第 1 章 零部件的静力分析

机械在工作时,组成它的零部件会受到外力的作用。例如,车床在车削工件时车刀将受力,传动带机构工作时传动带将受力,齿轮机构工作时轮齿将受力,如图 1-1 所示。所以,机械在设计和制造过程中都必须考虑力学问题。零部件的静力分析主要研究物体在力系作用下的平衡规律,包括物体的受力分析、力系的简化与平衡条件。

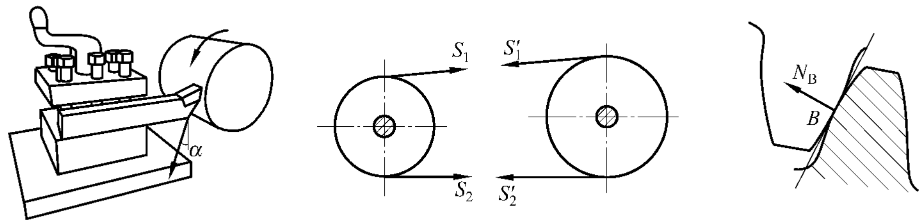


图 1-1 零部件的受力
(a) 车刀受力;(b) 传动带受力;(c) 轮齿受力

平衡是指物体相对于惯性参考系处于静止或匀速直线运动状态。当物体受多个外力作用时,物体处于平衡状态,则这多个力为平衡力。如物体在一力系作用下保持平衡状态,则该力系为平衡力系。

静力学中,常将研究的物体抽象为理想化的力学模型,即刚体。刚体是指在力作用下变形可忽略不计的物体。对于刚体,力的作用只改变其运动状态。

◆ 知识目标

① 明确力的概念及性质。
② 理解力的投影与合力投影定理。
③ 了解力矩、力偶、力的平移的基本概念。
④ 明确约束和约束力的概念。
⑤ 会零部件受力分析,并能正确画出受力图。
⑥ 会应用平衡方程求解简单的特殊平面力系的平衡问题。

◆ 技能目标

初步具有运用静力学基本原理解决机械工程中简单力学问题的能力。

1.1 静力分析基础

1.1.1 力的概念及性质

1. 力的概念

(1) 力

力是物体间相互的机械作用，力的作用效果是使物体的运动状态发生变化，或使物体的形状发生变化。如打乒乓球时，乒乓球受力后运动状态发生改变，这种使物体运动状态发生变化的效应称为力的外效应；人们用力拉弹簧，弹簧受力拉伸变形，这种使物体产生变形的效应称为力的内效应。

(2) 力的三要素

力对物体的作用效果是由力的大小、方向和作用点三个要素决定的。力是矢量，具有大小和方向。力的单位以“牛顿”(N)或“千牛”(kN)表示。

力的三要素用带箭头的有向线段表示于物体的作用点上，如图 1-2 所示，这种方法叫做力的图示法。矢量的长度按一定的比例表示力的大小，箭头的指向表示力的方向，线段的起点或终点表示力的作用点。通过作用点，沿着力的方向引出的直线，称为力的作用线。例如，小车受到 300N 的推力，可用如图 1-2 所示的有向线段来表示。

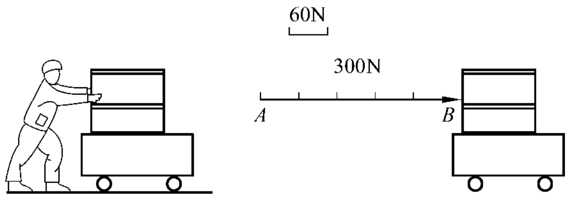


图 1-2　力的示意图

2. 力的性质

公理 1：二力平衡公理

书放在桌面上，受到重力 G 和桌面的支持力 N 而处于平衡状态，很显然，$G=-N$，即两力等值、反向、共线。

由此可得到二力平衡公理：刚体只受两个力作用而处于平衡时，这两个力必须等值、反向，且作用在同一直线上，如图 1-3 所示。

只有两个着力点而处于平衡的物体称二力构件。当构件呈杆状时，则称二力杆。如图 1-4 所示的二力杆 AB 处于平衡状态，则作用在杆 AB 上的两个力 F_A 和 F_B 等值、反向，并在两力作用点的连线上。

公理 2：加减平衡力系公理

加减平衡力系公理：在作用着已知力系的刚体上，加上或减去任一平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效果，如图 1-5(a)、(b)所示。

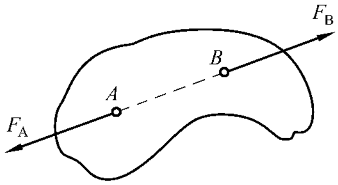


图 1-3　二力平衡公理

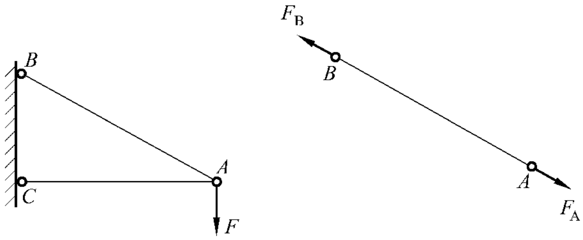
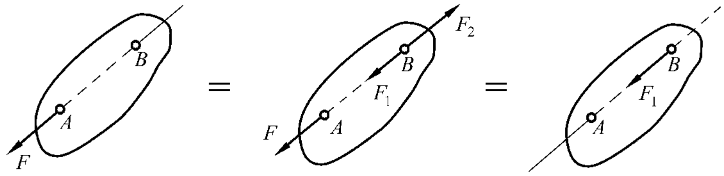


图 1-4　二力杆 AB 受力状况

推论 1：力的可传性原理

力的可传性原理是作用于刚体上某一点的力可沿其作用线移到刚体上任意一点，而不会改变原力系对刚体的作用效应。如图 1-5(c)所示，力 F 作用在刚体上 A 点和作用在刚体上 B 点效果是一样的。



(a)　(b)　(c)

图 1-5　加减平衡力系公理

公理 3：平行四边形公理

平行四边形公理：作用于物体上同一点的两个力的合力也作用于该点，合力的大小和方向由这两个力为邻边所构成平行四边形的对角线来确定。如图 1-6 所示，作用于物体 O 点的两个力 F_1 和 F_2 的合力为 F，也可用矢量式表示为

$$F = F_1 + F_2 \tag{1-1}$$

推论 2：三力平衡汇交定理

若作用于物体同一平面上的三个力互不平行，且使物体处于平衡时，则此三个力的作用线必汇交于一点，这就是三力平衡汇交定理。

如图 1-7 所示，刚体受 F_1、F_2、F_3 三力作用处于平衡状态，则 F_1、F_2、F_3 必汇交于 O 点。

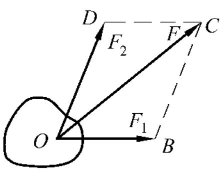


图 1-6　力的平行四边形法则

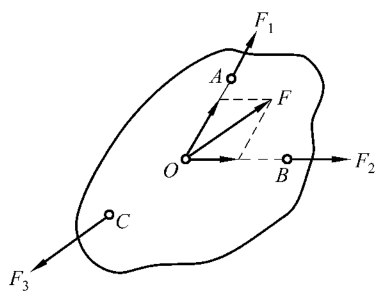


图 1-7　三力平衡汇交力系

公理 4：作用与反作用公理

由牛顿第三定律可知：当物体 A 对物体 B 施加作用力时，B 对 A 具有反作用力。两个物体间的相互作用力，即作用力和反作用力总是同时存在，且等值、反向、沿同一直线，分别作用在这两个物体上。

作用力和反作用力涵盖了自然界中物体之间的相互作用力的关系，说明作用力和反作用力总是成对出现。

如图 1-8(a)所示，将重量为 G 的物体放在桌面上，重物 G 对桌面有作用力 F_{N}，而桌面对重物有反作用力 F'_{N}，作用力作用于桌面，桌面对重物的反作用力则作用于重物。F_{N} 与 F'_{N}是作用力与反作用力关系，两者等值、反向，即 $F_{\mathrm{N}}=-F'_{\mathrm{N}}$（见图 1-8(b)），而重力 G 与桌面对重物的反作用力 F'_{N}构成了两平衡力（见图 1-8(c)）。

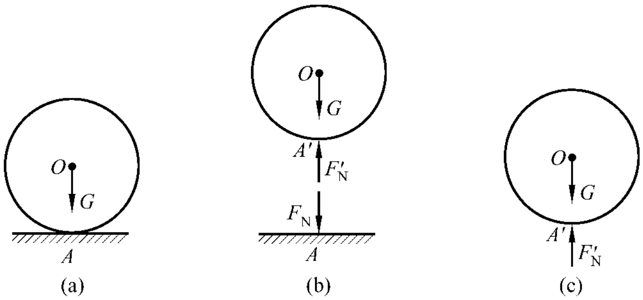


图 1-8　作用力与反作用力

3. 力系

作用在物体上的一群力称为力系。按各作用线的分布情况，力系可分为平面力系（各力的作用线在同一平面内）和空间力系（各力作用线不在同一平面）。这两类力系中，各力的作用线相交于一点的力系，称汇交力系；各力的作用线互相平行的力系，称平行力系；各力的作用线不全交于一点，也不全平行的力系，称一般力系或任意力系。

4. 集中力与分布力

集中力是指作用于一点的力。分布力是指作用在一定范围（长度、面积或体积内）的力。分布在一定长度上的力称为线分布力，也称线分布载荷，其大小用载荷集度 q 表示，其单位为 N/m 或 kN/m。当 q 为常数时，称为均布载荷。如图 1-9 所示梁的 CD 段上作用有载荷集度为 q 的均布载荷，其合力 F_{q} 等于载荷集度 q 与分布长度 l 的乘积，即 $F_{\mathrm{q}}=ql_{\mathrm{CD}}$，合力的作用线通过分布长度的中点，方向与均布载荷方向相同。

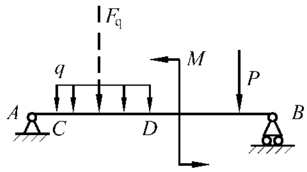


图 1-9　均布载荷

1.1.2　力的投影与合力投影定理

1. 力在坐标轴上的投影

如图 1-10 所示，设在直角坐标系 Oxy 中，α 为矢量 F 与 x 轴的夹角（取锐角）。从 F 的两端 A 和 B 分别作垂直于 x 轴、y 轴的垂线，得线段 ab、$a'b'$，其中 ab 为力 F 在 x 轴的投

影，用 F_x 表示。$a'b'$为力 F 在 y 轴的投影，用 F_y 表示。力的投影是代数量，其正负号规定如下：当 a 到 b(a'到 b')的方向与 x 轴(y 轴)的正方向一致时，力在 x 轴(y 轴)上的投影 F_x(F_y)取正值；反之取负值。

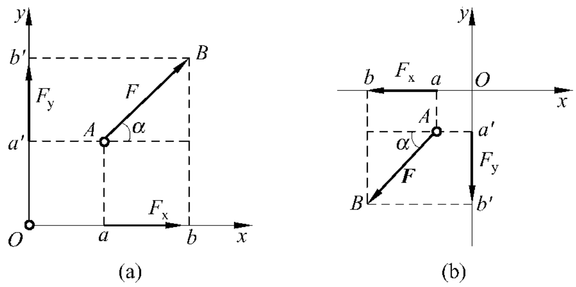


图 1-10　力在坐标轴上的投影

图 1-10(a)所示情况为

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha \\ F_y &= F\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

图 1-10(b)所示情况为

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -F\cos\alpha \\ F_y &= -F\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

反之，若已知力在坐标轴上的投影 F_x、F_y，则力的大小 F 和它与 x 轴所夹的锐角 α 分别为

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan\alpha &= \left|\frac{F_y}{F_x}\right| \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

如果把力 F 沿 x、y 轴分解，得两正交力 F_x、F_y，如图 1-11 所示。

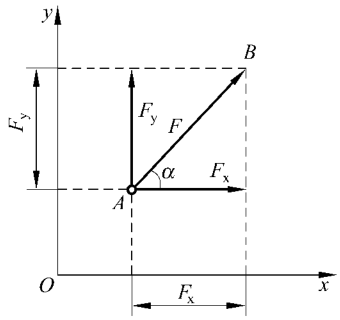


图 1-11　力沿坐标轴分解

2. 合力投影定理

设作用于刚体的平面汇交力系 F_1、F_2、F_3 汇交于 o 点，如图 1-12(a)所示。用作力的多边形法可求出合力 F_R。取坐标轴 Oxy，将合力 F_R 及各力 F_1、F_2、F_3 投影到 x 轴和 y 轴上，它们在 x 轴上的投影分别为 $F_{Rx}=ad$，$F_{1x}=ab$，$F_{2x}=bc$，$F_{3x}=cd$。由图 1-12(b)可知：$ad=ab+bc+cd$，即

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

同理　　$F_{Ry}=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}$

由上述关系可推广到 n 个力组成的平面汇交力系，从而得出合力投影定理：合力在任一坐标轴上的投影等于所有分力在该轴上投影的代数和。

合力投影定理揭示了合力投影与各分力投影的关系，其表达式为

$$\left.\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

并且

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \tag{1-6}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right| \tag{1-7}$$

α 为合力 F_R 与轴所夹的锐角，F_R 的指向要分别根据 $\sum F_x$ 和 $\sum F_y$ 的正负号决定，合力的作用线必通过汇交点。

【例 1-1】 在固定环上套有三根绳，所受拉力分别为 $F_1 = 100\text{N}$，$F_2 = 200\text{N}$，$F_3 = 250\text{N}$，如图 1-13 所示。试用解析法求合力。

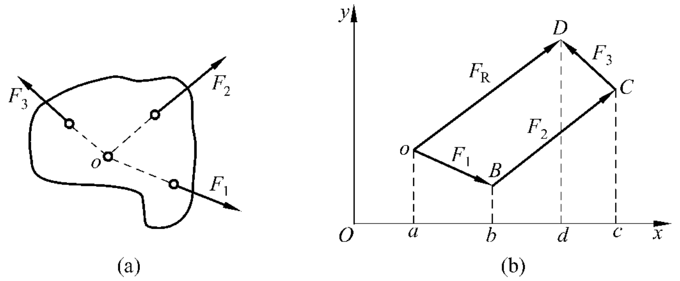


图 1-12 合力投影

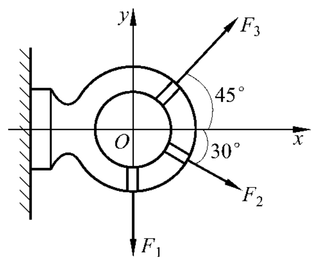


图 1-13 固定环受力

解：取坐标系 Oxy。由式(1-5)分别求出各分力在两坐标轴上投影的代数和。

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 + F_2\cos30° + F_3\cos45° \\ &= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 250 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 349.95\text{N} \\ \sum F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -100 - F_2\sin30° + F_3\sin45° \\ &= -100 - 200 \times \frac{1}{2} + 250 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -23.25\text{N}\end{aligned}$$

由式(1-6)可得合力大小

$$F_R = \sqrt{\sum F_x^2 + \sum F_y^2} = \sqrt{349.95^2 + (-23.25)^2} = 350.72\text{N}$$

由式(1-7)可确定合力的方向为

$$\tan\alpha = \left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right| = \left|\frac{-23.25}{349.95}\right| = 0.066$$

即 $\alpha = 3.80°$(α 为合力 F_R 与 x 轴正向之间的夹角)。

因 $\sum F_x$ 为正值，$\sum F_y$ 为负值，所以合力 F_R 在第四象限，其作用线通过三个分力的汇交点。

1.1.3 力矩与合力矩定理

1. 力对点的矩

用扳手转动螺母时可发现，螺母能否旋动，既与作用在扳手上的力 F 有关，也与点 O 到 F 的作用线的垂直距离有关，如图 1-14 所示。力对点之矩是力使物体绕某点转动效应的度量。力 F 使刚体绕某点 O 转动的效应，不仅与力 F 的大小成正比，而且与 O 点至力作用线

的垂直距离 d 成正比。乘积 Fd 加上适当的正负号，称为力 F 对 O 点的矩，简称力矩，记作

$$M(F)=\pm Fd \tag{1-8}$$

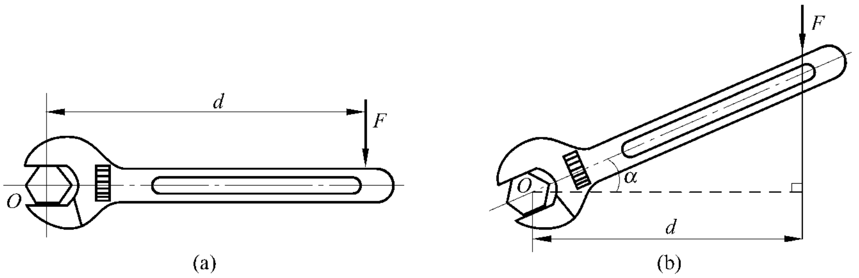


图 1-14　力矩

图 1-14 中 O 点称矩心。矩心 O 到力 F 作用线的垂直距离称力臂。力矩在下列两种情况下为零：①力等于零；②力臂等于零，即力的作用线通过矩心。一般规定力使刚体绕矩心做逆时针方向转动时，力矩为正，反之为负。在国际单位制中，力矩单位为牛顿·米(N·m)。

2. 合力矩定理

平面汇交力系的合力对平面内任一点的矩，等于力系中所有各分力对于该点力矩的代数和，即

$$M_O(F)=M_O(F_1)+M_O(F_2)+\cdots+M_O(F_n)=\sum M_O(F_i) \tag{1-9}$$

提示：

① 求力对点之矩时，应首先确定矩心，再由矩心向力的作用线作垂线求出力臂，根据力矩公式进行计算。

② 计算力矩时应注意正负号，力使刚体绕矩心做逆时针方向转动时，力矩为正，反之为负。

【例 1-2】 已知力 F 作用点 A 的坐标 a 和 b，如图 1-15 所示。试求力 F 对坐标原点的矩，证明合力矩定理的正确性。

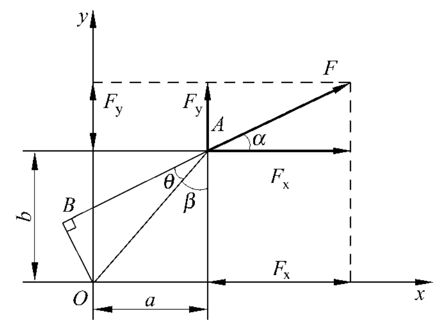


图 1-15　分力对点的矩

解：

① 用力矩定义求力 F 对点的矩，先求力 F 对 O 点的力臂 OB。

因为 $\theta=90^\circ-\alpha-\beta$，$OA=\sqrt{a^2+b^2}$，$\sin\beta=a/\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\beta=b/\sqrt{a^2+b^2}$，所以

$$\begin{aligned}OB&=OA\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\beta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\&=b\cos\alpha-a\sin\alpha\end{aligned}$$

即有

$$M_O(F)=-F\cdot OB=-Fb\cos\alpha+Fa\sin\alpha$$

② 用合力矩定义求力 F 对 O 点的矩，将力 F 分解为 F_x、F_y 两个分力，则力矩 $M_O(F_x)$、

$M_O(F_y)$分别为

$$M_O(F_x) = -F_x b = -Fb\cos\alpha$$
$$M_O(F_y) = F_y a = Fa\sin\alpha$$

即有

$$M_O(F) = M_O(F_x) + M_O(F_y)$$

可证明合力矩定理的正确性。

1.1.4 力偶及其性质

1. 力偶和力偶矩

(1) 力偶

大小相等、方向相反、作用线平行但不共线的两个力，称为力偶。如图1-16所示的用板牙攻螺纹和双手转动汽车转向盘等，都是施加力偶的例子。力偶用符号(F,F')表示。力偶的两力作用线之间的垂直距离d称为力偶臂。

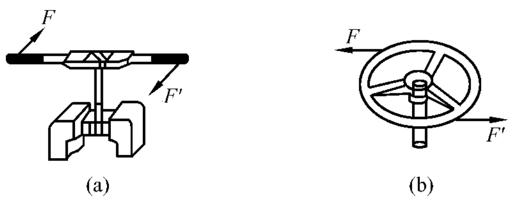


图1-16 力偶

(a) 板牙攻螺纹；(b) 双手转动汽车转向盘

(2) 力偶矩

力偶对物体作用效果的大小，与力F的大小成正比，又与力偶臂d的大小成正比，由此，可用Fd来度量力偶作用效果的大小，Fd称为力偶矩(见图1-17)。

力偶(F,F')的力偶矩，以符号$M_O(F,F')$表示，或简写为m，则

$$m = \pm Fd \tag{1-10}$$

力偶矩的大小等于力的大小与力偶臂的乘积，正、负号表示力偶的转向(规定逆时针为正，顺时针为负)。力偶的单位与力矩的单位相同。

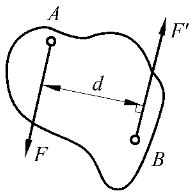


图1-17 力偶矩

2. 力偶的性质

① 力偶中两力所在平面称力偶作用面。力偶对物体不能产生移动效应，即力偶无合力，力偶不能与力等效，也不能用一力来平衡，力偶只能用力偶来平衡。力和力偶是组成力系的两个基本要素。

② 本章讨论的是平面力偶，对平面力偶，力偶对物体的转动效应完全取决于力偶矩的大小和力偶的转向，与矩心无关。

③ 如果力偶对物体的作用，可用另一力偶来代替，则这两个力偶称为等效力偶。若两个在同平面内的力偶，力偶矩相等，则这两个力偶彼此等效。

3. 平面力偶系的合成

作用在物体同一平面内的一组力偶,称为平面力偶系。平面力偶系可以合成为一个合力偶,设 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 为平面力偶系中各分力偶的力偶矩,m 为合力的合力偶矩,则合力偶矩等于各分力偶矩的代数和,即

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum m \tag{1-11}$$

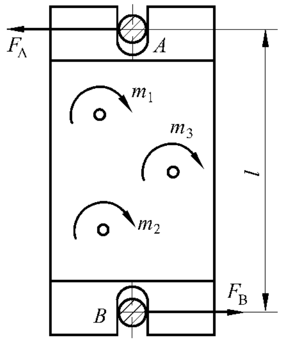


图 1-18 多轴钻床钻孔

【例 1-3】 如图 1-18 所示,用多轴钻床在水平工件上钻孔时,每个钻头的切削刀刃作用于工件上的力在水平面内构成一力偶。已知三个力偶矩分别为 $m_1 = 15\text{N} \cdot \text{m}, m_2 = 18\text{N} \cdot \text{m}, m_3 = 26\text{N} \cdot \text{m}$,试求三个主动力偶的合力偶矩。

解:三个主动力偶的合力偶矩为

$$\begin{aligned} m &= \sum m = -m_1 - m_2 - m_3 = -15 - 18 - 26 \\ &= -59\text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

1.1.5 力的平移

如图 1-19(a)所示,力 F 作用于刚体上 A 点,根据加减平衡力系公理,可平行移到刚体上任一点 O,可在 O 点加上一对大小相等、方向相反、与 F 等值的平行力 F'、F'',作用于 A 点的力 F' 与 F'' 构成了一力偶,即作用在 A 点的力 F 平移到 O 点后,应同时在 O 点加上一力偶,这个力偶称为附加力偶,如图 1-19(c)所示。附加力偶矩的大小及转向与原力 F 对 O 点的力矩相同。即

$$m = m_O(F) = \pm Fd$$

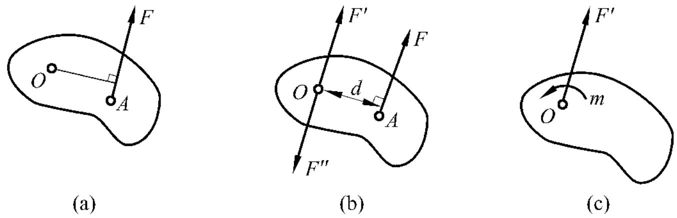


图 1-19 力的平移

根据以上结论,可以分析得知:钳工攻螺纹时,如在手柄的单边加力,则丝锥就容易折断(见图 1-20)。

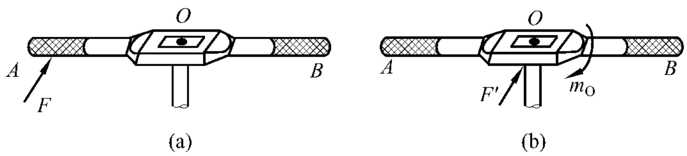


图 1-20 钳工攻螺纹

1.1.6 约束与约束力

1. 约束与约束力的基本概念

(1) 自由体和非自由体

在空间的位移不受任何限制的物体称自由体,如空中的气球等。位移受到限制的物体称非自由体,如挂在绳索上的重物等。

(2) 约束与约束力

对非自由体的位移起限制作用的周围物体称为约束,约束作用于被约束物体上的力称约束力。约束力的作用点就是约束与被约束物体的相互接触点或相互连接点;约束力的方向与该约束所阻碍的运动趋势方向相反。

促使物体运动的力(如切削力、重力、拉力和推力等)称为主动力,其大小和方向通常是已知的。而阻碍物体运动或运动趋势的力,称被动力。约束力是阻碍物体运动的力,属被动力。约束力大小往往是未知的,它们需根据平衡条件计算确定。

2. 工程上常见的约束及其约束力

(1) 柔索约束

由柔软的绳索、传动带和链条等形成的约束称柔索约束(或柔体约束)。柔索约束的约束力作用于接触点,方向沿柔索的中心线背离物体(为拉力),如图 1-21 所示。

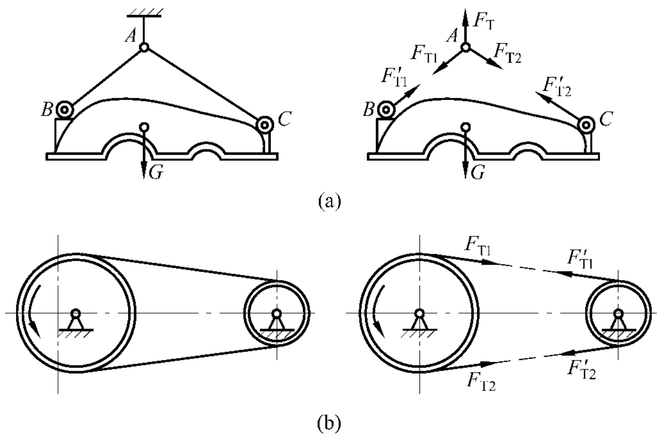


图 1-21 柔索约束

(2) 光滑面约束

当两物体直接接触,如接触面间的摩擦力很小可忽略不计时,这种由光滑接触面构成的约束称光滑面约束。光滑面约束只能阻碍物体沿接触面法线并向约束内部的运动。所以,光滑接触面的约束力必通过接触点,方向沿接触面在该点的公法线且指向受力物体。这类约束力称法向力,如图 1-22 所示。

(3) 光滑圆柱铰链约束

如图 1-23 所示,用圆柱销钉将两个具有相同大小圆柱孔的构件联接在一起,物体 B 的运动受到圆柱销钉 C 的限制,只能转动,不能移动,如果不计销钉与销钉孔壁之间的摩擦,

则这种约束称为光滑圆柱铰链约束，简称铰链约束。

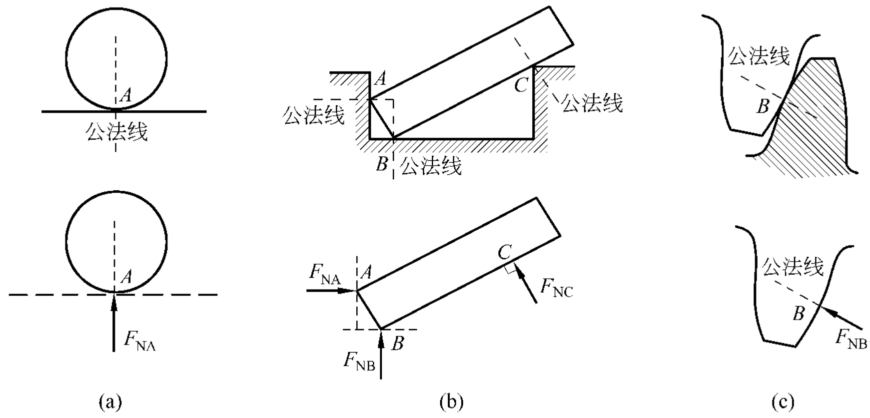


图 1-22　光滑面约束

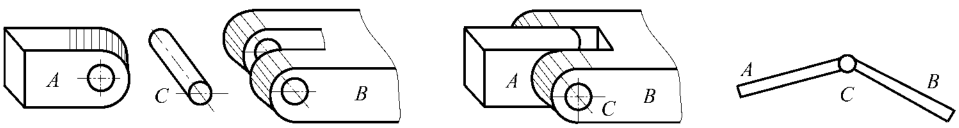


图 1-23　光滑圆柱铰链约束

(4) 铰链支座约束

工程上常用铰链将起重机的支承面与起重臂联接起来，就构成了铰链支座，如图 1-24 所示。常见的铰链支座约束有固定铰链支座和活动铰链支座两种，见表 1-1。

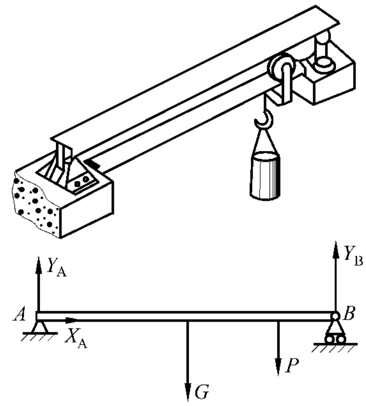
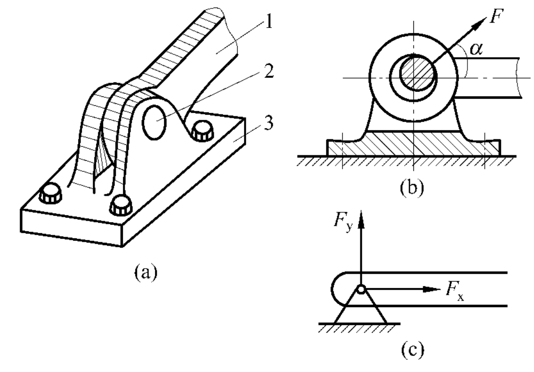
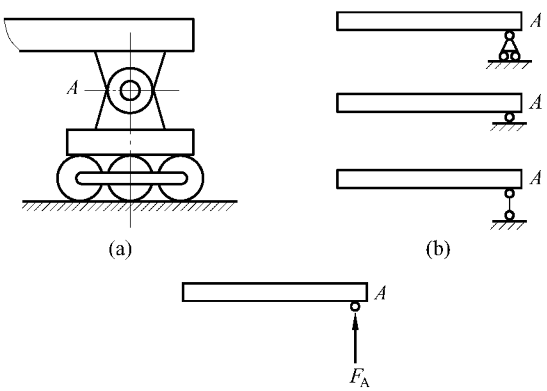


图 1-24　铰链支座约束

(5) 固定端约束

用卡盘夹紧的工件(见图 1-25(a))和固定在刀架上的车刀(见图 1-25(b))属于固定端约束，固定端约束能限制物体在约束处沿任何方向的移动和转动。如图 1-25(c)所示的一端嵌固于墙体内的物体，也属于固定端约束，其受力情况如图 1-25(d)所示，约束力有水平、垂直两个正交分力和一个限制物体转动的约束力偶。

表 1-1　常见铰链约束的特点与应用

类　型	图　　示	约束特点与应用
固定铰链支座约束		圆柱销联接的两构件中，其中一个固定在地面或机架 3 上。圆柱销 2 作用于物体 1 的力通过圆柱销轴心，并垂直于轴线。用通过轴心的两个大小未知的垂直分力 F_x 和 F_y 来表示
活动铰链支座约束		支座中有几个圆柱滚子可沿某一方向滚动。这种支座不能限制物体绕销钉轴线的转动和沿支承面方向的移动，只能限制物体与支承面垂直方向的移动，其约束力必定垂直于支承面且通过铰链中心。工程中常用于房屋、桥梁等结构

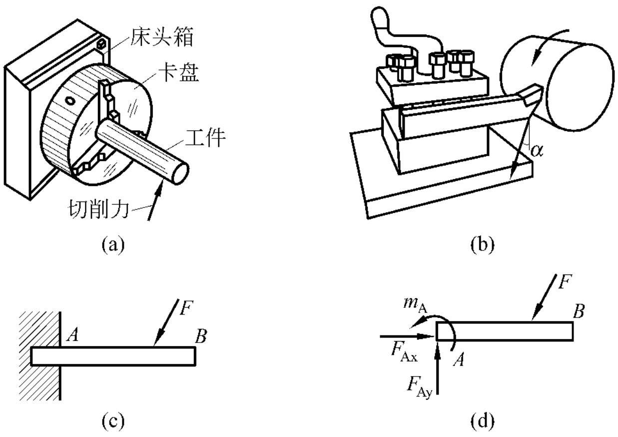


图 1-25　固定端约束

(a) 用卡盘夹紧的工件；(b) 固定在刀架上的车刀；

(c) 一端嵌固于墙体内的物体；(d) 受力图

1.1.7　受力分析和受力图

1. 受力分析

主动力和约束力都是物体受的外力，研究物体的平衡就是研究外力之间的关系。对物体的受力分析就是分析物体受哪些力作用、每个力的作用位置和方向。

2. 受力图

为正确分析物体的受力情况，需把研究的物体（研究对象）从周围的物体中分离出来，单独画出它的简图，这个步骤叫做取研究对象或取分离体；然后画出分离体上所受的力（包括主动力和约束力），这种表示物体受力的简明图形，称为受力图。

3. 物体受力图的画法及步骤

① 确定研究对象。画出研究对象的简单轮廓图形。

② 进行受力分析。分析研究对象上的主动力和约束力。

③ 画出分离体上全部约束力和主动力。画约束力时应取消约束，用约束力代替它的作用。

注意：

① 若机构中有二力构件，应先分析二力构件的受力情况，然后再画出其他物体的受力。

② 凡题中未提及摩擦问题时，接触面视做光滑；凡题中未提及重力问题时，就不计重力。

③ 一对作用力与反作用力要采用同一字母，在其中一个字母上添加“′”以示区别。

【例 1-4】 重为 G 的球，放在与水平面成 45°的光滑斜面上，并用与斜面平行的绳 AB 系住，如图 1-26 所示，试分析球的受力情况，并画出受力图。

解：

① 确定球为研究对象，将球从周围物体中分离出来，单独画出。

② 进行受力分析，球受到重力 G 和绳子 AB 的拉力 F_T。因球受到斜面的约束，如不计摩擦，则均为光滑接触面，故在接触处受斜面的法向约束力 F_N 的作用，方向沿着与斜面接触点的公法线而指向圆心。

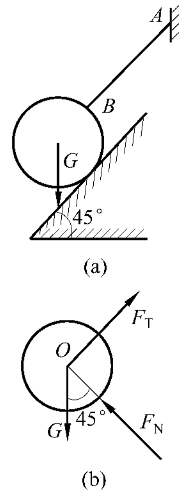


图 1-26　球的受力分析

【例 1-5】 力 F 作用于三铰拱桥，如图 1-27(a)所示。A、B 为固定铰链支座，C 为联接左右半拱的中间铰链，如拱的自重不计，试分别画出拱 AC 和 CB 的受力图。

解：

① 取拱 CB 为研究对象。因 CB 自重不计，在 B、C 两处受到铰链约束，因此拱 CB 为二力杆。约束力 F_C 和 F_B 的方向沿着连线 CB，且等值、反向，如图 1-27(b)所示。

② 取拱 AC 为研究对象。在铰链 C 处受到 BC 的约束力为 F'_C，且 $F'_C=-F_C$。拱在 A 处受到铰链 A 的约束力 F_A 的作用，可用两大小未知的正交分力 F_{Ax} 和 F_{Ay}来代替。分析拱 AC 受力情况，满足三力平衡汇交定理。所以反力 F_A 的作用线必通过力 F'_C与 F 的交点，如图 1-27(c)所示。

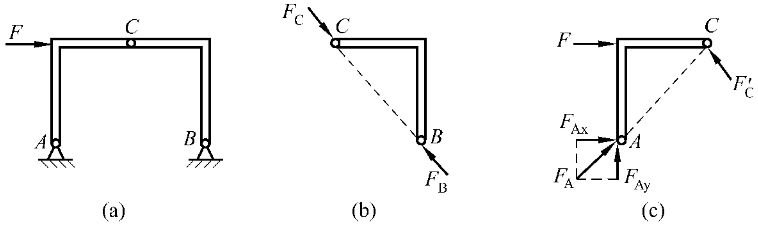


图 1-27　三铰拱桥受力分析

1.2　平衡方程及其应用

1.2.1　平面特殊力系的平衡方程及其应用

1. 平面汇交力系的平衡条件

若平面力系中的各力作用线都汇交于一点，则称平面汇交力系。平面汇交力系平衡的必要与充分条件是力系的合力等于零，即 $F=\sum F_i=0$，此时必须满足

$$\left.\begin{aligned}\sum F_{ix}=0\\ \sum F_{iy}=0\end{aligned}\right\}\tag{1-12}$$

平面汇交力系平衡的条件：力系中各力在两直角坐标轴上投影的代数和分别等于零。式(1-12)称平面汇交力系的平衡方程。

【例 1-6】 如图 1-28 所示，起重机吊起一减速箱盖，箱盖重 $G=200\text{N}$，$\alpha=60°$，$\beta=30°$。求钢丝绳 AB 和 AC 的拉力。

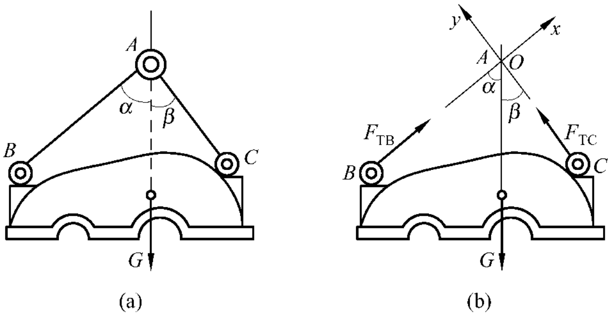


图 1-28　起重机钢丝绳受力

解：取坐标系 Oxy。由式(1-12)分别列出平衡方程如下。

由 $\sum F_{ix}=0$，得

$$F_{TB}-G\cos60°=0 \qquad ①$$

由 $\sum F_{iy}=0$，得

$$F_{TC}-G\cos30°=0 \qquad ②$$

由式 ① 得

$$F_{TB} = G\cos 60^\circ = 200 \times 0.5 = 100\text{N}$$

由式 ② 得

$$F_{TC} = G\cos 30^\circ = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 173.2\text{N}$$

2. 平面力偶系的平衡条件

作用在物体同一平面内的多个力偶，称为平面力偶系。当合力偶矩等于零时，说明物体顺时针方向转动的力偶矩和物体逆时针方向转动的力偶矩相等，物体保持平衡状态。因此，平面力偶系平衡的条件是所有各力偶矩的代数和等于零，即

$$\sum m_i = 0 \tag{1-13}$$

【例 1-7】 如图 1-29 所示的三铰钢架，受力偶矩 m=100N·m 的作用，已知 l=0.5m，试求支座 A 和 B 的约束力。

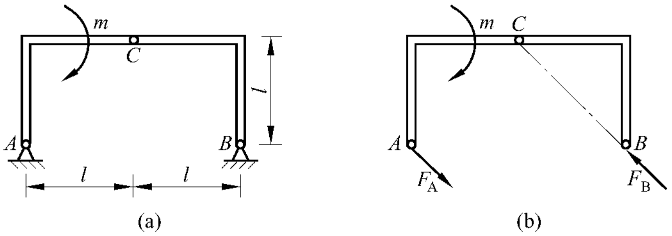


图 1-29　三铰钢架受力

解：取三铰钢架为研究对象。

画出钢架的受力图，如图 1-29(b)所示。构件 BC 为二力构件，所以支座 B 的约束力 F_B 沿 B、C 两点的连线；由于力偶只能用力偶来平衡，所以支座 A 的约束力 F_A 与 F_B 等值、反向、平行，也就是说 F_A 与 F_B 组成一个力偶，并与力偶矩 m 组成平面力偶系。

因此根据题意可列出平衡方程如下：

由 $\sum m_i = 0$，得

$$-m + F_A \times \sqrt{2}l = 0$$

解得

$$F_A = F_B = \frac{m}{\sqrt{2}l} = \frac{100}{\sqrt{2} \times 0.5} = 141.4\text{N}$$

【例 1-8】 如图 1-30 所示的曲柄连杆机构，尺寸如图所示，已知作用在滑块上的力 F=50kN，如不计各构件的自重和摩擦，求作用在曲柄上的力偶矩 m 为多大时可保持平衡。

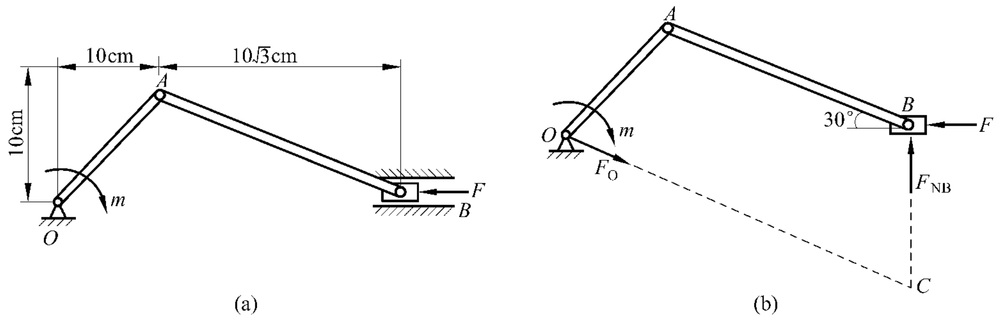


图 1-30　曲柄连杆机构受力

解：取整体为研究对象(见图 1-30(b))，曲柄 OA 受力偶作用，由于力偶只能与力偶平衡，故曲柄 OA 在 O 处的约束力应与 A 处的约束力大小相等、方向相反、平行，也就是说 F_O 平行于连杆 AB。画出整体的受力图，为平面一般力系。对力 F_{NB} 和 F_O 的交点 C 列力矩平衡方程得

$$\sum m_i = 0,\quad F \times CB - m = 0$$

解得
$$m = F\times CB = 50\times(10+10\sqrt{3})\times\tan30° = 788.6\text{kN}\cdot\text{cm} \approx 7.89\text{kN}\cdot\text{m}$$

3. 平面平行力系的平衡方程

平面平行力系是指在平面力系中各力的作用线互相平行的力系。如选坐标 x 轴与各力垂直，则各力在 x 轴上的投影为零，即满足 $\sum F_x = 0$。所以，平面平行力系只有两个独立的平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}\sum F_y &= 0\\ \sum M_O(F) &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}14)$$

通过式(1-14)可求得两个未知量。

式(1-14)中的投影方程也可用力矩方程来代替，可得平面平行力系的二力矩形式的平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}\sum M_A(F) &= 0\\ \sum M_B(F) &= 0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}15)$$

式(1-15)中，A、B 两点连线不能与力系中的各力的作用线平行。

【例 1-9】 如图 1-31 所示为一可沿路轨移动的塔式起重机。机架自重 $G=2500\text{kN}$，作用线通过塔架的中心线，最大起重量 $W=600\text{kN}$，最大悬臂长为 12m，轨道 A、B 的间距为 4m，平衡块重 P，到机身中心线距离为 6m。试求：

① 保证起重机在满载和空载时都不致翻倒的平衡块的重量 P 应为多少？

② 当平衡块的重量 $P=500\text{kN}$ 而起重机满载时，轨道对轮子 A、B 的约束力。

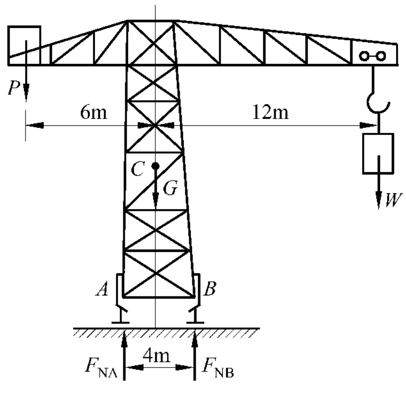


图 1-31　塔式起重机受力分析

解：起重机所受的力有载荷重力 W、机架的重力 G、平衡块的重力 P、轨道的约束力 F_{NA} 和 F_{NB}，要使起重机不翻倒，应使作用在起重机上的所有力满足平衡条件。

① 满载时，为使起重机不绕点 B 翻倒，这些力必须满足平衡方程：$\sum M_B(F) = 0$。在临界情况下(即在轨道 A 即将离开轨道，将翻未翻时)为 $F_{NA}=0$，这时求出的 P 值是所允许的最小值。

$$\sum M_B(F) = 0,\quad P_{\min}\times(6+2) + G\times 2 - W\times(12-2) = 0$$

$$P_{\min} = \frac{10W - 2G}{8} = \frac{10 \times 600 - 2 \times 2500}{8} = 125\text{kN}$$

空载时，$W=0$，为使起重机不绕点 A 翻倒，所受的力必须满足平衡方程：$\sum M_A(F) = 0$。在临界情况下，$F_{NB}=0$，这时求出的 P 值是所允许的最大值。

$$\sum M_A(F) = 0, \quad P_{\max} \times (6-2) - G \times 2 = 0$$

$$P_{\max} = \frac{2G}{4} = \frac{2 \times 2500}{4} = 1250\text{kN}$$

起重机实际工作时不允许处于极限状态，要使起重机不会翻倒，平衡块的重量应在这两者之间，即 125kN$<P<$1250kN。

② 取 $P=500$kN，起重机在力 W、G、P、F_{NA} 和 F_{NB} 的作用下平衡。列平面平行力系的平衡方程：

$$F_{NA} + F_{NB} - W - P - G = 0$$

由 $\sum M_A(F) = 0$，得 $P \times (6-2) - G \times 2 + F_{NB} \times 4 - W \times (12+2) = 0$

解得

$$F_{NB} = \frac{14W + 2G - 4P}{4} = \frac{14 \times 600 + 2 \times 2500 - 4 \times 500}{4} = 2850\text{kN}$$

$$F_{NA} = -F_{NB} + W + P + G = -2850 + 600 + 500 + 2500 = 750\text{kN}$$

1.2.2 平面任意力系平衡条件

1. 平面任意力系平衡方程

力系中各力的作用线都处在同一平面内，既不汇交于一点，也不全部平行，此力系称平面任意力系。它是工程上常见的一种力系。如图 1-32 所示为悬臂吊车横梁，在考虑横梁自重时，就是受到平面任意力系的作用。

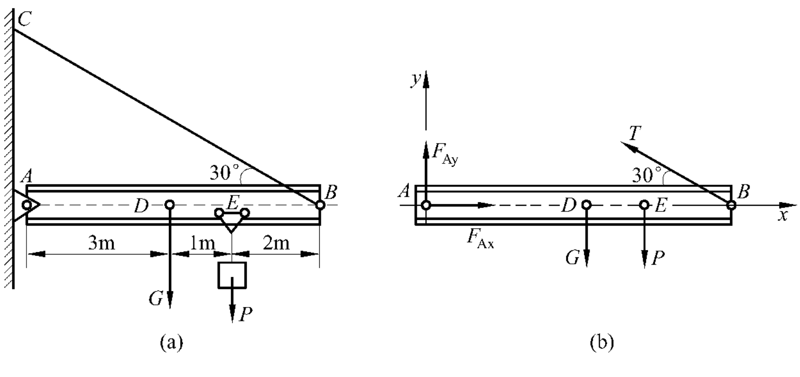


图 1-32　悬臂吊车横梁的受力分析

水平梁 AB 受力为梁自重 G、载荷重 P、固定铰链支座反力 F_A、拉杆 BC 拉力 T，各力作用在同一平面内，处于平衡状态。所以水平梁不能沿 x 轴、y 轴方向移动，也不能绕力系中任意一点转动。由此得到平面任意力系的平衡条件：力系中所有各力，在两个互相垂直的坐标轴上投影的代数和等于零，力系中所有各力对力系所在平面内任意点的合力矩等于零。

平面任意力系平衡必须同时满足三个平衡方程式，见表 1-2，这三个方程彼此独立。

表 1-2　平面任意力系平衡方程

<table>
<tr><th>形　式</th><th>平 衡 方 程</th><th colspan="2">使 用 说 明</th></tr>
<tr><td>基本形式</td><td>$\sum F_x = 0$
$\sum F_y = 0$
$\sum M_O(F) = 0$</td><td>三个公式都是独立的方程，可以求解三个未知数</td><td rowspan="3">平面任意力系的平衡方程虽然有三种形式，但只有三个独立平衡方程，故只能解决构件在平面任意力系作用下具有三个未知量的平衡问题。解题时需根据具体情况，选取其中较为简便的一种形式</td></tr>
<tr><td>二力矩式</td><td>$\sum F_x = 0$
$\sum M_A(F) = 0$
$\sum M_B(F) = 0$</td><td>应满足 A、B 两点连线不能与 x 轴垂直</td></tr>
<tr><td>三力矩式</td><td>$\sum M_A(F) = 0$
$\sum M_B(F) = 0$
$\sum M_C(F) = 0$</td><td>应满足 A、B、C 三点不能共线的条件</td></tr>
</table>

2. 解平面任意力系的平衡方程的步骤

解平面任意力系的平衡方程步骤如下：

① 选取研究对象。

② 进行受力分析，画出受力图。

③ 建立坐标系，计算各力的投影。

④ 选取矩心，计算各力的力矩。

⑤ 列平衡方程，求未知量。

注意：

① 用平面任意力系的平衡方程解题，步骤同平面汇交力系，但需选择矩心和计算各力的力矩。

② 要恰当选取坐标轴的方向和矩心的位置，使计算简化。坐标轴尽量与未知力垂直或与多数力平行，矩心可选在两个未知力的交点。

【例 1-10】 如图 1-32 所示起重机的水平梁 AB，A 端以铰链固定，B 端用拉杆 BC 拉住。梁重 G=24kN，载荷 P=48kN，梁的尺寸如图 1-32 所示。试求拉杆的拉力及铰链 A 的约束反力，拉杆 BC 自重不计。

解：① 取梁 AB 为研究对象。

② 画受力图，进行受力分析。梁上所受的已知力有 G 和 P，未知力有铰链 A 的约束力 F_A 和拉杆拉力 T，因拉杆 BC 为二力杆，故拉力 T 沿 BC 连线，而 F_A 的方向未知，将其分解为 F_{Ax}、F_{Ay} 两个分力（见图 1-32(b)）。

③ 列平衡方程。梁 AB 处于平衡状态，满足了平面任意力系平衡方程，即

$$\sum F_x = 0,\quad F_{Ax} - T\cos 30^\circ = 0 \qquad ⓐ$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{Ay} + T\sin 30^\circ - G - P = 0 \qquad ⓑ$$

$$\sum M_A(F) = 0,\quad T \times AB\sin 30^\circ - G \times AD - P \times AE = 0 \qquad ⓒ$$

④ 解方程组，从式ⓒ解得

$$T=\frac{G\times AD+P\times AE}{AB\sin30^{\circ}}=\frac{24\times3+48\times4}{3}=88\text{kN}$$

代入式ⓐ、ⓑ得

$$F_{Ax}=T\cos30^{\circ}=88\times\frac{\sqrt{3}}{2}=76.21\text{kN}$$

$$F_{Ay}=-T\sin30^{\circ}+G+P=-88\times\frac{1}{2}+24+48=28\text{kN}$$

本章小结

① 力是物体间相互的机械作用，力的作用效果是使物体的运动状态发生变化，或使物体的形状发生变化。

② 力对物体的作用效果是由力的大小、方向和作用点三个要素决定的。力是矢量，具有大小和方向。

③ 静力学公理包括二力平衡公理、加减平衡力系公理、平行四边形公理和作用与反作用公理。静力学公理是力学中最基本、最普遍的客观规律。

④ 画受力图的步骤为：确定研究对象，画出研究对象的简单轮廓图形；进行受力分析，分析研究对象上的主动力和约束力，明确受力物体和施力物体；画出分离体上全部约束力和主动力，在分离体上被解除约束处，画出相应的约束力。

⑤ 力矩是使物体绕某点转动效应的量度，其表达式为 $M(F)=\pm Fd$。力对点的矩与矩心位置有关。

⑥ 力偶矩是力偶使物体转动效应的量度，表达式为 $m=\pm Fd$，力偶矩与所取的矩心位置无关。绕定点转动物体的平衡条件：合力矩等于零，即 $\sum M_O(F)=0$。平面力偶系平衡的条件是所有各力偶矩的代数和等于零，即 $\sum m=0$。

⑦ 作用在刚体上的力可平移到任一点，但必须附加一个力偶，附加力偶的力偶矩等于原来的力对该点的矩。

⑧ 平面特殊力系的平衡方程：平面汇交力系平衡的条件是，力系中各力在两直角坐标轴上投影的代数和分别等于零；平面力偶系平衡的条件是，所有各力偶矩的代数和等于零，即 $\sum m_i=0$；平面平行力系平衡的条件是，若 Oy 轴与力系中各力平行，则 $\sum F_y=0$，所以它有两种独立平衡方程（一个投影和一个力矩式或二力矩式）。

⑨ 平面任意力系的平衡条件：力系中所有各力在两个互相垂直的坐标轴上投影的代数和为零，力系中所有各力对力系所在平面内任意点的合力矩等于零，即 $\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum M_O(F)=0$。

⑩ 应用平面任意力系平衡方程解题的一般方法：选取研究对象；进行受力分析，画出受力图；建立坐标系，计算各力的投影；选取矩心，计算各力的力矩；列平衡方程，求未知量。

思考与练习

1. 填空题

(1) 力是物体间的相互________，其效果是使物体的________发生变化或使物体________。

(2) 力 F 使刚体绕某点 O 的转动效应，不仅与 F 的________成正比，而且与点 O 至力作用线的________成正比。

(3) 力系中各力的作用线都处于________内，既________，也________的力系称平面任意力系。

(4) 物体所受的力分为主动力和________两类，重力属________，约束力属________。

(5) 各力作用线均在________的力系，称平面力系。若平面力系中的________都________，则称平面汇交力系。

(6) 合力投影定理是指合力在任一坐标轴上的投影等于________在同一轴上投影的________。

(7) 对于平面力偶，力偶对物体的转动效应完全取决于力偶矩的________和力偶的________，而与________无关。

(8) 平面汇交力系平衡的解析条件：力系中各力在两直角坐标上________分别等于________，其表达式为________和________。

2. 选择题

(1) 下列动作中，哪种动作属力偶作用。(　　)

A. 用手提重物　　B. 用羊角锤拔钉子

C. 用手推重物　　D. 双手握转向盘

(2) 对作用力与反作用力的正确理解是(　　)。

A. 作用力与反作用力同时存在

B. 作用力与反作用力是一对平衡力

C. 作用力与反作用力作用在同一物体上

D. 以上说法都不对

(3) 力对物体转动关系的正确说法是(　　)。

A. 力一定能使物体转动(或转动趋势)发生变化

B. 力可能使物体转动(或转动趋势)发生变化

C. 力只能使物体发生移动而不能使物体发生转动(或转动趋势)

D. 以上说法都不对

(4) 属于力矩作用的是(　　)。

A. 双手握转向盘　　B. 用扳手拧螺母

C. 用丝锥攻螺纹　　D. 用螺钉旋具(俗称起子)扭螺钉