第3章 自动控制系统的时域分析

3.1 内容提要

时域分析是通过直接求解系统在典型输入信号作用下的时域响应来分析系统的性能的。通常以系统单位阶跃响应的超调量、调节时间、稳定性和稳态误差等性能指标来评价系统性能的优劣。

3.1.1 系统的暂态过程和稳定性

系统的暂态过程和稳定性都与系统闭环极点在 s 平面的分布紧密相关，必须非常清楚闭环极点在 s 平面的位置所对应的暂态分量形式，如：负实轴上的极点对应的暂态分量是指数衰减、正实轴上的极点对应的暂态分量是指数发散、实部为负的共轭复极点对应的暂态分量是衰减振荡、实部为正的共轭复极点对应的暂态分量是发散振荡等，这些都决定了系统的稳定性和暂态过程的特征。

典型二阶系统是系统分析研究的主要对象。因为典型二阶系统参数的不同取值，包含了闭环极点的所有可能分布，所以用它可以表征任何一个高阶系统的暂态过程和稳定性。其中二阶系统欠阻尼情况又是本书的重点，这种情况下的主要指标有：上升时间 t_r、最大超调量 $\sigma\%$、调节时间 t_s、峰值时间 t_m、振荡次数 μ 等，这些指标均与系统的阻尼比 ξ 和自然振荡角频率 ω_n 这两个参数有关，应熟练掌握它们的物理含义、计算公式和相互关系等。

对于高阶系统的分析，是以二阶系统为基础的，正确理解主导极点和偶子的概念，对高阶系统的暂态性能进行近似分析。结论是：极点离虚轴越近对系统暂态响应影响越大，离虚轴越远影响越小；零点靠近哪个极点，就把哪个极点的影响减弱。

高阶系统的稳定性判断则通过代数稳定判据来判定。

3.1.2 稳态误差

系统的稳态误差定义为在稳态条件下输出量的期望值与稳态值之间的差值。稳态误差是对系统稳态控制精度的度量，是系统的稳态指标。它既与系统的结构和参数有关，也与控制信号的形式、大小和作用点有关。

稳态误差一般分为两类：一类为扰动稳态误差，主要针对恒值系统；另一类为给定稳态误差，主要针对随动系统。在理解稳态误差的概念的基础上，熟练掌握误差传递函数和稳态误差的计算。

在求解稳态误差时，需把握以下要点：

(1) 首先要将系统开环传递函数写成时间常数形式，即将其常数项系数变成1。

(2) 只要将系统的结构图变换成单回路，且系统中没有给定环节，系统的误差传递函数总是如下形式，即

$$W_e(s)=\frac{E(s)}{X_r(s)}=\frac{1}{1+W_K(s)}$$

3.2 习题与解答

题 3-10 一单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$W_K(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

求：(1) 系统的单位阶跃响应及动态特性指标 $\sigma\%$、t_r、t_s、μ；

(2) 输入量 $x_r(t)=t$ 时，系统的输出响应；

(3) 输入量 $x_r(t)$ 为单位脉冲函数时，系统的输出响应。

解 系统的闭环传递函数为

$$W_B(s)=\frac{W_K(s)}{1+W_K(s)}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

与标准形式相对比，可得 $\begin{cases}\omega_n^2=1\\2\xi\omega_n=1\end{cases}$，即 $\begin{cases}\omega_n=1\\\xi=0.5\end{cases}$。

(1) 当输入量为 $x_{r1}(t)=1(t)$ 时

① 由公式求得系统的单位阶跃响应为

$$x_{c1}(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t+\theta)$$

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\tag{3-1}$$

将 $\xi=0.5$，$\omega_n=1$ 代入式(3-1)，整理得

$$x_{c1}(t)=1-1.15e^{-\frac{t}{2}}\sin(0.866t+60^\circ)$$

② $\sigma\% = \mathrm{e}^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})} \times 100\% = \mathrm{e}^{-1.81} \times 100\% \approx 16.4\%$

③ $t_r = \dfrac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \approx 2.42\mathrm{s}$

④ $t_s(5\%) = \dfrac{3}{\xi\omega_n} = 6\mathrm{s}$

$t_s = (2\%) = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = 8\mathrm{s}$

⑤ $t_m = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 3.63\mathrm{s}$

$t_f = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = \dfrac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 7.26\mathrm{s}$

$\mu = \dfrac{t_s(5\%)}{t_f} = \dfrac{6}{7.26} = 0.826(5\%)$

(2) 当输入量为 $x_{r2}(t) = t$ 时,求系统的输出响应。

方法一 根据传递函数的定义,利用拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换进行计算。

输入量的拉普拉斯变换为 $X_{r2}(s) = \dfrac{1}{s^2}$,则

$$X_{c2}(s) = W_B(s)X_{r2}(s) = \frac{1}{s^2(s^2+s+1)}$$
$$= \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+s+1}$$

式中

$$A = X_{c2}(s)s^2 \mid_{s=0} = 1$$
$$B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[X_{c2}(s)s^2] \mid_{s=0} = -1$$
$$(Cs+D) \mid_{s=-0.5-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}} = X_{c2}(s)(s^2+s+1) \mid_{s=-0.5-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

得

$$(0.5C+D) - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}C = \frac{1}{\left[-0.5-\mathrm{j}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]} = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

令等式两边实部与实部相等,虚部与虚部相等,解得

$$C = 1, \quad D = 0$$

所以

$$X_{c2}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+s+1}$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{0.5}{(s+0.5)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

将上式进行拉普拉斯反变换,得到系统的输出响应为

$$x_{c2}(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-0.5t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

方法二 利用线性系统的性质进行计算。

因为 $$x_{r2}(t)=t=\int_0^t 1(t)\mathrm{d}t=\int_0^t x_{r1}\mathrm{d}t$$

所以，利用线性系统的性质得

$$x_{c2}(t)=\int_0^t x_{c1}\mathrm{d}t=\int_0^t\left[1-1.15\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$=t-1+\mathrm{e}^{-0.5t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

(3) 当输入量 $x_{r3}(t)=\delta(t)$时，求系统的输出响应。

方法一 根据传递函数的定义，利用拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换进行计算。

输入量的拉普拉斯变换为 $X_{r3}(s)=1$

则 $$X_{c3}(s)=W_B(s)X_{r3}(s)=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{(s+0.5)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

将上式进行拉普拉斯反变换，得到系统的输出响应

$$x_{c3}(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

方法二 利用线性系统的性质进行计算。

因为

$$x_{r3}(t)=\delta(t)=\frac{\mathrm{d}1(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x_{r1}(t)}{\mathrm{d}t}$$

所以，利用线性系统的性质得

$$x_{c3}(t)=\frac{\mathrm{d}x_{c1}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left[1-1.15\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+60^\circ\right)\right]}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

题 3-11 一单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$W_K(s)=\frac{K_K}{s(\tau s+1)}$$

其单位阶跃响应曲线如图 P3-1 所示，图中的 $X_m=1.25$，$t_m=1.5\mathrm{s}$。试确定系统参数 K_K 及 τ 值。

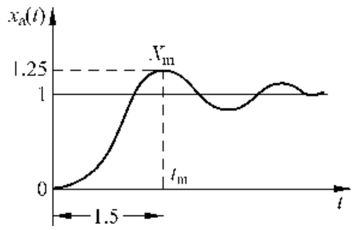

图 P3-1 题 3-11 系统的单位阶跃响应曲线

解 由图 P3-1 可知

$$\begin{cases} t_m=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=1.5 \\ \sigma\%=\dfrac{x_m-x(\infty)}{x(\infty)}\times 100\%=\dfrac{1.25-1}{1}\times 100\%=25\%=\mathrm{e}^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times 100\% \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \xi \approx 0.4 \\ \omega_n \approx 2.285 \end{cases}$$

本系统的开环传递函数整理为

$$W_K(s) = \frac{\dfrac{K_K}{\tau}}{s\left(s + \dfrac{1}{\tau}\right)}$$

与标准形式 $W_k(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$ 相对比，得

$$\begin{cases} \dfrac{K_K}{\tau} = \omega_n^2 = 2.285^2 \\ \dfrac{1}{\tau} = 2\xi\omega_n = 2 \times 0.4 \times 2.285 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} K_K \approx 2.856 \\ \tau \approx 0.547 \end{cases}$$

题 3-12　一单位反馈控制系统的开环传递函数为 $W_K(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$。已知系统的 $x_r(t)=1(t)$，误差时间函数为 $e(t)=1.4e^{-1.07t}-0.4e^{-3.73t}$，求系统的阻尼比 ξ、自然振荡角频率 ω_n、系统的开环传递函数和闭环传递函数、系统的稳态误差。

解　由典型系统的暂态特性可知，当 $\xi>1$ 时，系统的特征根为

$$-p_1 = -(\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n \qquad -p_2 = -(\xi + \sqrt{\xi^2-1})\omega_n$$

误差时间函数 $e(t)=x_r(t)-x_c(t)$。

本题中

$$X_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

所以

$$x_c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{1}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} - \frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}\right)$$

且

$$x_r(t) = 1$$

所以

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{1}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} - \frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}\right) \\ &= 1.4e^{-1.07t} - 0.4e^{-3.73t} \end{aligned}$$

比较指数项系数得

$$\begin{cases} (\xi - \sqrt{\xi^2-1})\omega_n = 1.07 \\ (\xi + \sqrt{\xi^2-1})\omega_n = 3.73 \end{cases} \tag{3-2}$$

由式(3-2)解得

$$\begin{cases} \xi = 1.2 \\ \omega_n = 2 \end{cases}$$

因此系统的开环传递函数为

$$W_K(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)} = \frac{4}{s(s+4.8)}$$

闭环传递函数为

$$W_B(s) = \frac{W_K(s)}{1+W_K(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{4}{s^2+4.8s+4}$$

系统的稳态误差为 $e(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=0$

题 3-13 已知单位反馈控制系统的开环传递函数为 $W_K(s)=\dfrac{K_K}{s(\tau s+1)}$，试选择 K_K 及 τ 值以满足下列指标：

(1) 当 $x_r(t)=t$ 时，系统的稳态误差 $e_v(\infty)\leqslant 0.02$；

(2) 当 $x_r(t)=1(t)$ 时，系统的 $\sigma\%\leqslant 30\%$，$t_s(5\%)\leqslant 0.3\text{s}$。

解

(1) 从系统的开环传递函数 $W_K(s)=\dfrac{K_K}{s(\tau s+1)}$，可以看出此系统为Ⅰ型系统，由稳态误差与系统类型的关系表(见表 3-1)得：

当 $x_r(t)=t$ 时，$e_v(\infty)=\dfrac{1}{K_K}\leqslant 0.02$，所以 $K_K\geqslant 50$。 (3-3)

表 3-1 稳态误差与系统类型关系表

N \ $e(\infty)$ \ x_r	$1(t)$	t	$\frac{1}{2}t^2$
0	$\frac{1}{1+K_K}$	∞	∞
Ⅰ	0	$\frac{1}{K_K}$	∞
Ⅱ	0	0	$\frac{1}{K_K}$

(2) 系统的闭环传递函数为

$W_B(s)=\dfrac{W_K(s)}{1+W_K(s)}=\dfrac{\frac{K_K}{\tau}}{s^2+\frac{1}{\tau}s+\frac{K_K}{\tau}}$，由题意得

① $\sigma\%=e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}\times 100\%\leqslant 30\%$，解得 $\xi\geqslant 0.358$

② $t_s(5\%)=\dfrac{3}{\xi\omega_n}\leqslant 0.3$，解得

$$\omega_n \geqslant 27.9$$

③ 与标准形式相对比，得

$$\begin{cases}\omega_n^2 = \dfrac{K_K}{\tau} \\ 2\xi\omega_n = \dfrac{1}{\tau}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}K_K \geqslant 38.9 \\ \tau \leqslant 0.05\end{cases} \tag{3-4}$$

由式(3-3)和式(3-4)得

$$\begin{cases}\tau \leqslant 0.05 \\ K_K \geqslant 50\end{cases}$$

题 3-14　已知单位反馈控制系统的闭环传递函数为 $W_B(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$，试画出以 ω_n 为常数、ξ 为变数时，系统特征方程式的根在 s 平面上的分布轨迹。

解　系统特征方程为

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$$

系统的特征根为

$$-p_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}\quad (|\xi|\geqslant 1)$$

或

$$-p_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\quad (|\xi|<1)$$

当 ω_n 为常数，ξ 为变数时，系统特征方程的根在 s 复平面上分布的轨迹为以原点为圆心、以 ω_n 为半径的圆，如图 3-1 所示。

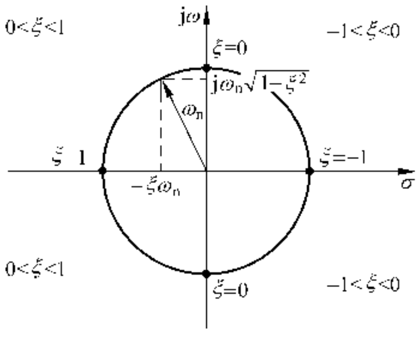

图 3-1　题 3-14 根轨迹分布图

题 3-15　一系统的动态结构图如图 P3-2 所示，求在不同的 K_K 值下(例如，$K_K=1$，$K_K=3$，$K_K=7$)系统的闭环极点、单位阶跃响应、动态性能指标及稳态误差。

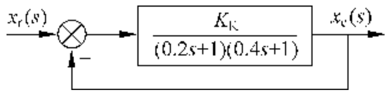

图 P3-2　题 3-15 的系统结构图

解　二阶系统的闭环与开环传递函数的标准型分别为

$$W_B(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2},\quad W_K(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

该系统的开环传递函数为

$$W_K(s)=\frac{K_K}{(0.2s+1)(0.4s+1)}=\frac{K_K}{0.08s^2+0.6s+1}$$

闭环传递函数为

$$W_B(s)=\frac{K_K}{0.08s^2+0.6s+1+K_K}=\frac{\frac{K_K}{0.08}}{s^2+7.5s+12.5(1+K_K)}$$
$$=\frac{\left(\frac{K_K}{0.08}\right)\times 0.08}{1+K_K}\times\frac{12.5(1+K_K)}{s^2+7.5s+12.5(1+K_K)}$$
$$=\frac{K_K}{1+K_K}\times\frac{12.5(1+K_K)}{s^2+7.5s+12.5(1+K_K)}$$

(1) 由系统特征方程 $s^2+7.5s+12.5(1+K_K)=0$ 可求得系统的闭环极点为

$$-p_{1,2}=\frac{-7.5\pm\sqrt{7.5^2-4\times 12.5(1+K_K)}}{2}=-3.75\pm 0.5\sqrt{6.25-50K_K}$$

当 $K_K=1$ 时，$-p_{1,2}=-3.75\pm \mathrm{j}3.3$；当 $K_K=3$ 时，$-p_{1,2}=-3.75\pm \mathrm{j}5.99$；当 $K_K=7$ 时，$-p_{1,2}=-3.75\pm \mathrm{j}9.27$。

(2) 不同 K_K 值时，ω_n 与 ξ 的计算。

① 当 $K_K=1$ 时

$$W_B(s)=0.5\times\frac{25}{s^2+7.5s+25}$$

与标准型相对比可得 $\omega_n=5$；由 $2\xi\omega_n=7.5$，得 $\xi=0.75$。

② 当 $K_K=3$ 时

$$W_B(s)=0.75\times\frac{50}{s^2+7.5s+50}$$

与标准型相对比可得 $\omega_n=\sqrt{50}=7.07$；由 $2\xi\omega_n=7.5$，得 $\xi=0.53$。

③ 当 $K_K=7$ 时

$$W_B(s)=0.875\times\frac{100}{s^2+7.5s+100}$$

与标准型相对比可得 $\omega_n=10$；由 $2\xi\omega_n=7.5$，得 $\xi=0.375$。

(3) 单位阶跃响应。

因为 $0<\xi<1$

所以 $$x_c(t)=\alpha\cdot\left[1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\right]$$

其中 $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$，$\theta=\arctan\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$，$\alpha=\dfrac{K_K}{1+K_K}$。

① $K_K=1$ 时

$$\omega_d=5\sqrt{1-0.75^2}=3.31$$
$$\theta=41.4^\circ=0.72\text{rad}$$
$$x_c(t)=0.5[1-1.5e^{-3.75t}\sin(3.31t+0.72)]$$

② $K_K=3$ 时

$$\omega_d=7.07\sqrt{1-0.53^2}=6.0$$
$$\theta=58^\circ=1.01\text{rad}$$
$$x_c(t)=0.75[1-1.179e^{-3.75t}\sin(6.0t+1.01)]$$

③ $K_K=7$ 时

$$\omega_d=10\sqrt{1-0.375^2}=9.3$$
$$\theta=68^\circ=1.186\text{rad}$$
$$x_c(t)=0.875[1-1.079e^{-3.75t}\sin(9.3t+1.186)]$$

(4) 动态指标。

由公式

$$\sigma\%=e^{-\left(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}\times100\% \quad t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}$$

$$t_m=\frac{\pi}{\omega_d} \quad t_s(5\%)=\frac{3}{\xi\omega_n} \quad t_s(2\%)=\frac{4}{\xi\omega_n}$$

得

$$\sigma\%=\begin{cases}2.84\% & (K_K=1)\\ 14\% & (K_K=3)\\ 28.1\% & (K_K=7)\end{cases} \quad t_r=\begin{cases}0.73\text{s} & (K_K=1)\\ 0.355\text{s} & (K_K=3)\\ 0.21\text{s} & (K_K=7)\end{cases}$$

$$t_m=\begin{cases}0.949\text{s} & (K_K=1)\\ 0.52\text{s} & (K_K=3) \quad t_s(5\%)=0.8\text{s}\\ 0.338\text{s} & (K_K=7) \quad t_s(2\%)=1.067\text{s}\end{cases}$$

由上述结果知，α 的取值不影响系统的动态指标。

(5) 稳态误差。

由 $W_K(s)$看出该系统是 0 型系统，根据稳态误差与系统类型的关系表(见表 3-1)得

$$e(\infty)=\begin{cases}0.5 & (K_K=1)\\ 0.25 & (K_K=3)\\ 0.125 & (K_K=7)\end{cases}$$

题 3-16 一闭环反馈控制系统的动态结构图如图 P3-3 所示。

(1) 试求当 $\sigma\%\leqslant20\%$，$t_s(5\%)=1.8\text{s}$ 时，系统的参数 K_1 及 τ 值。

(2) 试求上述系统的位置稳态误差系数 K_p、速度稳态误差系数 K_v、加速度稳态误差系数 K_a 及其相应的稳态误差。

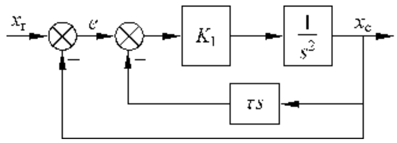

图 P3-3　题 3-16 的系统结构图

解　(1) 系统开环传递函数为

$$W_K(s)=\frac{\dfrac{K_1}{s^2}}{1+\dfrac{K_1\tau s}{s^2}}=\frac{K_1}{s(s+K_1\tau)}=\frac{\dfrac{1}{\tau}}{s\left(\dfrac{1}{K_1\tau}s+1\right)}$$

与标准型相对比，得

$$\begin{cases}\omega_n^2=K_1\\ 2\xi\omega_n=K_1\tau\\ K_K=\dfrac{1}{\tau}\end{cases}$$

由 $\sigma\%\leqslant 20\%$，得

$$\xi\geqslant-\frac{\ln 0.2}{\sqrt{\pi^2+(\ln 0.2)^2}}\approx 0.46$$

由 $t_s(5\%)=1.8$，得

$$\omega_n\leqslant\frac{3}{\xi t_s}=3.65$$

所以

$$\begin{cases}K_1\leqslant 13.32\\ \tau\geqslant 0.25\end{cases}\quad 即\begin{cases}K_1=13.32\\ \tau=0.25\\ K_K=4\end{cases}$$

(2) 由 W_K 可知该系统为Ⅰ型系统，由表 3-1 并根据稳态误差与稳态误差系数之间的关系，得

$$e_p(\infty)=0,\qquad K_p=\infty$$

$$e_v(\infty)=\frac{1}{K_K}=0.25,\quad K_v=4$$

$$e_a(\infty)=\infty,\qquad K_a=0$$

题 3-17　一系统的动态结构图如图 P3-4 所示。试求：

(1) $\tau_1=0$，$\tau_2=0.1$ 时，系统的 $\sigma\%$，$t_s(5\%)$；

(2) $\tau_1=0.1$，$\tau_2=0$ 时，系统的 $\sigma\%$，$t_s(5\%)$；

(3) 比较上述两种校正情况下的动态性能指标及稳态性能。

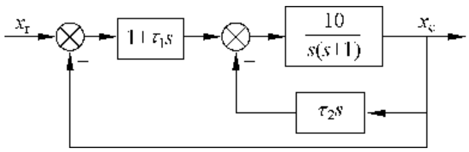

图 P3-4　题 3-17 的系统动态结构图

解　(1) $\tau_1=0$，$\tau_2=0.1$ 时系统的闭环传递函数为

$$W_B(s)=\frac{10}{s^2+(1+10\tau_2)s+10}=\frac{10}{s^2+2s+10}$$

所以

$$\omega_n=\sqrt{10}=3.16$$

$$\xi=\frac{2}{6.32}=0.316$$

由二阶系统的计算公式得

$$\sigma\%=e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})}\times 100\%\approx 35\%$$

$$t_s(5\%)=\frac{3}{\xi\omega_n}\approx 3s$$

(2) $\tau_1=0.1$，$\tau_2=0$ 时系统的闭环传递函数为

$$W_B(s)=\frac{10(0.1s+1)}{s^2+2s+10}$$

可以看出此时系统为具有零点的二阶系统，其标准型为

$$W_B=\frac{\omega_n^2(\tau_1 s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

与之相对比，可得

$$z=\frac{1}{\tau_1}=10 \tag{3-5}$$

$$\omega_n=\sqrt{10}=3.16 \tag{3-6}$$

$$\xi=\frac{1}{3.16}=0.316 \tag{3-7}$$

根据具有零点的二阶系统的计算公式，得

$$l=\sqrt{(z-\xi\omega_n)^2+(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}=9.5 \tag{3-8}$$

$$r=\frac{\xi\omega_n}{z}=0.1 \tag{3-9}$$

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=\arctan 3\approx 71.9°=1.25\text{rad} \tag{3-10}$$

$$\varphi=\arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}{z-\xi\omega_n}=\arctan 0.33=18.42°=0.32\text{rad} \tag{3-11}$$