第1篇

习题解答

第1章 矢量分析

1.1 基本教学内容、主要公式及重要提示

1.1.1 三种常用的正交坐标系

1. 直角坐标系(x,y,z)

直角坐标系中三个相互正交的单位矢量是$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$，满足右手关系

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{1.1}$$

微分线元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x \mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y \mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z \tag{1.2}$$

与三个坐标方向垂直的三个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.3}$$

直角坐标系中的体积元为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.4}$$

2. 圆柱坐标系(r,φ,z)

圆柱坐标系中三个相互正交的单位矢量是$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$，满足右手关系

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r,\quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.5}$$

微分线元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r \mathrm{d}r + \boldsymbol{e}_\varphi r\mathrm{d}\varphi + \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}z \tag{1.6}$$

在r、φ、z方向上的微分线元分别为$\mathrm{d}r$、$r\mathrm{d}\varphi$、$\mathrm{d}z$，如图1-1所示。

与三个坐标方向垂直的三个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}S_\varphi = \mathrm{d}r\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}S_z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{1.7}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1.8}$$

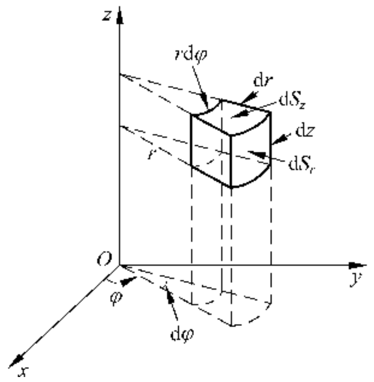


图 1-1

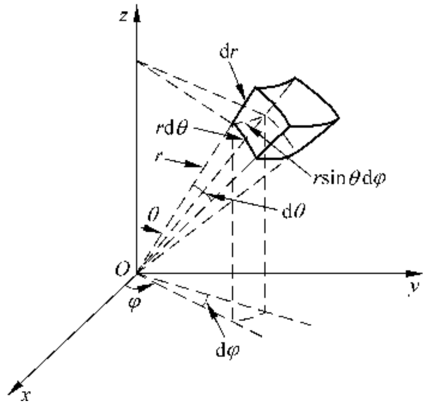


图 1-2

3. 球坐标系(r,θ,φ)

球坐标系中三个相互正交的单位矢量是 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\varphi$,满足右手关系

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi, \quad \boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_r, \quad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta \tag{1.9}$$

微分线元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_r \mathrm{d}r + \boldsymbol{e}_\theta r \mathrm{d}\theta + \boldsymbol{e}_\varphi r \sin\theta \mathrm{d}\varphi \tag{1.10}$$

在 r、θ、φ 方向上的微分线元分别为 $\mathrm{d}r$、$r\mathrm{d}\theta$、$r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$,如图 1-2 所示。

与三个坐标方向相垂直的三个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_r = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}S_\theta = r\sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}S_\varphi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.11}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{1.12}$$

1.1.2 矢量运算

单位矢量,矢量加减法,标量积(点乘),矢量积(叉乘),混合积。

1.1.3 空间矢量

位置矢量:空间任一点可用一个矢量表示,由原点指向该点,例如

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z \tag{1.13}$$

距离矢量:由原点指向场点的距离矢量为 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$,$\boldsymbol{R}$ 的大小(模)为

$$R = |\boldsymbol{R}_1| = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{1.14}$$

方向为

$$\boldsymbol{e}_R = \frac{\boldsymbol{R}}{R} = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{1.15}$$

1.1.4 矢量的微分

1. 矢量场的散度

(1) 矢量的通量

矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = A\cos\theta \mathrm{d}S \tag{1.16}$$

穿过曲面 S 的通量为

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.17}$$

穿过闭合曲面 S 的通量为

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.18}$$

S 面的法线方向向外。

(2) 矢量场的散度

矢量(场)的散度是一个标量(场),在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.19}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.20}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right) \tag{1.21}$$

(3) 散度定理

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{1.22}$$

利用散度定理,可以把面积分变为体积分,也可以把体积分变为面积分。

2. 矢量场的旋度

(1) 矢量的环流

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合回路 L 的线积分称为环流。

$$\Gamma_{\boldsymbol{A}} = \oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.23}$$

若 $\Gamma_{\boldsymbol{A}} \neq 0$,则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为涡旋场,场线是连续的闭合曲线。若 $\Gamma_{\boldsymbol{A}} = 0$,则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场,可以引入位的概念。

(2) 矢量场的旋度

矢量(场)的旋度还是一个矢量(场),在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.24}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\varphi & \dfrac{\boldsymbol{e}_z}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{1.25}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{1.26}$$

(3) 旋度的一个重要性质：一个矢量场旋度的散度恒等于零，即

$$\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0 \tag{1.27}$$

(4) 斯托克斯定理

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.28}$$

利用斯托克斯定理，可以把线积分变为面积分，也可以把面积分变为线积分。

3. 标量场的梯度

(1) 定义

标量场的梯度是一个矢量场，表示某一点处标量场的变化率，在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla\psi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\psi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\psi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.29}$$

$$\nabla\psi=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{1.30}$$

$$\nabla\psi=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) \tag{1.31}$$

(2) 梯度的一个重要性质：对一个标量场的梯度取旋度恒等于零，即

$$\nabla\times\nabla u=0 \tag{1.32}$$

1.1.5 微分算符及常用的公式

1. Hamilton 算符∇

2. Laplacian 算符$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$，在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中的表达式分别为

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{1.33}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{1.34}$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right) \tag{1.35}$$

3. 微分算符的常用计算式见主教材附录 3

1.1.6 亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理是矢量场一个重要的定理，亥姆霍兹定理表明，若矢量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$在无界空间中处处单值，且其导数连续有界，场源分布在有限区域 V'中，则**该矢量场唯一地由其散度和旋度确定**，且可以表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和，即

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{1.36}$$

1.2　主要的习题类型及典型例题

1. 矢量在 3 个坐标系间的变换

典型例题：例题 1.1；习题 1-5、1-6。

2. 在 3 个坐标系中验证散度定理

典型例题：例题 1.2；习题 1-7、1-8。

3. 在 3 个坐标系中验证斯托克斯定理

典型例题：例题 1.3；习题 1-9、1-10。

4. 计算梯度和方向导数

典型例题：习题 1-13、1-14。

5. 矢量恒等式的证明

典型例题：例题 1.4；习题 1-2。

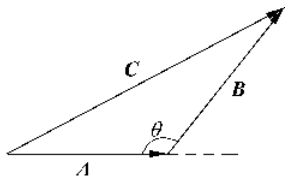
【注：典型例题中的例题是《电磁场与电磁波》(邹澎、周晓萍编著，清华大学出版社)中的例题，习题也是该书中的习题，即本习题解答中的习题。】

1.3　习题解答

1-1　利用矢量的方法证明三角形的余弦定理。

解　把三角形的三个边用矢量表示 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，如图题 1-1 所示。计算 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的点积

$$C^2=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$
$$=A^2+B^2+2AB\cos(\pi-\theta)=A^2+B^2-2AB\cos\theta$$



图题 1-1

1-2　在直角坐标系中证明以下矢量恒等式

(1) $\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$

(2) $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$

(3) $\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}$

证明　在直角坐标系中

$$(1)\ \nabla(\Phi\Psi)=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(\Phi\Psi)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(\Phi\Psi)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(\Phi\Psi)$$
$$=\boldsymbol{e}_x\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$=\Phi\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)+\Psi\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$
$$=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$$

(2) $\nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{A}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\Phi A_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\Phi A_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\Phi A_z)$

$$= \Phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$= \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \Phi$$

(3) 令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z$，$\Phi \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x \Phi A_x + \boldsymbol{e}_y \Phi A_y + \boldsymbol{e}_z \Phi A_z$，则

$$\nabla \times (\Phi \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \Phi A_x & \Phi A_y & \Phi A_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{e}_x \left[\frac{\partial (\Phi A_z)}{\partial y} - \frac{\partial (\Phi A_y)}{\partial z} \right] + \boldsymbol{e}_y \left[\frac{\partial (\Phi A_x)}{\partial z} - \frac{\partial (\Phi A_z)}{\partial x} \right] + \boldsymbol{e}_z \left[\frac{\partial (\Phi A_y)}{\partial x} - \frac{\partial (\Phi A_x)}{\partial y} \right]$$

$$= \boldsymbol{e}_x \Phi \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \boldsymbol{e}_y \Phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \boldsymbol{e}_z \Phi \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$+ \boldsymbol{e}_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \Phi}{\partial z} A_y \right) + \boldsymbol{e}_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \Phi}{\partial x} A_z \right) + \boldsymbol{e}_z \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \Phi}{\partial y} A_x \right)$$

$$= \Phi \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \Phi \times \boldsymbol{A}$$

1-3　试求距离矢量的模 $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ 在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中的表达式。

解　在直角坐标系中

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

在圆柱坐标系中，$x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = z$，所以

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(r_2 \cos\varphi_2 - r_1 \cos\varphi_1)^2 + (r_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\varphi_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2 r_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + (z_2 - z_1)^2}$$

在球坐标系中，$x = r\sin\theta\cos\varphi$，$y = r\sin\theta\sin\varphi$，$z = r\cos\theta$，所以

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = [(r_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2 - r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1)^2 + (r_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2 - r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1)^2 + (r_2 \cos\theta_2 - r_1 \cos\theta_1)^2]^{1/2}$$
$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2 r_1 [\sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\theta_2 \cos\theta_1]}$$

1-4　在圆柱坐标系中，一点的位置由 $(4, 2\pi/3, 3)$ 定出，求该点在(1)直角坐标系中的坐标；(2)球坐标系中的坐标。

解　(1) 在直角坐标系中

$$x = 4\cos(2\pi/3) = -2, \quad y = 4\sin(2\pi/3) = 2\sqrt{3}, \quad z = 3$$

故该点的直角坐标为 $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$。

(2) 在球坐标系中

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \theta = \arctan(4/3) = 53.1°, \quad \varphi = 2\pi/3 = 120°$$

故该点的球坐标为 $(5, 53.1°, 120°)$。

1-5　用球坐标表示的场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_r 25/r^2$，求在直角坐标系中的点 $P(-3, 4, -5)$ 处的 $\boldsymbol{E}$。

解　在点 $P(-3, 4, -5)$ 处，$r^2 = (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2 = 50$，$\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{e}_x 3 + \boldsymbol{e}_y 4 - \boldsymbol{e}_z 5$，所以

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_r \frac{25}{r^2} = \frac{25\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{-\boldsymbol{e}_x 3 + \boldsymbol{e}_y 4 - \boldsymbol{e}_z 5}{10\sqrt{2}}$$

1-6　已知直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{e}_y + c\boldsymbol{e}_z$，式中 a, b, c 均为常数，试求该矢量在圆柱坐标系及球坐标系中的表示式。

解　$\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系中的表达式为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，$\cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，代入式(1)可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r\sqrt{a^2+b^2} + \boldsymbol{e}_z c$$

$\boldsymbol{A}$ 在球坐标系中的表达式为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

代入式(2)可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

1-7　在由 $r=5$，$z=0$ 和 $z=4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_r r^2+\boldsymbol{e}_z 2z$ 验证散度定理。

解　在圆柱坐标系中，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rr^2)+\dfrac{\partial}{\partial z}(2z)=3r+2$，所以

$$\int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^5(3r+2)r\,\mathrm{d}r = 1200\pi$$

又

$$\oint_s\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_s(\boldsymbol{e}_r r^2+\boldsymbol{e}_z 2z)\cdot(\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}S_r+\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}S_\varphi+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}S_z)$$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi}5^2\times5\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z + \int_0^5\int_0^{2\pi}2\times4r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 1200\pi$$

所以

$$\int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau = \oint_s\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1-8　计算矢量 $\boldsymbol{r}$ 对一个球心在原点、半径为 a 的球表面的积分，并求 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ 对球的体积分，验证散度定理。

解

$$\oint_s\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_s\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi aa^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi a^3$$

在球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 r) = 3$$

$$\int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi\int_0^a 3r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi a^3$$

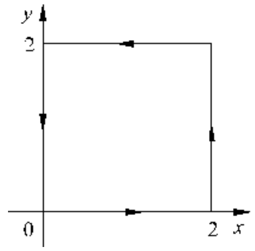
所以

$$\oint_s\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_\tau\nabla\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\tau$$

1-9　求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y x^2+\boldsymbol{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路(如图题 1-9 所示)

的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴重合。再求$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 对此回路所包围的表面积分，验证斯托克斯定理。

解



图题 1-9

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_0^2 x dx+\int_0^2 2^2 dy-\int_0^2 x dx-\int_0^2 0 dy=8$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & x^2 & y^2 z\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x 2yz+\boldsymbol{e}_z 2x$$

所以

$$\int_s \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_0^2\int_0^2(\boldsymbol{e}_x 2yz+\boldsymbol{e}_z 2x)\cdot\boldsymbol{e}_z dxdy=8$$

因此

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_s \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

斯托克斯定理成立。

1-10　求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分，再计算$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 对此圆面积的积分，验证斯托克斯定理。

解　在圆周上，$x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$，$dx=-a\sin\varphi d\varphi$，$dy=a\cos\varphi d\varphi$，$d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x dx+\boldsymbol{e}_y dy$，所以

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_c x dx+xy^2 dy=\int_0^{2\pi}(-a^2\cos\varphi\sin\varphi+a^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)d\varphi=\frac{\pi a^2}{4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & xy^2 & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z y^2$$

所以

$$\int_s \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_s(\boldsymbol{e}_z y^2)\cdot\boldsymbol{e}_z d\boldsymbol{S}=\int_s y^2 d\boldsymbol{S}=\int_0^a\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\varphi r drd\varphi=\frac{\pi a^2}{4}$$

因此

$$\oint_c \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_s \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

斯托克斯定理成立。

1-11　给定矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x y+\boldsymbol{e}_y x$，试：

(1) 沿抛物线 $x=2y^2$

(2) 沿连接该两点的直线

分别计算从 $P_1(2,1,-1)$到 $P_2(8,2,-1)$的线积分 $\int\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ 的值，这个 $\boldsymbol{E}$ 是否是保守场？

解　(1)

$$\int_{c1}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{c1}E_x dx+E_y dy=\int_{c1}y dx+x dy$$
$$=\int_1^2 y d(2y^2)+2y^2 dy=\int_1^2 6y^2 dy=14$$

(2) 连接点 $P_1(2,1,-1)$到点 $P_2(8,2,-1)$的直线方程为

$$\frac{x-2}{y-1}=\frac{8-2}{2-1}=6\quad 即\quad x=6y-4$$

所以

$$\int_{c2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{c2} E_x \mathrm{d}x + E_y \mathrm{d}y = \int_1^2 y\mathrm{d}(6y-4) + (6y-4)\mathrm{d}y = \int_1^2 (12y-4)\mathrm{d}y = 14$$

由此可见，积分与路径无关，该矢量场是保守场。

1-12　求数量场 $u=\ln(x+2y+z^2)$ 通过点 $P(1,3,2)$ 的等值面方程。

解　点 $P(1,3,2)$ 处的数量场值

$$u = \ln(x+2y+z^2) = \ln(1+6+4) = \ln 11$$

所以，通过该点 $P(1,3,2)$ 的等值面方程为 $x+2y+z^2=11$。

1-13　求标量函数 $\psi=x^2yz$ 的梯度及 ψ 在一个指定方向的方向导数。此方向由单位矢量 $\boldsymbol{e}_x 3/\sqrt{50}+\boldsymbol{e}_y 4/\sqrt{50}+\boldsymbol{e}_z 5/\sqrt{50}$ 定出；求(2,3,1)点的导数值。

解

$$\nabla\psi = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz) + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) = \boldsymbol{e}_x 2xyz + \boldsymbol{e}_y x^2 z + \boldsymbol{e}_z x^2 y$$

沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x \dfrac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y \dfrac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z \dfrac{5}{\sqrt{50}}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial\psi}{\partial l} = \nabla\psi \cdot \boldsymbol{e}_l = \frac{6xyz}{\sqrt{50}} + \frac{4x^2z}{\sqrt{50}} + \frac{5x^2y}{\sqrt{50}}$$

点(2,3,1)处沿 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数值为

$$\frac{\partial\psi}{\partial l} = \frac{36}{\sqrt{50}} + \frac{16}{\sqrt{50}} + \frac{60}{\sqrt{50}} = \frac{112}{\sqrt{50}}$$

1-14　方程 $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ 给出一椭球族，求椭球表面上任意点的单位法向矢量。

解　由于 $\nabla u=\boldsymbol{e}_x \dfrac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y \dfrac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial u}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x \dfrac{2x}{a^2}+\boldsymbol{e}_y \dfrac{2y}{b^2}+\boldsymbol{e}_z \dfrac{2z}{c^2}$

$$|\nabla u| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

故椭球表面上任意点的单位法向矢量

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \left(\boldsymbol{e}_x \frac{x}{a^2} + \boldsymbol{e}_y \frac{y}{b^2} + \boldsymbol{e}_z \frac{z}{c^2}\right)\Bigg/\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

1-15　现有三个矢量场 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_\theta \cos\theta\cos\varphi - \boldsymbol{e}_\varphi \sin\varphi$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_r z^2 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_\varphi z^2 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_z 2rz\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x(3y^2-2x) + \boldsymbol{e}_y x^2 + \boldsymbol{e}_z 2z$$

问：(1) 哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量的旋度表示？

(2) 求出这些矢量的源分布。

解　(1) 在球坐标系中

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\cos\varphi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\sin\varphi) \\ &= \frac{2}{r}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} - \frac{2}{r}\sin\theta\cos\varphi - \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} = 0\end{aligned}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

所以,矢量 $\boldsymbol{A}$ 是无源场,也是无旋场,它既可以用一个标量函数的梯度表示,也可以用一个矢量函数的旋度表示。

在圆柱坐标系中

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rz^2\sin\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(z^2\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(2rz\sin\varphi)\\ &= \frac{z^2\sin\varphi}{r}-\frac{z^2\sin\varphi}{r}+2r\sin\varphi = 2r\sin\varphi \neq 0\end{aligned}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\varphi & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2\sin\varphi & rz^2\cos\varphi & 2rz\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

所以,矢量 $\boldsymbol{B}$ 是有源无旋场,可以用一个标量函数的梯度表示。

在直角坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2x)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z) = 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2-2x & x^2 & 2z \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_z(2x-6y) \neq 0$$

所以,矢量 $\boldsymbol{C}$ 是无源有旋场,可以用一个矢量函数的旋度表示。

(2) 这些矢量的源分布为:矢量 $\boldsymbol{A}$ 无源分布,矢量 $\boldsymbol{B}$ 向外发散的源是 $2r\sin\varphi$,矢量 $\boldsymbol{C}$ 涡旋的源是 $\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$。

1-16 写出时变电磁场的基本方程,由亥姆霍兹定理说明场的性质被唯一地确定。

解 时变电磁场的基本方程的积分形式和微分形式分别为

积分形式	微分形式
$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$
$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$	$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$
$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$
$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = q$	$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho$

对于特定介质中的电磁场,介质中电场强度和电位移矢量、磁感应强度和磁场强度有特定的关系,即

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$$

因此,基本方程既给出了电场磁场的散度,也给出了电场磁场的旋度。由亥姆霍兹定理知,任一矢量场由它的散度和旋度唯一确定,因此,时变电磁场的基本方程唯一地确定了场的性质。

1-17　证明：(1)$\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$，(2)$\nabla\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$，(3)$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{A}$，其中，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$，$\boldsymbol{A}$ 为常矢量。

证明　(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial z}=3$

(2) $\nabla\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z$，因为 $\boldsymbol{A}$ 为常矢量，所以 A_x、A_y、A_z 都为常数，于是

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=A_x x+A_y y+A_z z$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(A_x x+A_y y+A_z z)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(A_x x+A_y y+A_z z)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(A_x x+A_y y+A_z z)$$
$$=\boldsymbol{e}_x A_x+\boldsymbol{e}_y A_y+\boldsymbol{e}_z A_z=\boldsymbol{A}$$

1-18　在球坐标系中证明 $\nabla^2\dfrac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}=k^2\dfrac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}$，其中 k 是常数。

证明

$$\nabla^2\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)\right]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\mathrm{e}^{-kr}\frac{1}{r^2}-\frac{k}{r}\mathrm{e}^{-kr}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-\mathrm{e}^{-kr}-kr\mathrm{e}^{-kr})=\frac{1}{r^2}(k\mathrm{e}^{-kr}+k^2r\mathrm{e}^{-kr}-k\mathrm{e}^{-kr})=k^2\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}$$

第2章 静电场分析

2.1 基本教学内容、主要公式及重要提示

2.1.1 静电场的基本规律

1. 电荷与电荷分布

(1) 体电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \tag{2.1}$$

利用 $\rho(\boldsymbol{r})$ 通过体积分可以求出某个体积 V 中总的电量

$$q = \iiint_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \tag{2.2}$$

(2) 面电荷密度

$$\rho_S(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \tag{2.3}$$

利用 $\rho_S(\boldsymbol{r})$ 通过面积分可以求出某个曲面 S 上总的电量

$$q = \iint_S \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S \tag{2.4}$$

(3) 线电荷密度

$$\rho_l(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \tag{2.5}$$

利用 $\rho_l(\boldsymbol{r})$ 通过线积分可以求出某段曲线 l 上总的电量

$$q = \int_l \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}l \tag{2.6}$$

(4) 点电荷的 δ 函数表示法

点电荷是电磁场理论中的一个理想模型，点电荷的电量为 q，占据的体积为趋近于零的一个几何点。可以用 δ 函数表示点电荷的体电荷密度

$$\rho(\boldsymbol{r}) = q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}' \\ \infty & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' \end{cases} \tag{2.7}$$

对于点电荷，空间任意体积 V 中总的电量 Q 可以由下式给出

$$Q = \iiint_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = q\iiint_V \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\mathrm{d}V = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}' \text{ 不在 } V \text{ 内} \\ q & \boldsymbol{r}' \text{ 在 } V \text{ 内} \end{cases} \tag{2.8}$$

2. 静电场的基本方程

静电场的基本方程包括高斯定理和环路定理

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_i q_i \tag{2.9}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.10}$$

其中，$\sum\limits_i q_i$ 是 S 面内包围的所有电荷(包括自由电荷和极化电荷)。

有电介质时，静电场的基本方程可以写为

$$\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i q_0 \tag{2.11}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.12}$$

其中，$\sum\limits_i q_0$ 是 S 面内包围的所有自由电荷。微分形式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \tag{2.13}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.14}$$

3. 场强 $\boldsymbol{E}$ 和电位 Φ 的计算

大学物理已经学过的场强 $\boldsymbol{E}$ 和电位 Φ 的 3 种计算方法：

(1) 方法 1

第一步：利用点电荷场强公式和场强的迭加原理求 $\boldsymbol{E}$，点电荷的场强、点电荷组的场强、电荷连续分布的场强分别为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\boldsymbol{r}')}{R^2} \boldsymbol{e}_R \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\boldsymbol{r}'_i)}{R_i^2} \boldsymbol{e}_{R_i} \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')}{R^2} \boldsymbol{e}_R \tag{2.17}$$

电荷连续分布包括线分布、面分布和体分布，电荷元的表达式分别为

$$\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}') = \rho_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l, \quad \mathrm{d}q(\boldsymbol{r}') = \rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S, \quad \mathrm{d}q(\boldsymbol{r}') = \rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V \tag{2.18}$$

第二步：

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.19}$$

其中，P 是待求电位的场点，Q 是电位的参考点。如果电荷分布在有限区域内，一般取无穷远处作参考点，如果电荷不是分布在有限区域内，需要根据具体情况选择参考点。实际问题中，一般选择“地”作为电位参考点。

电位是一个相对量，与所选的参考点有关，如果两点的电位相差一个常数，可以认为是由参考点的选取引起的。

这种方法要用矢量的迭加或积分，运算比较复杂。

(2) 方法 2

电荷分布具有对称性时(包括球对称、面对称、轴对称)，可以用下述方法求解：

第一步：利用高斯定理求 $\boldsymbol{E}$；

第二步：

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int_P^Q \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(3) 方法3

第一步：利用点电荷电位的公式和电位的迭加原理求 Φ,点电荷的电位,点电荷组的电位,电荷连续分布的电位分别为

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\boldsymbol{r}')}{R} \tag{2.20}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\boldsymbol{r}'_i)}{R_i} \tag{2.21}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')}{R} \tag{2.22}$$

线电荷元、面电荷元、体电荷元的表达式仍为式(2.18),代入式(2.22),可以分别求出线电荷、面电荷、体电荷产生的电位的表达式

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l}{R} \tag{2.23}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S}{R} \tag{2.24}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V}{R} \tag{2.25}$$

第二步：利用电位梯度求场强

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi \tag{2.26}$$

4. 静电场中的导体

下面列出静电平衡时导体的电特性,在分析一些问题时非常有用。

(1) 导体内电场强度处处为零。

(2) 导体是等位体,导体的表面是等位面。

(3) 导体内无电荷分布,电荷只分布在导体的表面。孤立导体表面的电荷分布与曲率有关,曲率比较大(凸出而尖锐)的地方,面电荷密度比较大；曲率比较小(比较平坦)的地方,面电荷密度也比较小；曲率为负值(凹进去)的地方,面电荷密度更小。

(4) 导体表面附近,电场强度的方向与表面垂直,电场强度的大小等于该点附近导体表面的面电荷密度除以 ε_0

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{n}}\frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \tag{2.27}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{n}}$是导体表面处的单位法线矢量。

5. 计算电介质问题常用的公式

$$\oint\!\!\!\oint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_0 \tag{2.28}$$

引入电位移矢量 $\boldsymbol{D}$,高斯定理右边只对自由电荷求和,不出现极化电荷,使计算大为简化。

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \tag{2.31}$$

介质表面的面极化电荷密度为

$$\rho_{SP} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.32}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$是介质表面处的单位法线矢量。介质内部的体极化电荷密度为

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{2.33}$$

介电常数和极化率为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \tag{2.34}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \tag{2.35}$$

电介质的计算规律性比较强，一般是给定自由电荷分布，由式(2.28)先求出电位移矢量$\boldsymbol{D}$，然后利用式(2.30)和式(2.31)就可以分别求出电场强度$\boldsymbol{E}$和极化强度矢量$\boldsymbol{P}$，利用极化强度矢量$\boldsymbol{P}$和式(2.32)和式(2.33)就可以分别求出介质表面的面极化电荷密度和介质内部的体极化电荷密度。

6. 电力线方程和等位面方程

(1) 电力线方程

直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系中电力线方程分别为

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \tag{2.36}$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z} \tag{2.37}$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta d\varphi}{E_\varphi} \tag{2.38}$$

(2) 等位面方程

$$\Phi(x, y, z) = C \tag{2.39}$$

其中，C是一个常数。

2.1.2 静电场的边界条件

边界条件是指在两种介质的分界面上，场量($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \Phi, \cdots$)的变化所满足的关系式。利用边界条件解边值问题是电磁场课程与大学物理中电磁学部分的重要区别。

(1) 两种电介质界面上的边界条件

① $\boldsymbol{D}$的法向分量满足的边界条件为

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \tag{2.40}$$

分界面上没有自由电荷时

$$D_{1n} = D_{2n} \tag{2.41}$$

② $\boldsymbol{E}$切向分量满足的边界条件

$$E_{1t} = E_{2t} \tag{2.42}$$

③ $\boldsymbol{E}$线和$\boldsymbol{D}$线在分界面上的折射

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{2.43}$$

④ 电位的边界条件

$$\Phi_1 = \Phi_2 \tag{2.44}$$

$$-\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \rho_S \tag{2.45}$$

若分界面上没有自由电荷分布，式(2.45)可以写为

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \tag{2.46}$$

(2) 导体与电介质分界面上的边界条件

① $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件

$$E_{1t}\big|_S = 0 \tag{2.47}$$

$$D_{1n}\big|_S = \rho_S \tag{2.48}$$

② 电位 Φ 的边界条件

$$\Phi_1 = \Phi_2 = C \tag{2.49}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = -\rho_S \tag{2.50}$$

2.1.3 泊松方程和拉普拉斯方程

泊松方程

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.51}$$

对于没有电荷分布的区域，Φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{2.52}$$

应当强调指出，泊松方程和拉普拉斯方程都是微分方程，都是针对场中某一点而言的。例如，泊松方程右边的 ρ 是场中某一点的体电荷密度，左边的 Φ 是该点处的电位。

2.1.4 唯一性定理

1. 唯一性定理的内容

对于某一空间区域 V，边界面为 S，电位 Φ 满足

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad 或 \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

若给定电荷的分布 ρ，给定边界面上的电位 $\Phi|_S$ 或边界面上电位的法线导数 $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\big|_S$(对于导体就是给定导体表面电荷的分布)，则解是唯一的。

2. 唯一性定理的意义和作用

只要满足唯一性定理中的条件，边值问题的解就是唯一的。所以可以用能想到的最