第 3 章　电路分析方法之二——电路方程法

3.1　学习要点

3.1.1　网络图论的基本概念

将数学中的图论知识应用于网络的分析研究称为网络图论。

1. 电路的图

图是由点和线构成的几何图形。将电路中的各支路抽象为线段后即得到电路的图。

若图中的每一支路均指定了参考方向，则称之为有向图。有向图中各支路的方向通常和相应电路中对应支路电流的参考方向一致。

当图中的任意两个节点之间至少存在一条由支路构成的路径时，称之为连通图。

若 $G_i \in G$，或图 G_i 是图 G 中删去某些节点和支路后所得到的图，则称 G_i 是 G 的一个子图。

2. 树

连通图 G 中满足下列三个条件的一个子图 G_i 称为 G 的一棵树。

① 该子图为连通图；

② 它包括了 G 中的全部节点；

③ 它不含有任何回路。

树支和连支：图 G 中构成树的支路称为树支，其余的支路称为连支。设图 G 有 n 个节点和 b 条支路，则树支数为 $n-1$ 条，连支数为 $b-n+1$ 条。

3. 割集和基本割集

连通图 G 中满足下列两个条件的一个支路集合称为 G 的一个割集。

① 拿掉该支路集合，图 G 变成一个具有两个分离部分的非连通图；

② 该支路集合中只要保留一条支路，则剩下的图仍是连通的。

基本割集：在图 G 中选定了一棵树后，所得到的单树支割集称为基本割集。不同的树对应着一组不同的基本割集。基本割集的数目等于树支数，为 $n-1$ 个。

4. 基本回路

在图 G 中选定了一棵树后，所得到的单连支回路称为基本回路。不同的树对应着一组不同的基本回路。基本回路的数目等于连支数，为 $b-n+1$ 个。

3.1.2　有向图的矩阵表示

一个有向图 G 所包含的信息及特征可用四种图的矩阵表示。

1. 关联矩阵 $\boldsymbol{A}$

用于描述图 G 中节点与支路连接关系的矩阵称为关联矩阵，用 $\boldsymbol{A}$ 表示。$\boldsymbol{A}$ 矩阵的行是图的独立节点序列，其列是图的支路序列。$\boldsymbol{A}$ 是一个 $(n-1)\times b$ 阶的满秩矩阵。

$\boldsymbol{A}$ 矩阵的列(支路序列)可按照先连支后树支的顺序排列，这样 $\boldsymbol{A}$ 可写为分块矩阵的形式：

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{\mathrm{l}} \,\vdots\, \boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}]$$

其中 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{l}}$ 与连支对应，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}$ 与树支对应，且有

$$\det \boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}=\pm 1$$

连通图 G 树的数目可用 $\boldsymbol{A}$ 矩阵计算，即

$$\text{树的总数}=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$$

2. 基本割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$

描述图 G 中基本割集与支路相互关联情况的矩阵称为基本割集矩阵，用 $\boldsymbol{Q}$ 表示。$\boldsymbol{Q}$ 矩阵的行是图的基本割集序列，其列是图的支路序列。$\boldsymbol{Q}$ 是一个 $(n-1)\times b$ 阶的满秩矩阵。

将图的支路按先连支后树支的顺序排列，$\boldsymbol{Q}$ 阵可写为分块形式：

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{E} \,\vdots\, 1]$$

3. 基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}$

描述图 G 中基本回路与支路相互关联情况的矩阵称为基本回路矩阵，用 $\boldsymbol{B}$ 表示。$\boldsymbol{B}$ 矩阵的行是图的基本回路序列，其列是图的支路序列。$\boldsymbol{B}$ 是一个 $(b-n+1)\times b$ 阶的满秩矩阵。

将图的支路按先连支后树支的顺序排列，$\boldsymbol{B}$ 阵可写为分块形式：

$$\boldsymbol{B}=[1 \,\vdots\, \boldsymbol{F}]$$

4. 网孔矩阵 $\boldsymbol{M}$

描述图 G 中网孔与支路相互关联情况的矩阵称为网孔矩阵，用 $\boldsymbol{M}$ 表示。$\boldsymbol{M}$ 矩阵的行是图的网孔序列，其列是图的支路序列。$\boldsymbol{M}$ 是一个 $(b-n+1)\times b$ 阶的满秩矩阵。

5. 各矩阵间的关系

上述图的四种矩阵之间满足下列关系式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=0,\quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0,\quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}=0$$

3.1.3　KCL、KVL 的矩阵形式

基尔霍夫定律可用图的四种矩阵表示，于是可得到 KCL、KVL 的矩阵形式。

1. 用 $\boldsymbol{A}$ 阵表示的 KCL、KVL

用关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示的 KCL 为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=0$$

式中，$\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}$ 为电路的支路电流列向量。若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}$ 中的支路均按先连支后树支的顺序排列，便有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=[\boldsymbol{A}_{\mathrm{l}} \,\vdots\, \boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}\\ \cdots\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}=0$$

于是得

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}=-\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{l}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}$$

上式表明，树支电流 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}$ 可用连支电流 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}$ 表示。

用 $\boldsymbol{A}$ 阵表示的 KVL 为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{N}$$

式中，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}$ 为电路的支路电压列向量，$\boldsymbol{U}_{N}$ 为节点电压列向量。上式表明，支路电压可用节点电压表示。

2. 用 $\boldsymbol{Q}$ 阵表示的 KCL、KVL

用基本割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 表示的 KCL 为

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=0$$

根据上式有

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=[\boldsymbol{E} \ \vdots\ 1]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}\\ \cdots\\ \boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}=0$$

得到

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}$$

上式同样表明树支电流可用连支电流表示。

用 $\boldsymbol{Q}$ 阵表示的 KVL 为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$$

式中，$\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$ 为树支电压列向量。上式表明支路电压可用树支电压表示。

3. 用 $\boldsymbol{B}$ 阵表示的 KCL、KVL

用基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示 KCL 为

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{l}}$$

上式表明支路电流可用连支电流表示。

用 $\boldsymbol{B}$ 阵表示的 KVL 为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=0$$

根据上式有

$$[1 \ \vdots\ \boldsymbol{F}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_{\mathrm{l}}\\ \cdots\\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{l}}+\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}=0$$

得到

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{l}}=-\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$$

上式表明连支电压可用树支电压表示。

4. 用 $\boldsymbol{M}$ 阵表示的 KCL、KVL

用网孔矩阵 $\boldsymbol{M}$ 表示的 KCL 为

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{M}}$$

式中，$\boldsymbol{I}_{\mathrm{M}}$ 为网孔电流列向量。上式表明支路电流可用网孔电流表示。

用 $\boldsymbol{M}$ 阵表示的 KVL 为

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=0$$

5. 电路中独立完备的变量

电路中的节点电压、树支电压、连支电流、网孔电流是独立完备的变量，可用它们作为求

解对象建立电路方程(组),从而求得各支路的电压、电流。

3.1.4　典型支路的特性方程、2b 法

1. 典型支路及其特性方程

如果不考虑受控电源,电路中的一条典型支路如图 3-1 所示。其特性方程(支路方程)为

$$u_k = R_k i_k + u_{sk} - R_k i_{sk}$$

或

$$i_k = G_k u_k + i_{sk} - G_k u_{sk}$$

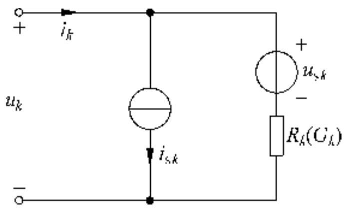

图 3-1　电路中的一条典型支路

若电路中有 b 条支路,则支路方程的矩阵形式为

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}} - \boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}$$

或

$$\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}$$

式中,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$ 和 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}$ 分别为支路电阻矩阵和支路电导矩阵,在无受控源时,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$ 和 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}$ 均为对角线矩阵。$\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}$和 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}$分别为支路电压源列向量和支路电流源列向量。

2. 2b 法

以电路中 b 条支路的电流、电压共 $2b$ 个电量为变量列写方程组求解电路的方法称为 $2b$ 法。

$2b$ 法矩阵形式的方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} = 0 \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = 0 \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}} - \boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}} \quad (\text{或 } \boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} + \boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}})\end{cases}$$

$2b$ 法主要用于计算机辅助电路分析。由于所需列写的方程数目较多,计算工作量较大,在人工计算电路时较少使用。

3.1.5　支路分析法

以电路中的支路电流或支路电压为变量列写电路中独立节点的 KCL 方程和独立回路的 KVL 方程而求解电路的方法称为支路分析法(包括支路电流法和支路电压法)。由于支路电压法在实际中用得较少,下述的支路分析法均指支路电流法。支路分析法也简称为支路法。

1. 支路法方程的矩阵形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} = 0 \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{\mathrm{bs}}\end{cases}$$

第二个方程实际是独立回路的 KVL 方程,是将支路方程代入 KVL 方程 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=0$ 后得到的结果。

2. 视察法列写支路法方程的规则和步骤

(1) 为各支路电流指定参考方向,为各独立回路指定绕行方向;

(2) 列写 $n-1$ 个独立节点的 KCL 方程;

(3) 列写各独立回路的 KVL 方程:这一方程的形式为 $\sum R_k i_k = \sum U_{sk}$,即方程的左

边为回路中各电阻电压的代数和，当电流 i_k 与回路的绕行方向一致时，该项电压前取正号，否则取负号。方程的右边为回路中所有电压源电压的代数和，当电压源电压的方向与回路的绕行方向一致时，该项电压前为负号，否则为正号。

3. 电路中含受控源时支路法方程的列写

先将受控源视为独立电源列写方程，再将受控源的控制量用支路电流表示后代入到方程中整理便可。

4. 电路中含无伴电流源支路时支路法方程的列写

可用两种方法进行处理。

(1) 虚设电压变量法，即假设无伴电流源支路的端电压为新的变量后再列写独立回路的 KVL 方程。

(2) 选“合适树”法，即把无伴电流源支路选入连支，从而该连支对应的基本回路的 KVL 方程无需列写，这样也减少了方程的数目。

3.1.6 节点分析法

以节点电位(电压)为变量列写电路方程(组)求解电路的方法称为节点分析法，简称为节点法。所列写的节点法方程实质是独立节点的 KCL 方程。

1. 节点法方程的矩阵形式

将支路方程 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}$ 代入 KCL 方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=0$，再将 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{N}}$ 代入，整理后便得到节点法方程：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}$$

该方程也可写为欧姆定律的形式

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{I}_{\mathrm{N}}$$

式中 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 称为节点电导矩阵，$\boldsymbol{I}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}$ 称为节点电流源电流列向量。

2. 视察法列写节点法方程的规则和步骤

(1) 选定参考节点后给各独立节点编号；

(2) 对各独立节点列写方程。第 i 个节点的方程的一般形式为 $g_{ii}\varphi_i-\sum\limits_{k\neq i}G_{ik}\varphi_k=\sum i_{sk}$。方程左边的 g_{ii} 称为节点 i 的自电导，其为连接至节点 i 上所有电阻支路的电导之和，g_{ii} 前恒取正号。g_{ik} 称为节点 i 与节点 k 间的互电导，其为节点 i 与节点 k 之间所有电阻支路的电导之和，g_{ik} 前恒取负号。方程的右边为连接至节点 i 上的所有电流源电流的代数和，当电流源电流的参考方向指向节点 i 时，该电流源电流前取正号，否则取负号。

3. 电路中含受控源时节点法方程的列写

先将受控源视为独立电源列写方程，再将受控源的控制量用节点电位表示后代入所列写的节点法方程中进行整理即可。

4. 电路中含无伴电压源支路时节点法方程的列写

可用三种方法进行处理。

(1) 无伴电压源端点接地法。将无伴电压源的一个端点选为参考点，则其另一个端点(节点)的电位便为已知，于是该节点的方程无需列写，从而可减少所需列写的方程的数目。

（2）作封闭面法。围绕连接无伴电压源支路的两个节点作封闭面后列写该封闭面的KCL 方程。这一方法也能减少方程的数目。

（3）虚设电流变量法。增设无伴电压源支路的电流为新的变量后再对各独立节点建立方程，同时还需增加用节点电位表示的无伴电压源电压的方程。

3.1.7　网孔分析法

以网孔电流为变量建立电路方程求解电路的方法称为网孔分析法，也简称为网孔法。所列写的网孔法方程实质是各网孔的 KVL 方程。

1. 网孔法方程的矩阵形式

将支路方程 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}$ 代入 KVL 方程 $\boldsymbol{MU}_{\mathrm{b}}=0$ 后再将 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{M}}$ 代入整理，即得网孔法方程

$$\boldsymbol{MR}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{M}}=\boldsymbol{MR}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{MU}_{\mathrm{sb}}$$

上式也可写为欧姆定律的形式

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{M}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{M}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{M}}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{M}}=\boldsymbol{MR}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}$，称为网孔电阻矩阵；$\boldsymbol{E}_{\mathrm{M}}=\boldsymbol{MR}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{MU}_{\mathrm{sb}}$，称为网孔电压源电压列向量。

2. 视察法建立网孔法方程的规则和步骤

（1）给电路中的各网孔编号，指定各网孔的绕行方向为顺时针方向；

（2）对各网孔列写方程。第 i 个网孔方程的一般形式为 $R_{ii}I_{mi}-\sum\limits_{k\neq i}R_{ik}I_{mk}=\sum U_{sk}$。方程左边的 R_{ii} 称为第 i 个网孔的自电阻，其为网孔 i 中所有电阻支路的电阻之和，R_{ii} 前恒取正号。R_{ik} 称为网孔 i 和网孔 k 之间的互电阻，其为 i、k 两网孔间的所有公共电阻支路的电阻之和，R_{ik} 前恒取负号。方程的右边为网孔 i 中所有电压源电压的代数和。当电压源电压的参考方向与网孔的绕行方向一致时，该电压源的电压取负号，否则取正号。

3. 电路中含受控源时网孔法方程的列写

先将受控源视为独立电源建立方程，再将受控源的控制量用网孔电流表示后代入到所列写的网孔法方程中进行整理即可。

4. 电路中含无伴电流源支路时网孔法方程的列写

可用两种方法处理。

（1）电流源单相关法。使无伴电流源支路只和一个网孔关联，这样该网孔的电流为已知电流源的电流，于是这一网孔的方程无需列写，从而也减少了所需列写的方程的数目。

（2）虚设电压变量法。增设无伴电流源支路的端电压为新的变量后再对各网孔建立方程。同时还需增加用网孔电流表示的无伴电流源电流的方程。

3.1.8　回路分析法

以基本回路电流为变量建立电路方程求解电路的方法称为回路分析法，简称回路法。所列写的回路法方程实质是各基本回路的 KVL 方程。

1. 回路法方程的矩阵形式

将支路方程 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}$ 代入 KVL 方程 $\boldsymbol{BU}_{\mathrm{b}}=0$ 后再将 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{L}}$ 代入整理，即得回路法方程

$$\boldsymbol{B R}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{B R}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{B U}_{\mathrm{sb}}$$

上式也可写为欧姆定律的形式

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{L}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{B R}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，称为回路电阻矩阵；$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{B R}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{B U}_{\mathrm{sb}}$，称为回路电压源电压列向量。

2. 视察法建立回路法方程的规则和步骤

(1) 给各支路电流指定参考方向；

(2) 画出电路对应的有向图，选一棵树后找出对应的一组基本回路；

(3) 对各基本回路列写方程。第 i 个回路方程的一般形式为 $R_{ii}I_{li} \pm \sum\limits_{k \neq i} R_{ik}I_{lk} = \sum U_{sk}$。方程左边的 R_{ii} 称为第 i 个回路的自电阻，其为回路 i 中所有电阻支路的电阻之和，R_{ii} 前恒取正号。R_{ik} 称为回路 i 和回路 k 之间的互电阻，其为 i、k 两回路间所有公共电阻支路的电阻之和。当 i、k 两回路的绕行方向关于公共电阻支路为一致时，R_{ik} 前取正号，否则取负号。方程的右边为回路 i 中所有电压源电压的代数和。当电压源电压的参考方向与回路的绕行方向一致时，该电压源电压取负号，否则取正号。

3. 电路中含受控源时回路法方程的列写

先将受控源视为独立电源列写方程，再将受控源的控制量用回路电流表示后代入所写的回路法方程中加以整理即可。

4. 电路中含无伴电流源支路时回路法方程的列写

可用两种方法处理。

(1) 选“合适树”法。选树时，使无伴电流源支路为连支，于是与该连支对应的基本回路的电流为已知电流源的电流，这一回路的方程无需列写，从而也减少了方程的数目。

(2) 虚设电压变量法。增设无伴电流源支路的端电压为新的变量再对各回路建立方程。同时还需增加用回路电流表示的无伴电流源电流的方程。

3.1.9 割集分析法

以树支电压为变量建立电路方程求解电路的方法称为割集分析法，简称割集法。所列写的割集法方程实质是各基本割集的 KCL 方程。

1. 割集法方程的矩阵形式

将支路方程 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{b}+\boldsymbol{I}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}$ 代入 KCL 方程 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_{\mathrm{b}}=0$，再将 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}$ 代入整理，即得割集法方程

$$\boldsymbol{Q G}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{Q G}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{Q I}_{\mathrm{sb}}$$

上式也可写为欧姆定律的形式

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}} \boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{Q G}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$，称为割集电导矩阵；$\boldsymbol{I}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{Q G}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{U}_{\mathrm{sb}}-\boldsymbol{Q I}_{\mathrm{sb}}$，称为割集电流源电流列向量。

2. 视察法建立割集法方程的规则和步骤

(1) 给各支路电流指定参考方向；

(2) 作出电路对应的有向图，选一棵树后找出其对应的一组基本割集；

(3) 对各基本割集列写方程。第 i 个割集方程的一般形式为 $G_{ii}U_{ti} \pm \sum G_{ik}U_{tk} =$

$\sum I_{sk}$。方程左边的 G_{ii} 称为第 i 个割集的自电导，G_{ii} 前恒取正号。G_{ik} 称为割集 i 和割集 k 之间的互电导，其为 i、k 两割集间所有公共电阻支路的电导之和。当 i、k 两割集的方向关于公共电阻支路为一致时，G_{ik} 前取正号，否则取负号。方程的右边为割集 i 中所有电流源电流的代数和。当电流源的电流方向和割集方向一致时，该电流源电流取负号，否则取正号。

3. 电路中含受控源时割集法方程的列写

先将受控源视为独立电源列写方程，再将受控源的控制量用树支电压表示后代入已建立的方程中加以整理即可。

4. 电路中含无伴电压源支路时割集法方程的列写

可用两种方法处理。

(1) 选“合适树”法。选一棵树，将无伴电压源支路均选入树支，这样该树支的电压便为已知电压源的电压，此树支对应的基本割集的方程无需列写，因此减少了方程的数目。

(2) 虚设电流变量法。增设无伴电压源支路的电流为新的变量再对各基本割集建立方程。同时需增加用树支电压表示的无伴电压源电压的方程。

3.1.10　对偶原理和对偶电路

对偶是一种类比关系。对偶现象在电路中普遍存在。比如有对偶元件、对偶参数、对偶变量、对偶结构、对偶关系式、对偶状态等。

1. 对偶原理

对偶原理的内容为：若 N 和 $\hat{\mathrm{N}}$ 互为对偶电路，则在 N 中成立的一切定理、公式和方程，在用对偶量替代后，在对偶电路 $\hat{\mathrm{N}}$ 中必然成立，反之亦然。

2. 对偶电路

可用“打点法”做出一个平面电路 N 的对偶电路 $\hat{\mathrm{N}}$，或做出平面上的一个有向图 G 的对偶有向图 $\hat{\mathrm{G}}$。

3.2　练习题题解

3-1　有向图如图 3-2 所示。(1)列举出其全部的树；(2)列举出其全部的回路。

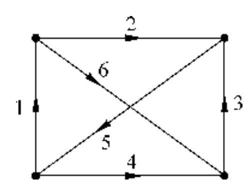

图 3-2　练习题 3-1 图

解　(1) 该图共有 16 棵树，组成各树的树支情况如下：

{1,2,3}、{1,2,4}、{1,2,6}、{1,3,4}、{1,3,5}、{1,3,6}、{1,4,5}、{1,5,6}、{2,3,4}、{2,3,5}、{2,4,5}、{2,4,6}、{2,5,6}、{3,4,6}、{3,5,6}、{4,5,6}。

(2) 该图共有七个回路，构成各回路的支路情况如下：

{1,2,5}、{1,2,3,4}、{1,4,6}、{2,3,6}、{3,4,5}、{1,3,5,6}

3-2　有向图如图 3-2 所示。若选支路 1、3、5 为树支，请完成：(1)找出对应的基本割集组；(2)找出对应的基本回路组。

解　(1) 选树后找出对应的三个基本割集如图 3-3 中所示，即

$$C_1:\{1,2,6\}、C_2:\{3,4,6\}、C_3:\{2,4,5,6\}$$

(2) 找出对应的三个基本回路如图 3-3 中所示，即

$$l_1:\{1,2,5\}、l_2:\{3,4,5\}、l_3:\{1,3,5,6\}$$

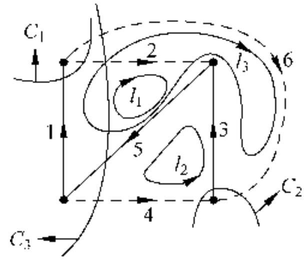

图 3-3　练习题 3-2 图

3-3　有向图如图 3-4(a)所示，选支路 1,2,3,5 为树支，节点④为参考点。(1)写出关联矩阵 $\boldsymbol{A}$、网孔矩阵 $\boldsymbol{M}$、基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和基本割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$；(2)验证 $\boldsymbol{AM}^{\mathrm{T}}=0$，$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=0$，$\boldsymbol{QB}^{\mathrm{T}}=0$。

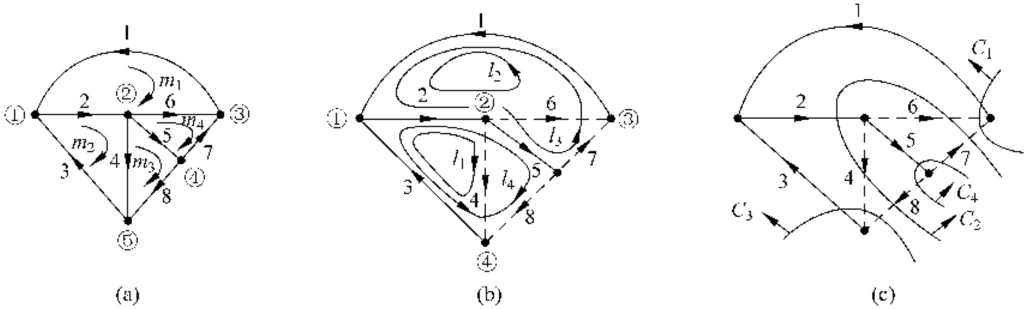

图 3-4　练习题 3-3 图

解　(1) 各矩阵的支路均按先连支后树支的顺序排列。写出关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ⑤ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} b_4 & b_6 & b_7 & b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

各网孔的编号及绕行方向(均为顺时针方向)如图(a)所示。写出网孔矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} b_4 & b_6 & b_7 & b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

选取各基本回路如图(b)所示。写出基本回路矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} b_4 & b_6 & b_7 & b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

选取各基本割集如图(c)所示。写出基本割集矩阵为

$$
\boldsymbol{Q}=\begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} b_4 & b_6 & b_7 & b_8 & b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(2) 验证 $\boldsymbol{AM}^{\mathrm{T}}=0$、$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=0$、$\boldsymbol{QB}^{\mathrm{T}}=0$(略)。

3-4　若关联矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_l \,\vdots\, \boldsymbol{A}_t]$,其中子矩阵 $\boldsymbol{A}_l$ 与连支对应,子矩阵 $\boldsymbol{A}_t$ 与树支对应,试将支路电流列向量 $\boldsymbol{I}_b$ 用关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和连支电流列向量 $\boldsymbol{I}_l$ 表示。

解　由 $\boldsymbol{AI}_b=0$,有

$$\boldsymbol{AI}_b=[\boldsymbol{A}_l \,\vdots\, \boldsymbol{A}_t]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l \\ \cdots \\ \boldsymbol{I}_t\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{I}_l+\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{I}_t=0$$

得

$$\boldsymbol{I}_t=-\boldsymbol{A}_t^{-1}\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{I}_l$$

于是有

$$\boldsymbol{I}_b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l \\ \cdots \\ \boldsymbol{I}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l \\ \cdots\cdots \\ -\boldsymbol{A}_t^{-1}\boldsymbol{A}_l\boldsymbol{I}_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ \cdots\cdots \\ -\boldsymbol{A}_t^{-1}\boldsymbol{A}_l\end{bmatrix}\boldsymbol{I}_l$$

3-5　电路如图 3-5 所示。(1)列写戴维南形式的支路方程,并写成矩阵形式;(2)列写诺顿形式的支路方程,并写成矩阵形式。

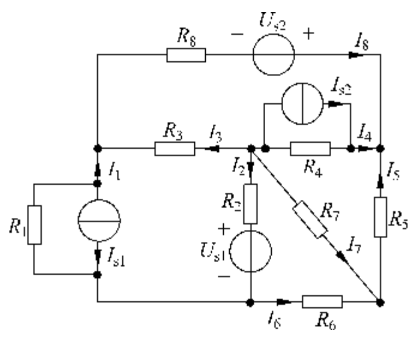

图 3-5　练习题 3-5 图

解　(1) 戴维南形式的支路方程为

$$\begin{cases} U_1=R_1I_1+R_1I_{s1} \\ U_2=R_2I_2+U_{s1} \\ U_3=R_3I_3 \\ U_4=R_4I_4-R_4I_{s2} \\ U_5=R_5I_5 \\ U_6=R_6I_6 \\ U_7=R_7I_7 \\ U_8=R_8I_8-U_{s2} \end{cases}$$

将上述方程写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\\U_7\\U_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1&0&0&0&0&0&0&0\\0&R_2&0&0&0&0&0&0\\0&0&R_3&0&0&0&0&0\\0&0&0&R_4&0&0&0&0\\0&0&0&0&R_5&0&0&0\\0&0&0&0&0&R_6&0&0\\0&0&0&0&0&0&R_7&0\\0&0&0&0&0&0&0&R_8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\I_3\\I_4\\I_5\\I_6\\I_7\\I_8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\U_{s1}\\0\\0\\0\\0\\0\\-U_{s2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}R_1&0&0&0&0&0&0&0\\0&R_2&0&0&0&0&0&0\\0&0&R_3&0&0&0&0&0\\0&0&0&R_4&0&0&0&0\\0&0&0&0&R_5&0&0&0\\0&0&0&0&0&R_6&0&0\\0&0&0&0&0&0&R_7&0\\0&0&0&0&0&0&0&R_8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-I_{s1}\\0\\0\\I_{s2}\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

（2）诺顿形式的支路方程为

$$\begin{cases} I_1 = G_1U_1 - I_{s1} \\ I_2 = G_2U_2 - G_2U_{s1} \\ I_3 = G_3U_3 \\ I_4 = G_4U_4 + I_{s2} \\ I_5 = G_5U_5 \\ I_6 = G_6U_6 \\ I_7 = G_7U_7 \\ I_8 = G_8I_8 + G_8U_{s2} \end{cases}$$

将上述方程写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}[G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5 \quad G_6 \quad G_7 \quad G_8] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ I_{s2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- \mathrm{diag}[G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5 \quad G_6 \quad G_7 \quad G_8] \begin{bmatrix} 0 \\ U_{s1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_{s2} \end{bmatrix}$$

3-6　列写图 3-6 所示电路的支路电流法方程。

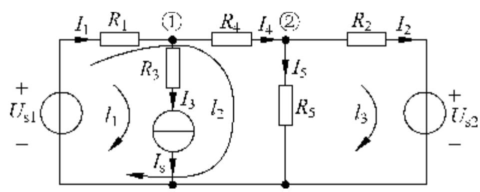

图 3-6　练习题 3-6 图

解　该电路含有一无伴电流源支路，宜采用“选树法”。“选树法”的实质是使无伴电流源支路只与一个回路相关联，而不使其成为两个或多个回路的公共支路。按此思路选出三个回路如图中所示，其中无伴电流源支路只与回路 l_1 相关联，于是只需对 l_2 和 l_3 回路写出 KVL 方程。该电路的支路法方程为

$$\begin{cases} -I_1 + I_s + I_4 = 0 \\ I_2 - I_4 + I_5 = 0 \\ R_1I_1 + R_4I_4 + R_5I_5 = U_{s1} \\ R_2I_2 - R_5I_5 = -U_{s2} \end{cases}$$

3-7　试建立图 3-7 所示电路的节点电位法方程。

解　给各节点编号及选参考节点如图中所示。因电路中有两个无伴电压源支路，采用