

第3章 改善的单纯形法

3.1 数学准备

前面已讨论过单纯形法,不难发现,单纯形法中有好多步骤是可以省略的,因此当利用线性规划处理大型问题时矛盾便显得十分突出。比如对于成千上万个变元和约束条件时,单纯形表格占用的时间和空间都将十分巨大,那么表上作业是否可以改进呢?答案是肯定的。

单纯形表格的表上作业是主元素消元,关键在于求逆矩阵,消元过程相当于对表格左乘以逆矩阵。下面具体介绍。

改善之一:

$$C_B(B^{-1}a) = (C_BB^{-1})a$$

迭代过程反复计算

$$c_j - e_j = c_j - C_B(B^{-1}a_j)$$

改为 $c_j - (C_BB^{-1})a_j = \pi a_j$, 其中 $\pi = C_BB^{-1}$ 。

改善之二: 矩阵求逆。

单纯形法求解过程的关键性计算是对基矩阵求逆,换一个基后还要对新矩阵求逆,新旧矩阵仅仅有一列之差,它的求逆有没有更方便的方法? 矩阵求逆在线性代数中讨论得很多,常用的有约当(Jordan)求逆法,这是一般的方法。特殊的问题能否利用其特殊性? 答案也是肯定的。其实,在进行单纯形表格计算时, B^{-1} 的出现是在表上作业的最后,其实只要求出 B^{-1} , 一切运算就可确定。而且细心的读者不难发现无须整个表格消元完毕,只要对进入的基的列作主元素消去法,就可以确定 B^{-1} 。

下面先讨论一个问题。

已知 $B_0 = (p_1 p_1 \cdots p_k \cdots p_n)_{n \times n}$ 及 B_0^{-1} , 矩阵 B_n 只是 B_0 中的 p_k 列改为 p , 即

$$B_n = (p_1 p_2 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } k \text{ 列}}}{p} \cdots p_n)_{n \times n}$$

求 B_n^{-1} 。令

$$B_0 y = p, \quad y = B_0^{-1} p = (y_1 y_2 \cdots y_n)^T$$

令

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & y_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & y_k & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid y \mid \cdots e_n)$$

即 E_k 为 $n \times n$ 的单位阵 $I_{(n)}$ 第 k 列用 y 取代之, 其中 e_i 为第 i 个元素为 1 的单位列向量。
 不难验证

$$B_0E_k = B_n$$

因为

$$B_0e_i = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad B_0y = p$$

所以

$$B_n^{-1} = (B_0E_k)^{-1} = E_k^{-1}B_0^{-1}$$

但

$$E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -y_1/y_k & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -y_2/y_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/y_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -y_n/y_k & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由约当求逆法可知, 对矩阵 $(E_k \vdots I)$ 即对矩阵

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & y_1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & y_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & y_k & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & y_n & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

进行初等变换, 当出现 $(I_{(n)} \vdots D)$ 时, 即

$$\begin{array}{l} \text{第 } k \text{ 行} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & -y_1/y_k & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & -y_2/y_k & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1/y_k & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & -y_n/y_k & \cdots & 1 \end{array} \right) \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad \text{第 } k \text{ 列} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{第 } k \text{ 列} \end{array}$$

D 即为 E_k^{-1} 。这个过程只要对列向量 y 以 y_k 为主元素进行列消元时, 右半部分便出现 E_k^{-1} 。这说明以 y 的 y_k 为主元素进行列消元的过程相当于左乘以 E_k^{-1} 。这一点非常重要, 在改善单纯形法中, 主要改善之点便在于求 B_n^{-1} 。另一方面请注意

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \cdots & -y_1/y_k & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -y_2/y_k & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1/y_k & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & -y_n/y_k & \cdots & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } k \text{ 行}$$

都说明用 E_k 左乘于 B_0^{-1} 相当于对增广矩阵

$$(B_0^{-1} \vdots y)$$

对 y 以 y_k 为主元素进行列消元, 即得

$$(B_n^{-1} \vdots E_k)$$

例 3.1 已知

$$B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 0 \\ 14/9 & -8/9 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

求 B_n^{-1} 。

第一步求 $y = B_0^{-1}p = \begin{bmatrix} 4/9 & -1/9 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 0 \\ 14/9 & -8/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$, 问题变成对下列增广矩阵对用 $\odot$

所标注的元素进行列消元。

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4/9 & -1/9 & 0 & 1/3 \\ 1/9 & 2/9 & 0 & 1/3 \\ 14/9 & -8/9 & 1 & \textcircled{2/3} \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{第 3 行乘以 } \frac{3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\text{分别加到第 1、2 行}]{\text{第 3 行乘 } -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

3.2 改善的单纯形法

3.2.1 改善的单纯形法的步骤

综上所述, 改善的单纯形法就是单纯形法, 不同点只在于矩阵 B 求逆, 以及求 $C_N - C_B B^{-1} N$ 时用到的方法。改善的单纯形法大大降低了时间复杂度。后面还将看出其空间复杂性变化不大。

以问题

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

为例,求解步骤如下:

(1) 确定 $\mathbf{x}_B$, 求 $\mathbf{B}^{-1}$ 。

(2) 计算 $\pi = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1}$, $c_i - z_i = c_i - \pi \mathbf{a}_i$, $i \in N$, 若所有 $c_i - z_i \leq 0$, 则已达到最优解, 结束。

若 $c_j - z_j > 0$, 则 x_j 进入基变量。转步骤(3)。

(3) 为了确定退出基, 计算 $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, $\mathbf{p}_j = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j$ 。若 $\mathbf{p}_j \leq \mathbf{0}$, 则问题无界。

$$\beta = \min_h \left\{ \frac{b_h}{p_{hj}} \mid p_{hj} > 0 \right\} = \frac{b_k}{p_{kj}}$$

则 x_k 为退出基变量, 转步骤(1)。

3.2.2 举例

例 3.2 用改善单纯形法求解

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 4x_2 &\leq 32 \\ x_1 + x_2 &\leq 11 \\ 5x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

引进松弛变量 x_3, x_4 和 x_5 , 则问题变为:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 4x_2 + x_3 &= 32 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 11 \\ 5x_1 + x_2 + x_5 &= 35 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

第一轮迭代:

$$(1) \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 11 \\ 35 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{C}_B = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$(2) \pi = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} = (0 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \pi \mathbf{a}_1 = 2 > 0$$

$$c_2 - z_2 = c_2 - \pi \mathbf{a}_2 = 1 > 0$$

因 $2 > 1$, 故选 x_1 作为进入基变量。

(3) 为了确定退出基, 计算 $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{a}_1$

$$\beta = \min\left\{32, 11, \frac{35}{5}\right\} = 7$$

故 x_5 作为退出基变量。

第二轮迭代：

$$(1) \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \text{求 } \mathbf{B}^{-1}.$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad k=3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & \textcircled{5} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} & \textcircled{1} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$(2) \boldsymbol{\pi} = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} = (0 \quad 0 \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \left(0 \quad 0 \quad \frac{2}{5}\right)$$

$$c_2 - z_2 = 1 - \left(0 \quad 0 \quad \frac{2}{5}\right) \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} > 0$$

$$c_5 - z_5 = 0 - \left(0 \quad 0 \quad \frac{2}{5}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{2}{5} < 0$$

$$\text{故选 } x_2 \text{ 作为进入基, } \mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 11 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \mathbf{p}_2 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/5 \\ 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \min \left\{ \frac{25}{19/5}, \frac{4}{4/5}, \frac{7}{1/5} \right\} = 5$$

故 x_4 退出。

第三轮迭代：

$$(1) \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{求 } \mathbf{B}^{-1}.$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_0^{-1} \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad k=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{19}{5} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \textcircled{\frac{4}{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{19}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right)$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{19}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$(2) \pi = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} = (0 \quad 1 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{19}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(0 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \right)$$

$$c_4 - \pi \mathbf{a}_4 = - \left(0 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} < 0$$

$$c_5 - \pi a_5 = - \left(0 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

故

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{19}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 \\ 11 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{x}_N = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 是最优解。

$$\max z = (0 \quad 1 \quad 2) \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 17$$

例 3.3 用改善单纯形法求解

$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 - x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ &-x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4 \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

第一轮迭代:

$$(1) \mathbf{x}_B = (x_4 \quad x_5 \quad x_6)^T, \mathbf{C}_B = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \pi = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} = (0 \quad 0 \quad 0)$$

$$c_1 - z_1 = -1, \quad c_2 - z_2 = -1, \quad c_3 - z_3 = 4$$

故 x_3 为进入基变量。

(3) 为了确定退出基, 计算

$$\beta = \min \left\{ \frac{9}{2}, \frac{4}{1} \right\} = 4$$

故 x_6 退出。

第二轮迭代:

$$(1) \mathbf{x}_B = (x_4 \quad x_5 \quad x_3)^T, \mathbf{C}_B = (0 \quad 0 \quad 4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{求 } \mathbf{B}^{-1}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & ① \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \pi = \mathbf{C}_B \mathbf{B}^{-1} = (0 \quad 0 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 4)$$

$$c_1 - z_1 = c_1 - \pi \mathbf{a}_1 = -1 - (0 \quad 0 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 > 0$$

$$c_2 - z_2 = c_2 - \pi \mathbf{a}_2 = -1 - (0 \quad 0 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 < 0$$

故 x_1 选为进入基变量。

$$(3) \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\beta = \frac{1}{3}$, 故 x_4 退出。

第三轮迭代:

$$(1) \mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{求 } \mathbf{B}^{-1}.$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \textcircled{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right)$$

故

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{C}_B=(-1 \quad 0 \quad 4), \pi=\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}=(-1 \quad 0 \quad 4)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=(1 \quad 0 \quad 2)$$

$$c_2-z_2=-1-\pi\mathbf{a}_2=-1-(1 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=-4<0$$

$$c_4-z_4=-(1 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=-1<0$$

$$c_6-z_6=-(1 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-2<0$$

故 $x_1=\frac{1}{3}, x_2=0, x_3=\frac{13}{3}, z=17$ 是最优解。

3.3 改善的单纯形法表格

3.3.1 表格的介绍

改善的单纯形法也可以在表上进行作业，目的在于使运算能够紧凑地进行。如表 3.1 所示，其中 $\mathbf{p}_k$ 是进入基， $\mathbf{p}_k=\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{a}_k$ 。

表 3.1

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{a}_k$	$\mathbf{p}_k$	β
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$			

例 3.4 见例 3.3,读者可以比较。

$c_1-z_1=-1, c_2-z_2=-1, c_3-z_3=4$, 故 x_3 进入。将 $\mathbf{p}_3$ 填入表 3.2 和表 3.4, 可分别得到表 3.3 和表 3.5。

表 3.2

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{a}_k$	$\mathbf{p}_k$	β
x_4	0	9	1 0 0	2	2	9/2
x_5	0	2	0 1 0	-1	-1	
x_6	0	4	0 0 1	1	①	④
		0	0 0 0			

表 3.3

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{C}_B$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{p}$
x_4	0	1	1 0 -2	0
x_5	0	0	0 1 1	0
x_3	4	4	0 0 1	1
		16	0 0 4	

⇒

$$c_1 - z_1 = -1 - (0 \quad 0 \quad 4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 > 0, \text{故 } x_1 \text{ 进入基变量。}$$

表 3.4

x_B	C_B	b	B^{-1}	a_1	p_1	β
x_4	0	1	1 0 -2	1	③	$(1/3)$
x_5	0	6	0 1 1	1	0	
x_3	4	4	0 0 1	-1	-1	
		16	0 0 4			

表 3.5

x_B	C_B	b	B^{-1}	p_1
x_1	-1	1/3	1/3 0 -2/3	1
x_5	0	6	0 1 1	0
x_3	4	13/3	1/3 0 1/3	0
		17	-1 0 2	

$$c_2 - z_2 = -1 - (1 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

$$c_4 - z_4 = -(1 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$c_6 - z_6 = -(1 \quad 0 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

故 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{3}, \max z = 17$ 是最优解。

例 3.5 用改善单纯形表格解

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 - 2x_6 \\ \text{s. t.} \quad &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 6 \\ &2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_8 = 4 \\ &x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + x_9 = 4 \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \end{aligned}$$

$c_5 - z_5 = 4 > 0$, 选 x_5 进入基变量改善单纯形表格见表 3.6。

表 3.6

x_B	C_B	b	B^{-1}	a_5	p_5	β
x_7	0	6	1 0 0	1	1	6
x_8	0	4	0 1 0	0	0	
x_9	0	4	0 0 1	2	②	②
		0	0 0 0			

消元得

x_B	C_B	b	B^{-1}	p_5
x_7	0	4	1 0 -1/2	0
x_8	0	4	0 1 0	0
x_5	4	2	0 0 1/2	1