



第3章

离散傅里叶变换

3.1 重点与难点

离散傅里叶变换(DFT)是数字信号处理中的核心内容。因为通过 DFT 使信号在频域离散化,从而使得计算机在频域进行信号处理成为可能,而且 DFT 有多种快速算法,可使信号处理速度大大提高。可以说,凡是利用快速信号处理的领域都可能用到 DFT。

本章重点: 离散傅里叶变换的定义、性质,DFT 和 Z 变换的关系,DFT 的物理意义,频域采样理论及 DFT 在信号频谱分析、快速卷积等方面的应用。

本章难点: DFT 的引出,DFT 的共轭对称性,频域采样理论,用 DFT 进行谱分析的误差问题。

3.2 内容提要

3.2.1 傅里叶变换的几种形式

在学习离散傅里叶变换(DFT)之前,先对傅里叶变换的 4 种形式的变换表达式及特点作如下归纳,如表 3-1 所示。

表 3-1 4 种傅里叶变换形式的归纳

名称	变换表达式	时间函数	频率函数
连续傅里叶变换(FT)	$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$	连续和非周期	非周期和连续

续表

名称	变换表达式	时间函数	频率函数
傅里叶级数(FS)	$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$	连续和周期(T_p)	非周期和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)
序列的傅里叶变换(DTFT)	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	离散(T)和非周期	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和连续
离散傅里叶变换(DFT)	$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$	离散(T)和周期(T_p)	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$)和离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$)

要点：

- (1) 时域和频域变换的一般规律是，一个域的离散对应另一个域的周期延拓，一个域的连续必定对应另一个域的非周期。
- (2) 讨论离散傅里叶变换(DFT)，要从周期序列的离散傅里叶级数(DFS)入手。

3.2.2 离散傅里叶级数(DFS)

1. DFS 的定义

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$
$$\tilde{x}(n) = \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

式中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $\tilde{X}(k)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 均为周期为 N 点的周期序列。周期序列与有限长序列有着本质的联系。

要点：周期序列不存在 Z 变换和序列傅里叶变换(DTFT)。

2. DFS 的性质

- (1) 线性

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k), \quad \text{DFS}[\tilde{y}(n)] = \tilde{Y}(k)$$

则

$$\text{DFS}[a \tilde{x}(n) + b \tilde{y}(n)] = a \tilde{X}(k) + b \tilde{Y}(k)$$

其中 a, b 为任意常数。

(2) 移位特性

设

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

则

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk} \tilde{X}(k)$$

(3) 周期卷积

若

$$\tilde{F}(k) = \tilde{X}(k) \tilde{Y}(k)$$

则

$$\tilde{f}(n) = \text{IDFS}[\tilde{F}(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m)$$

要点：只有同周期的两个周期序列才能进行周期卷积，且卷积后周期不变。

3.2.3 离散傅里叶变换

1. 周期序列与有限长序列的关系

设 $x(n)$ 为有限长序列，长度为 N 。我们把它看成周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期（取主值），而把周期序列 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓，即

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

2. DFT 的定义

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

要点：DFT 适用于有限长序列， $x(n)$ 和 $X(k)$ 只有 N 个值，但隐含周期性。

3. DFT 和 Z 变换的关系

$$X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \text{DFT}[x(n)]$$

即

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

上式说明， $X(k)$ 是 Z 变换在单位圆上的 N 点等间隔采样，也可以看作序列 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样，其采样间隔为 $\omega = \frac{2\pi}{N}$ ，这就是 DFT

的物理意义。DFT 与 Z 变换以及序列傅里叶变换 DTFT 的关系如图 3-1 所示。

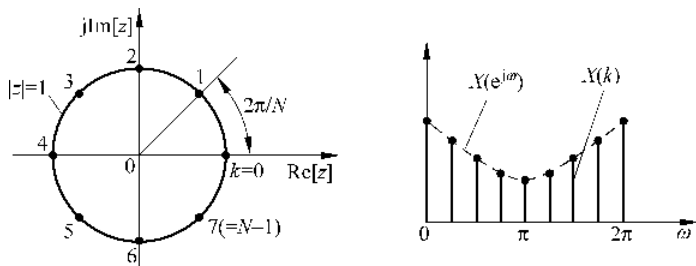


图 3-1 DFT 与 Z 变换以及 DTFT 的关系

4. DFT 的性质

(1) 线性

$$\text{DFT}[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

式中, a, b 为任意常数。该式可根据 DFT 定义证明。若两个序列长度不等, 取长度最大者, 将短的序列通过补零加长, 注意此时 DFT 与未补零的 DFT 不相等。

(2) 圆周移位

① 圆周移位定义

$$y(n) = x((n+m))_N \cdot R_N(n)$$

② 时域圆周移位定理

$$Y(k) = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

③ 频域圆周移位定理

若 $Y(k) = X((k+l))_N \cdot R_N(k)$, 则

$$\text{IDFT}[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

(3) 圆周卷积

若 $Y(k) = X_1(k) X_2(k)$, 则

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

或

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n)$$

上式所表示的运算称为圆周卷积(也叫循环卷积), 通常简记为 $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$ 。

(4) 共轭对称性

DFT 的共轭对称性可概括为图 3-2。

注意以下几个问题:

(1) DFT 的共轭对称性的推导利用了共轭复序列 $x^*(n)$ 的性质:

$$\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$$

$$\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$$

(2) 这里讨论的 DFT 对称性是关于序列区间中心 $N/2$ 点的对称, 称为圆周对称, 而在第 2 章讨论的序列傅里叶变换 DTFT 的对称性是指关于坐标原点的对称性。两者对称序列的定义见表 3-2。

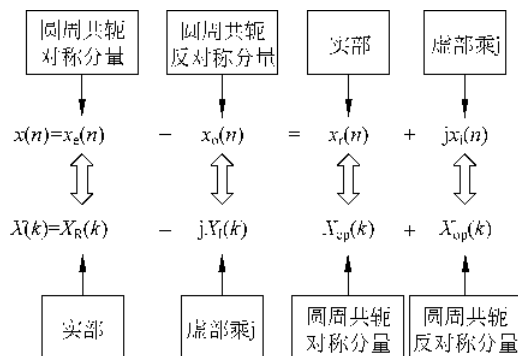


图 3-2 序列的两种表示与其 DFT 的对应关系示意图

表 3-2 DFT 和 DTFT 中的对称序列定义

名 称	DFT 中的对称序列	名 称	DTFT 中的对称序列
圆 周 共 轭 对 称 序 列	$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$	共轭对称序列	$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$
圆 周 共 轭 反 对 称 序 列	$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$	共轭反对称序列	$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$
满足的关系	$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n)$ $x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n)$	满足的关系	$x_e(n) = x_e^*(-n)$ $x_o(n) = -x_o^*(-n)$

(3) 任何有限长序列 $x(n)$ 有两种表示：

① 表示成圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 之和，即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

② 表示为实部 $x_r(n)$ 及虚部 $jx_i(n)$ 之和，即

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

这两种表示所对应的 DFT 特点如图 3-2 所示。

(4) 若 $x(n)$ 是实序列，则 $X(k)$ 只有圆周共轭对称分量。即满足

$$X(k) = X^*(N-k)$$

若 $x(n)$ 是纯虚序列，则 $X(k)$ 只有圆周共轭反对称分量，即满足

$$X(k) = -X^*(N-k)$$

结论：以上这两种情况，只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了，另一半可利用对称性求得。

3.2.4 频域采样理论

类似于时域采样定理，频域采样定理包括以下内容：

1. 频域采样

对一个任意的绝对可和的序列 $x(n)$ 的 $X(z)$ 在单位圆上进行等距离采样，得到

$$X(k) = X(z) \big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{nk}$$

对于 M 点的有限长序列 $x(n)$, 频域采样不失真的条件是频域采样点数 N 要大于或等于时域序列长度 M (时域采样点数), 即满足

$$N \geq M$$

此时可得到

$$x_N(n) = \tilde{x}_N(n)R_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)R_N(n) = x(n), \quad N \geq M$$

这一概念非常重要, 通过频域采样得到频域函数在 $[0, 2\pi]$ 上均匀采样的 N 点, 再对其进行 N 点 IDFT, 得到的序列是原序列以 N 为周期进行周期延拓后的主值序列。若不产生时域混叠现象, 则采样点数就必须满足一定的关系, 即 $N \geq M$, 此时才可由频域采样值 $X(k)$ 恢复出原序列 $x(n)$, 这就是频域采样定理。

比较时域采样定理: 一个频带有限的信号可以进行时域采样而不产生频域混叠现象, 条件是采样频率 $f_s \geq 2f_c$ 。其中 f_c 为信号最高频率。

2. 频域恢复——频域内插公式

如果频域采样满足频域采样定理, 则可以用频率采样值恢复序列的 Z 变换:

$$X(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

这就是用 N 个频域采样值来恢复 $X(z)$ 的内插公式。它可以表示为

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(z)$$

其中

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

称为内插函数。

同样, 频率响应的内插公式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

其中 $\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$ 为内插函数。

频域内插函数 $\Phi(\omega)$ 的幅度特性如图 3-3 所示。可以看出满足

$$\Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) = \begin{cases} 1, & \omega = \frac{2\pi k}{N} \\ 0, & \omega = \frac{2\pi i}{N}, \quad i \neq k \end{cases}$$

整个 $X(e^{j\omega})$ 就是由 N 个 $\Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$ 函数被 N 个 $X(k)$ 加权求和构成。很明显, 在每个采样点上 $X(e^{j\omega})$ 的值精确等于 $X(k)$, 即 $X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = X(k), k=0, 1, \dots, N-1$, 而各采样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 值, 则由各采样点的加权内插函数 $X(k)\Phi\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$ 在所求 ω 点上的值的叠加而得, 如图 3-4 所示。

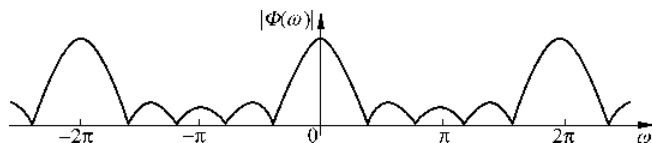
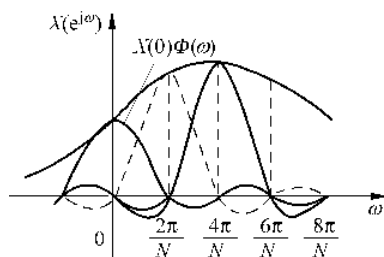
图 3-3 内插函数幅度特性 ($N=5$)

图 3-4 由内插函数求频率响应的示意图

表 3-3 给出了频域与时域采样恢复的比较,可以看到时域采样与频域采样的内在关系,它们具有某种对偶关系。

表 3-3 频域与时域采样恢复的比较

	时域角度	频域角度
时域采样的恢复	内插 $x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(nT) \varphi_n(t)$ 其中,内插函数为 $\varphi_n(t) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t-nT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$	加低通,频域截断 $X(j\Omega) = \hat{X}_s(j\Omega) \cdot G(j\Omega)$ 其中,理想低通为 $G(j\Omega) = \begin{cases} T, & \Omega < \Omega_s/2 \\ 0, & \Omega \geq \Omega_s/2 \end{cases}$
频域采样的恢复	加矩形窗,时域截断 $x_N(n) = \tilde{x}_N(n) R_N(n)$	内插 $X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \Phi_k(z)$ 其中,内插函数为 $\Phi_k(z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

3.2.5 用 DFT 计算线性卷积

1. 用圆周卷积计算线性卷积的条件

两个有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 其中

$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}, \quad x_2(n) = \begin{cases} x_2(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

有

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1(n+rL) \right] R_L(n)$$

即 L 点圆周卷积 $y_c(n)$ 是线性卷积 $y_1(n)$ 以 L 为周期的周期延拓序列的主值序列。

圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是

$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

要点:

(1) 线性卷积的对象可以是有限长或无限长非周期序列。若两个序列长度分别为 N_1 和 N_2 , 则卷积后的序列长度为 $L = N_1 + N_2 - 1$ 。

(2) 圆周卷积的对象是两个同长度(若长度不同, 可用补零的方法达到相同长度)的有限长序列, 并且圆周卷积的结果也是具有同一长度的有限长序列。

2. 用圆周卷积计算线性卷积的方法

用圆周卷积计算线性卷积的实现框图如图 3-5 所示。

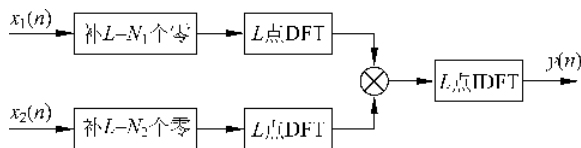


图 3-5 圆周卷积代替线性卷积的实现框图

图中, $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 并且 DFT 与 IDFT 子程序可以共用, 而且通常用快速算法 (FFT) 来实现, 故圆周卷积也称为快速卷积。

3.2.6 用 DFT 进行频谱分析

1. 利用 DFT 对连续非周期信号进行谱分析

由 $X_a(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$, 可推得

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot \text{DFT}[x(n)]$$

由 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df$, 可推得

$$x(n) = x_a(nT) = F \sum_{k=0}^{N-1} X_a(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{T} \text{IDFT}[X_a(k)]$$

上面两式分别说明连续非周期信号的频谱可以通过对连续信号采样后进行 DFT 并乘以系数 T 的方法来近似得到, 而对该 DFT 值做反变换并除以系数 $\frac{1}{T}$ 就得到时域采样信号。

有关参数公式为

$$F = \frac{1}{T_p} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT}; \quad T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{NF} = \frac{T_p}{N}$$

式中, T 为时域采样间隔, 即时间分辨率; F 为频域抽样间隔, 即频率分辨率。 N 为采样点数, T_p 为信号的记录长度。

2. 用 DFT 进行谱分析的误差问题

用 DFT 逼近连续非周期信号的傅里叶变换过程中除了对幅度的线性加权外, 由于用到了采样与截断的方法, 因此也会带来一些可能产生的问题, 使谱分析产生误差。如: 混叠效应、截断效应、栅栏效应等。

(1) 混叠效应

利用 DFT 对连续时间信号进行谱分析, 首先要对连续时间信号进行采样。为避免混叠失真, 要求满足采样定理: $f_s \geq 2f_c$, f_s 为采样频率, f_c 为信号最高频率 (即谱分析范围)。注意并不是 f_s 越高越好, 它还要受采样间隔 F 的约束。

$$F = \frac{f_s}{N} \geq 2 \frac{f_c}{N}$$

在采样点数 N 给定时, 一味提高采样频率 f_s , 必然导致 F 增加, 即频率分辨力下降; 反之, 若要提高频率分辨力即减小 F , 则导致减小 f_s , 最终必须减小信号的高频容量 f_c 。

在 f_c 与 F 参数中, 保持其中一个不变而使另一个性能得以提高的唯一办法, 就是增加记录长度内的点数 N 。记录长度 T_p 和 N 可以按照 $N > 2 \frac{f_c}{F}$, $T_p \geq \frac{1}{F}$ 两式进行选择。

(2) 截断效应

在实际中, 要把观测的信号 $x(n)$ 限制在一定的时间间隔之内, 即采取截断数据的过程。时域的截断在数学上的意义为原连续时间信号乘上一个窗函数, 使原连续时间函数成为两端突然截断, 中间为原信号与窗函数相乘的结果。时域两函数相乘, 在频域是其频谱的卷积。由于窗函数不可能取无限宽, 即其频谱不可能为一冲激函数, 信号的频谱与窗函数的卷积必然产生展宽和拖尾现象, 造成频谱泄漏和谱间干扰, 这就产生了截断效应。为了减小截断效应的影响, 截断时要根据具体的情况, 选择适当形状的窗函数, 如汉宁窗或海明窗等。

(3) 栅栏效应

由于 DFT 是有限长序列的频谱等间隔采样所得到的样本值, 这就相当于透过一个栅栏去观察原来信号的频谱, 因此必然有一些地方被栅栏所遮挡, 这些被遮挡的部分就是未被采样到的部分, 这种现象称为栅栏效应。

但要注意, 由于栅栏效应, 使得被分析的频谱变得较为稀疏, 为此, 在采样样本序列 $x(n)$ 后面补零, 在数据长度 T_p 不变的情况, 可以改变频谱的频率取样密度, 得到高密度频谱。但因在 $x(n)$ 后面补零并没有增加新的信息量, 改善的仅是栅栏效应。所以补零是不能提高频率分辨率的, 即得不到高分辨率谱。

3. DFT 参数选择的一般原则

(1) 确定信号的最高频率 f_c 后, 为防止混叠, 采样频率 $f_s \geq (3 \sim 6)f_c$;

(2) 根据实际需要, 即根据频谱的“计算分辨率”需要确定频率采样两点之间的间隔 F , F 越小频谱越密, 计算量也越大;

(3) F 确定后,就可确定做 DFT 所需的点数 N ,即 $N = \frac{f_s}{F}$

为了使用后面一章将要介绍的基 2-FFT 算法,一般取 $N = 2^M$ 。

(4) f_s 和 N 确定后,则可确定所需的数据长度,即 $T_p = \frac{N}{f_s} = NT_s$ 。

要点:

$F = \frac{f_s}{N}$ 称为“计算分辨率”,即该分辨率是靠计算得出的,但它并不能反映真实的频率

分辨能力。 $F = \frac{1}{T_p}$ 称为“物理分辨率”,数据的有效长度越大,频率分辨能力越强。

3.3 典型例题分析

例 3-1 $x(n)$ 为长为 N 的有限长序列, $x_e(n)$, $x_o(n)$ 分别为 $x(n)$ 的圆周共轭偶部及奇部, 也即

$$x_e(n) = x_e^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_o(n) = -x_o^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

证明: $\text{DFT}[x_e(n)] = R_e[X(k)]$, $\text{DFT}[x_o(n)] = j\text{Im}[X(k)]$

分析: 利用共轭复序列 $x^*(n)$ 的性质: $\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$, $\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$ 。

证明:

$$\text{DFT}[x_e(n)] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n)] + \frac{1}{2}\text{DFT}[x^*(N-n)]$$

$$= \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(k) = R_e[X(k)]$$

$$\text{DFT}[x_o(n)] = \frac{1}{2}X(k) - \frac{1}{2}X^*(k) = j\text{Im}[X(k)]$$

例 3-2 已知 $x(n)$ 是长为 N 的有限长序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零点, 得到一长为 rN 的有限长序列 $y(n)$:

$$y(n) = \begin{cases} x(n/r), & n = ir, \quad i = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

求 $\text{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

分析: 离散时域信号每两点插入 $r-1$ 个零值, 相当于频域以 N 为周期延拓 r 次, 即 $Y(k)$ 周期为 rN 。

解: 因为

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

可得

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{rN-1} y(n)W_{rN}^{kn} = \sum_{i=0}^{N-1} x(ir/r)W_{rN}^{kir} = \sum_{i=0}^{N-1} x(i)W_N^{ki}, \quad 0 \leq k \leq rN-1$$

即

$$Y(k) = X((k))_{rN} R_{rN}(k)$$

所以 $Y(k)$ 是将长为 N 的有限长序列 $X(k)$ 延拓 r 次形成的, 即 $Y(k)$ 的周期是 rN 。

例 3-3 已知一个有限长序列为 $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$

(1) 求它的 10 点离散傅里叶变换 $X(k)$;

(2) 已知序列 $y(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换为 $Y(k) = W_{10}^{2k} X(k)$, 求序列 $y(n)$;

(3) 已知序列 $g(n)$ 的 10 点离散傅里叶变换为 $G(k) = X(k)Y(k)$, 求序列 $g(n)$ 。

分析: 利用时域圆周移位定理 $x((n+m))_N R_N(n) \leftrightarrow W_N^{-mk} X(k)$

$$\begin{aligned} \text{解: (1) } X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^9 [\delta(n) + 2\delta(n-5)]W_{10}^{nk} \\ &= 1 + 2W_{10}^{5k} = 1 + 2(-1)^k, k = 0, 1, \dots, 9 \end{aligned}$$

(2) 由 $Y(k) = W_{10}^{2k} X(k)$ 可知, $y(n)$ 是 $x(n)$ 向右循环移 2 位的结果, 即

$$y(n) = x((n-2))_{10} R_{10}(n) = \delta(n-2) + 2\delta(n-7)$$

或者由

$$Y(k) = W_{10}^{2k} X(k) = W_{10}^{2k} (1 + 2W_{10}^{5k}) = W_{10}^{2k} + 2W_{10}^{7k}$$

所以

$$\text{IDFT}[Y(k)] = \delta(n-2) + 2\delta(n-7)$$

$$\begin{aligned} \text{(3) 因为 } G(k) &= X(k)Y(k) = (1 + 2W_{10}^{5k})(W_{10}^{2k} + 2W_{10}^{7k}) = W_{10}^{2k} + 2W_{10}^{7k} + 2W_{10}^{7k} + 4W_{10}^{2k} \\ &= 5W_{10}^{2k} + 4W_{10}^{7k} \end{aligned}$$

所以

$$g(n) = 5\delta(n-2) + 4\delta(n-7)$$

例 3-4 已知序列 $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 若计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 试分析结果中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是多少?

分析: 本题首先要理解 L 点圆周卷积是线性卷积以 L 为周期的延拓序列的主值序列, 圆周卷积等于线性卷积而不产生混叠失真的充要条件是 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 。否则, 就会产生混叠失真。做题时, 最好画出分析示意图, 可便于理解。

解: $x(n)$ 的长度为 120 点, 序列 $y(n)$ 的长度为 185 点, 故 $x(n) * y(n)$ 的长度为

$$N = N_1 + N_2 - 1 = 304$$

因为计算 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 256 点圆周卷积, 即 $L = 256$, 所以混淆的长度为 $N - L = 304 - 256 = 48$, 当线性卷积以 $L = 256$ 为周期延拓形成圆周卷积序列时, 一个周期内在 $n = 0$ 到 $n = N - L - 1 = 304 - 256 - 1 = 47$ 这些点处发生混叠, 则 256 点圆周卷积中相当于 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的线性卷积的范围是 $48 \sim 255$ 。

其分析示意图如图 3-6 所示。

例 3-5 已知两个 N 点实序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的 DFT 分别是 $X(k)$ 和 $Y(k)$, 试设计用一次 N 点 IDFT 就可得出 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的计算方法。

分析: 本题要运用实序列的 FFT 算法思路来解。可考虑用 $X(k)$ 和 $Y(k)$ 构造一个