

第3章 单输入单输出非线性 最优控制系统设计原理

3.1 引言

从本章将会发现本书的一个显著特点,即总是将非线性最优控制原理与非线性最优控制器的设计方法结合在一起加以阐述。从工程实践的观点看问题,一种新的控制理论的出现和发展最终是为设计和研制出更新更好的控制器这一目的服务的。古典控制理论是这样,线性最优控制理论是这样,现在论述的非线性最优控制理论的新体系也不会离开这一实践性的目标。从另一方面看,一种控制理论只有在按照它所设计的控制系统在工程实际中得到应用并发挥效益时才能体现其价值;同时也只有在广泛使用中才能发现其不足并得到改进与发展。这是控制理论所具有的不同于某些基础学科理论(如纯数学、天文学等)的一个重要特点,即它的直接的鲜明的实践性的品格。

本章针对单输入单输出仿射非线性系统提出并阐明三种设计方法,即状态反馈精确线性化的设计方法、零动态的设计方法和输出对干扰解耦的设计方法。前两种设计方法主要是针对改善系统稳定性及动态品质的目的;最后这种方法,不言而喻,其主要出发点是为了使控制系统获得高抗干扰的能力。为帮助读者理解,在每种方法论述以后都加有一则例题。

在状态反馈精确线性化的设计原理中,提出并解决了两方面问题。第一个问题就是如何确定一给定的非线性系统是否可被精确线性化为完全能控的线性系统。这是精确线性化的充分和必要条件。在这方面,我们将引述一则著名的定理——Frobenius 定理,并由此引出状态反馈精确线性化的条件。另一个重要问题就是算法问题,即如何求得状态非线性反馈规律的问题。如果算法不解决,原理的应用就会落空。这个问题在文献[27]中得到了较好解决,本章中所阐明的算法主要参考这一文献。

零动态的设计方法,是一种构思比较“巧妙”的设计方法。虽然理论上不够严格和完美,但往往能给出较好的设计效果。究竟采用何种设计方法为佳,只能对具体系统作具体分析后才能确定。如果设计者一时不能确定运用何种设计方法为

佳,也可按不同方法设计,然后用动态仿真的方法作出选择。这是一种常用的控制规律和方案选择的方法。

3.2 状态反馈精确线性化设计原理

在前面已经阐明,对于一个非线性系统,若采用一点处近似线性化的数学模型,按线性系统的设计方法进行设计所得的控制规律,一般来说,远不能使得该系统的实际运行状态在远离近似线性化所选的状态点处获得符合要求的稳定性能和动态品质。为了克服这个困难,对于慢动态过程的非线性系统,可以采用控制器参数跟随状态的改变进行在线调整的自适应技术来加以补偿。但对于动态过程较快的电力系统一类的系统,采用这种方法却难以奏效。工程控制界早就期待着能发展一种使非线性系统在它的整个状态空间上或状态空间的一个足够大的域中精确线性化的理论和方法,按这种理论与方法设计的控制系统,可以解决上述近似线性化带来的弊端。近几年的非线性控制系统理论研究成果告诉人们:采用非线性状态反馈和恰当的坐标变换,在一定条件下,可以将一个仿射非线性系统进行精确线性化,并且这个状态反馈可保证控制系统的稳定性,且有好的动态品质。

在本节中,将要研究一个单输入单输出的仿射非线性系统在何种条件下可用状态反馈及坐标变换使其精确线性化。同时还着重阐明如何选择这种坐标变换和如何求得这种状态反馈规律。在后续章节中,我们将会看到,本节所阐明的原理与方法是如何被推广到多输入多输出仿射非线性系统中去的。

3.2.1 关系度 r 等于系统阶数 n 的线性化设计原理

为了完整性起见,让我们从头开始叙述。所讨论的非线性系统为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

式中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量; $u \in \mathbf{R}^1$ 为控制量; $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^1$ 为输出量; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 及 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 为状态空间中 n 维向量场; $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x}$ 的标量函数。

现假设系统的关系度 r 等于系统状态向量 $\mathbf{x}$ 的维数 n , 即 $r=n$ 。

对于这种情况,已在 2.9 节中进行了初步讨论。由式(2.78)可知,为了建立以新坐标系 $\mathbf{z}$ 表述的标准形式的动态系统,坐标映射 Φ 应该这样选择:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

式中, $\Phi(\mathbf{x})$ 是局部微分同胚。由 2.9 节的论述可知,按式(3.2)所选择的坐标变换

在系统关系度 r 等于系统阶数 n 的条件下,原系统(3.1)可转化为以下的标准型:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ z_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = a(x) + b(x)u \mid_{x=\Phi^{-1}(z)} \end{cases} \quad (3.3)$$

式中, $a(x)$ 和 $b(x)$ 为 x 的非线性标量函数。式(3.3)所示的标准型中的第一至第 $n-1$ 个方程都已被线性化,只剩下最后一个含有控制量 u 的方程是非线性的。

为了将式(3.3)所示的系统完全精确线性化,在式(3.3)中令

$$v = a(x) + b(x)u \quad (3.4)$$

由 2.9 节中的论述可知,此处 $b(x) \neq 0$ 。在此可得到以下两条结论:

第一,得到了一个以新坐标系 $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$ 描述的完全可控的已被精确线性化了的系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \end{cases} \quad (3.5)$$

式(3.5)所示的这种形式称为 Brunovsky 标准型。式(3.5)可写成

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (3.6)$$

此处

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第二,根据关系度的定义,式(3.3)中的 $b(x) \neq 0$,所以由式(3.4)可得出控制 u 的表达式为

$$u = -\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{1}{b(x)}v \quad (3.7)$$

由 2.9 节可知,此处

$$a(x) = L_f^r h(x) \quad (3.8)$$

$$b(x) = L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (3.9)$$

至此为止,在式(3.7)所示的控制规律的表达式中,只有 v 是尚未被确定的。以下

将进一步说明如何确定式(3.7)中的控制量 v 。为了与欲求的最终控制量 $u(x)$ 相区别,此处将 v 称为预控变量。

由式(3.5)或式(3.6)可见, v 是 Brunovsky 标准型线性系统中的控制量,因此最合理的途径是运用具有二次型性能指标的线性最优控制设计方法(LQR 方法)来得到它。现在来简单回顾 LQR 设计原理与方法^[18]。

设有线性控制系统为

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \quad (3.10)$$

式中, $\mathbf{z}$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{v}$ 为 m 维控制向量; $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 分别为 $n \times n$ 状态系数矩阵与 $n \times m$ 控制系数矩阵。矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 满足以下条件: 矩阵

$$\mathbf{D} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

的秩(记为 r)等于 n 。该条件意味着系统(3.10)是完全可控的。所给定的系统(3.10)的性能指标为二次型的,即

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v}) dt \quad (3.11)$$

式中, $\mathbf{Q}$ 为正定或半正定的 $n \times n$ 权矩阵; $\mathbf{R}$ 为正定的 $m \times m$ 权矩阵。

问题的提法是: 根据状态方程(3.10)求使性能指标 J 达极值(极大值或极小值)的状态反馈向量

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{z}(t)) = \begin{bmatrix} v_1(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\ v_2(z_1, z_2, \cdots, z_n) \\ \vdots \\ v_m(z_1, z_2, \cdots, z_n) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

这就是线性二次型最优控制问题(LQR 问题)的提法。

性能指标(3.11)中的 J 是 $\mathbf{z}$ 与 $\mathbf{v}$ 的函数,而 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \cdots, z_n]^T$ 与 $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_m]^T$ 又是时间 t 的函数,因而 J 是 $\mathbf{z}(t)$ 与 $\mathbf{v}(t)$ 的泛函,所以线性二次型最优控制问题从数学上看是一个约束变分问题,即求在约束

$$-\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

下的泛函

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v}) dt \quad (3.14)$$

的极值条件。

根据变分法理论中的 Lagrange 方法,应采用以下步骤解决上述问题:

第一步 针对式(3.14)所示的性能指标泛函及式(3.13)所示的约束方程作辅助泛函

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v}) + \boldsymbol{\Lambda}^T(t)(\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{v} - \dot{\mathbf{z}})] dt \quad (3.15)$$

式中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 为 n 维 Lagrange 乘子函数向量,又称副状态向量(co-state vector)。

第二步 定义一个标量函数——Hamilton 函数

$$H(\mathbf{z}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{B} \mathbf{v}) \quad (3.16)$$

这样式(3.15)所示的辅助泛函 $\bar{J}$ 可写为

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (H(\mathbf{z}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{v}) - \mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{z}}) dt \quad (3.17)$$

以 $\bar{F}$ 表示式(3.17)中的被积式,即

$$\bar{F} = H(\mathbf{z}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{v}) - \mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{z}} \quad (3.18)$$

第三步 根据变分法理论中的 Euler-Lagrange 方程,有约束的泛函极值必要条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{z}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{\mathbf{v}}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{\Lambda}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \dot{\mathbf{\Lambda}}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.19)$$

将式(3.18)代入式(3.19)中,可得性能指标泛函 J 的极值条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial H(\mathbf{z}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{z}} + \dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial H(\mathbf{z}, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{v} \end{cases} \quad (3.20)$$

第四步 将式(3.16)所给出的 Hamilton 函数表达式代入式(3.20)所表达的性能指标泛函 J 的极值条件中,并作一线性变换,即令

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{P} \mathbf{z}(t) \quad (3.21)$$

式中, $\mathbf{P}$ 为非奇异 $n \times n$ 系数矩阵,则得到使性能指标泛函 J 达极值的控制向量 $\mathbf{v}$ 为

$$\mathbf{v}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}^* \mathbf{z}(t) = -\mathbf{K}^* \mathbf{z}(t) \quad (3.22)$$

其中 $\mathbf{v}^*$ 表示最优预控制向量, $\mathbf{K}^*$ 为最优反馈增益矩阵,即有

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.23)$$

此处, $\mathbf{P}^*$ 为 Riccati 矩阵方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

的解。

以上以极其简洁的方式复习了线性二次型最优控制原理。关于这方面更为详尽的论述,可参阅文献[11]的第3章与第6章,这里不再详述。以上得到的一条重要结论是:线性系统二次型性能指标的最优预控制解 $\mathbf{v}$ 仍是状态变量的线性反

馈,即

$$\mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_m^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* & \cdots & k_{1n}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* & \cdots & k_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1}^* & k_{m2}^* & \cdots & k_{mn}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

所以有

$$v_i^* = -k_{i1}^* z_1 - k_{i2}^* z_2 - \cdots - k_{in}^* z_n \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.26)$$

以下再回到单输入单输出仿射非线性控制系统的设计原理中来。我们的一个主要目的是要求得非线性控制系统(3.1)的状态反馈表达式 $u = u(\mathbf{x}(t))$, 为此, 需将式(3.7)中的 v 以式(3.26)所示的关系代入。在式(3.7)中令

$$v = v^* = -k_1^* z_1 - k_2^* z_2 - \cdots - k_n^* z_n \quad (3.27)$$

又, 根据式(3.2)已给出的坐标变换关系可知

$$\begin{cases} z_1 = h(\mathbf{x}) \\ z_2 = L_f h(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ z_n = L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3.28)$$

将式(3.28)的坐标转换关系代入式(3.27)中, 则有

$$v = -k_1^* h(\mathbf{x}) - k_2^* L_f h(\mathbf{x}) - \cdots - k_n^* L_f^{n-1} h(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

现在, 将式(3.29)代入式(3.7)中, 并同时考虑式(3.8)及式(3.9)的关系, 就可以得到所要求的系统(3.1)的非线性状态反馈 u 的表达式为

$$u = -\frac{L_f^n h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})} - \frac{k_1^* h(\mathbf{x}) + k_2^* L_f h(\mathbf{x}) + \cdots + k_n^* L_f^{n-1} h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})} \quad (3.30)$$

或

$$u = -\frac{L_f^n h(\mathbf{x}) + k_1^* h(\mathbf{x}) + k_2^* L_f h(\mathbf{x}) + \cdots + k_n^* L_f^{n-1} h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{n-1} h(\mathbf{x})} \quad (3.31)$$

此处, $k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*$ 由式(3.23)及式(3.24)求出。

下面对上述内容作一个简短的小结。

设有一单输入单输出 n 阶非线性控制系统由下列方程描述:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

若其关系度 $r=n$, 则可通过非线性状态反馈

$$v = a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \quad (3.32)$$

此处

$$a(\mathbf{x}) = L_f^n h(\mathbf{x})$$

$$b(x) = L_g L_f^{n-1} h(x)$$

以及微分同胚的坐标变换

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$$

使得原非线性系统转化为一个完全可控的线性系统

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (3.33)$$

此处, 矩阵 A 和 B 为 Brunovsky 标准型。

可见, 原系统的控制量 u 与被精确线性化了的系统(3.33)的预控制量 v 之间有式(3.32)所示的关系。式(3.32)中的 v 一旦确定, 控制量 u 也就随之确定。为了使非线性控制系统有好的动态品质, 应这样来确定 v , 使得对于线性系统(3.33)是最优控制, 即使得

$$v = v^* = -R^{-1} B^T P^* z(t) = -K^* z(t)$$

这里 P^* 是 Riccati 矩阵方程(3.24)的解。

考虑到 $z = \Phi(x)$ 的坐标转换关系, 非线性控制规律则为

$$u = - \frac{L_f^n h(x) + k_n^* L_f^{n-1} h(x) + \cdots + k_2^* L_f h(x) + k_1^* h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \quad (3.34)$$

这里自然的会产生一个在第2章的最后所提到过的问题, 即能使精确线性化的系统(3.33)达到最优性能指标的预控制 v 能否使式(3.34)所表达的控制规律 u 对于原非线性系统也是最优的。以下将通过 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程(以下简称 HJB 方程)讨论非线性控制律(3.34)的最优性。

3.2.2 非线性控制律最优性讨论

根据前面的讨论可知, 针对非线性系统(3.1), 通过坐标变换(3.2)和反馈(3.4)可将其变换成线性系统 $\dot{z}(t) = Az + Bv$, 但该式又可写成下述形式:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}_1 = D\tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}}_2 = v \end{cases} \quad (3.35)$$

式中

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times n} \quad (3.36)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bar{z}_2 = z_n \quad (3.37)$$

现在考虑线性系统(3.35)的线性最优控制问题。首先取泛函性能指标

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + r_0 v^2) dt \quad (3.38)$$

式中, $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为正定或半正定矩阵; $r_0 > 0$ 为一给定的正数。

对系统(3.35)和性能指标 J_1 , 根据前述线性二次型最优控制原理, 可以求得线性最优控制律为

$$v^* = -\mathbf{B}^T \mathbf{P}^* \mathbf{z} / r_0 \quad (3.39)$$

式中, $\mathbf{P}^* \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是下述 Riccati 方程的正定解:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} / r_0 + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

将最优控制律(3.39)和坐标变换(3.2)代入式(3.7), 可以得到非线性控制律

$$u^* = -\frac{a(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^T \mathbf{P}^* \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) r_0^{-1}}{b(\mathbf{x})} \quad (3.41)$$

由于我们并不清楚在设计过程中引入的参考输出信号 v 的物理意义, 故性能指标(3.38)的物理意义并不清晰。

接下来需要讨论并回答非线性控制律(3.41)在什么样的性能指标下是系统(3.1)的最优控制律。

首先根据系统(3.35)和反馈(3.4), 有

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{z} \\ a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z}) u \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

式中, $a(\mathbf{z}) = a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})}$; $b(\mathbf{z}) = b(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{z})}$ 。

考察性能指标

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \dot{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}}) dt \quad (3.43)$$

式中

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} & r_0 \end{bmatrix}$$

对系统(3.42), 其最优控制问题为该系统状态方程约束条件下的泛函性能指标 $\bar{J}$ 的极值问题, 即

$$\min_u \bar{J}$$

约束条件

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{z} \\ a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z}) u \end{bmatrix}$$

根据最优控制理论^[70],该问题的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{z}} + \left(\frac{\partial^T V}{\partial \mathbf{z}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{z} \\ a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z}) u \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

进一步,依然根据最优控制理论,所求的最优控制律 u^* 必须满足下述 HJB 方程:

$$\begin{cases} \min_u H\left(\mathbf{z}, u, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}}, t\right) = 0 \\ V(\mathbf{0}) = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

式中, V 是该优化问题的值函数。

求解方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (3.46)$$

可以得到下述形式的最优控制律:

$$u_* = - \frac{a(\mathbf{z}) + r_0^{-1} [\mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \quad 1] \frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}}}{b(\mathbf{z})} \quad (3.47)$$

将上式代入式(3.45)并假定 $V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$ ($\mathbf{P}$ 是正定矩阵),则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} r_0^{-1} [\mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \quad 1] \mathbf{P} \mathbf{z} \\ & + \mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \mathbf{z} \\ -r_0^{-1} [\mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \quad 1] \mathbf{P} \mathbf{z} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

上式可进一步简化为

$$\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} - \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} r_0^{-1} [\mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \quad 1] \mathbf{P} \mathbf{z} + \mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} \end{bmatrix} \mathbf{z} = 0 \quad (3.48)$$

因此确定 $\mathbf{P}$ 等价于求解 Riccati 方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix} - \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} r_0^{-1} [\mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \quad 1] \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

可以看出,式(3.40)和式(3.49)是同一个 Riccati 方程,因此,它们必定有同样的解

$\mathbf{P}^*$ 。将 $V(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{P}^* \mathbf{z}$ 和 $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ 代入式(3.47),可以得到最优控制律

$$u_* = - \frac{a(\mathbf{x}) + r_0^{-1} [\mathbf{0}_{1 \times (n-1)} \quad 1] \mathbf{P}^* \Phi(\mathbf{x})}{b(\mathbf{x})} \quad (3.50)$$

比较式(3.41)和式(3.50),有

$$u^* = u_*$$

上式说明根据精确反馈线性化方法求得的非线性控制律 u^* 等同于系统(3.42),即

系统(3.1)在性能指标 $\bar{J}$ 意义下的最优控制律 u_* 。

综上所述,最后得出的结论是非线性控制律(3.34)是非线性系统(3.1)在性能指标

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\Phi^T(x) Q \Phi(x) + \left(\frac{d\Phi(x)}{dx} \dot{x} \right)^T \bar{R} \left(\frac{d\Phi(x)}{dx} \dot{x} \right) \right) dt \quad (3.51)$$

意义下的最优控制律。

为了加深对上述设计方法的理解,可以更形象化一点地用图 3.1 所示的原理性结构图加以概括。

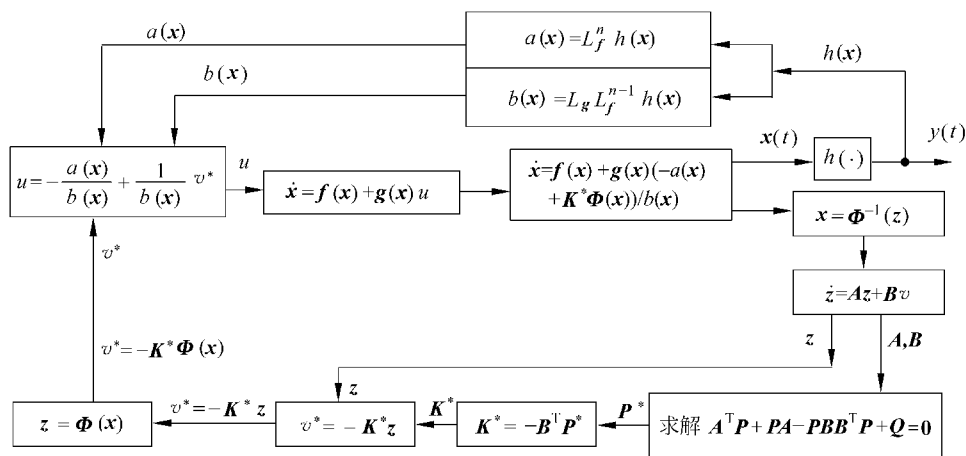


图 3.1 状态反馈精确线性化设计原理图

下面通过一个例题具体说明状态反馈精确线性化的演算过程和最优状态反馈规律的求解过程。

例 3.1 给定系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.52a)$$

$$y = x_3$$

此处

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad h(x) = x_3$$

以下对于所给定的系统计算其所需的 Lie 导数,有