不是单射；

（3）不是单射也不是满射；

（4）既是单射又是满射。

8．设 f,g,h 都是实数集上的函数，且 $f(x)=2x+1$，$g(x)=x^2+2$，$h(x)=x^2-2$，求 $f\circ g$，$g\circ h$，$f\circ(g\circ h)$，$g\circ(h\circ f)$。

9．设 f：$A\to B$，g：$B\to\rho(A)$，对于 $b\in B$，$g(b)=\{x\in A\mid f(x)=b\}$，证明：若 f 是 A 到 B 的满射函数，则 g 是单射函数。

10．设 f 与 g 是函数，且 $f(x)=2x+1$，$g(x)=3x+2$，$x\in I$（整数集），求 $(f\circ g)^{-1}$，$(g\circ f)^{-1}$。

11．证明：若 $(g\circ f)^{-1}$ 是一个函数，则 f 与 g 是单射不一定成立。

12．设函数 f：$R\times R\to R\times R$，f 定义为 $f(x,y)=(x+y,x-y)$。

（1）证明 f 是单射；

（2）证明 f 是满射；

（3）求逆函数 f^{-1}；

（4）求复合函数 $f^{-1}\circ f$ 与 $f\circ f^{-1}$。

第二篇

抽 象 代 数

在普通代数里，计算的对象是数，计算的方法是加、减、乘、除。由于数学和其他科学的发展，人们需要对若干不是数的事物，用类似普通计算的方法进行计算。如高等数学中的矩阵、向量等都是可以计算的。

由集合和集合中的运算所组成的系统，称为代数系统。研究代数系统的学科称为“近世代数”或“抽象代数”，它是近代数学的重要分支。代数系统是一种数学结构，它由集合、关系、运算、公理、定理、定义和算法组成。它应用抽象的方法，研究将要处理的数学对象——集合上的关系或运算。事物中的关系就是事物的结构，所以，代数系统又称为代数结构。

本篇主要内容有：

代数系统及其性质

- 二元运算及其性质
- 代数系统
- 同态与同构

几个典型的代数系统

- 群
- 环和域
- 格与布尔代数