序

高等代数是大学数学科学学院(或数学系,应用数学系)最主要的基础课程之一。本套教材是作者在北京大学进行高等代数课程建设和教学改革的成果,它具有下述鲜明特色。

1. 明确主线:以研究线性空间和多项式环的结构及其态射(线性映射,多项式环的通用性质)为主线。自从1832年伽罗瓦(Galois)利用一元高次方程的根的置换群给出了方程有求根公式的充分必要条件之后,代数学的研究对象发生了根本性的转变。研究各种代数系统的结构及其态射(即保持运算的映射)成为现代代数学研究的中心问题。20世纪,代数学研究结构及其态射的观点已经渗透到现代数学的各个分支中。因此,在高等代数课程的教学中贯穿研究线性空间和多项式环的结构及其态射这条主线,就是把握住了代数学的精髓。

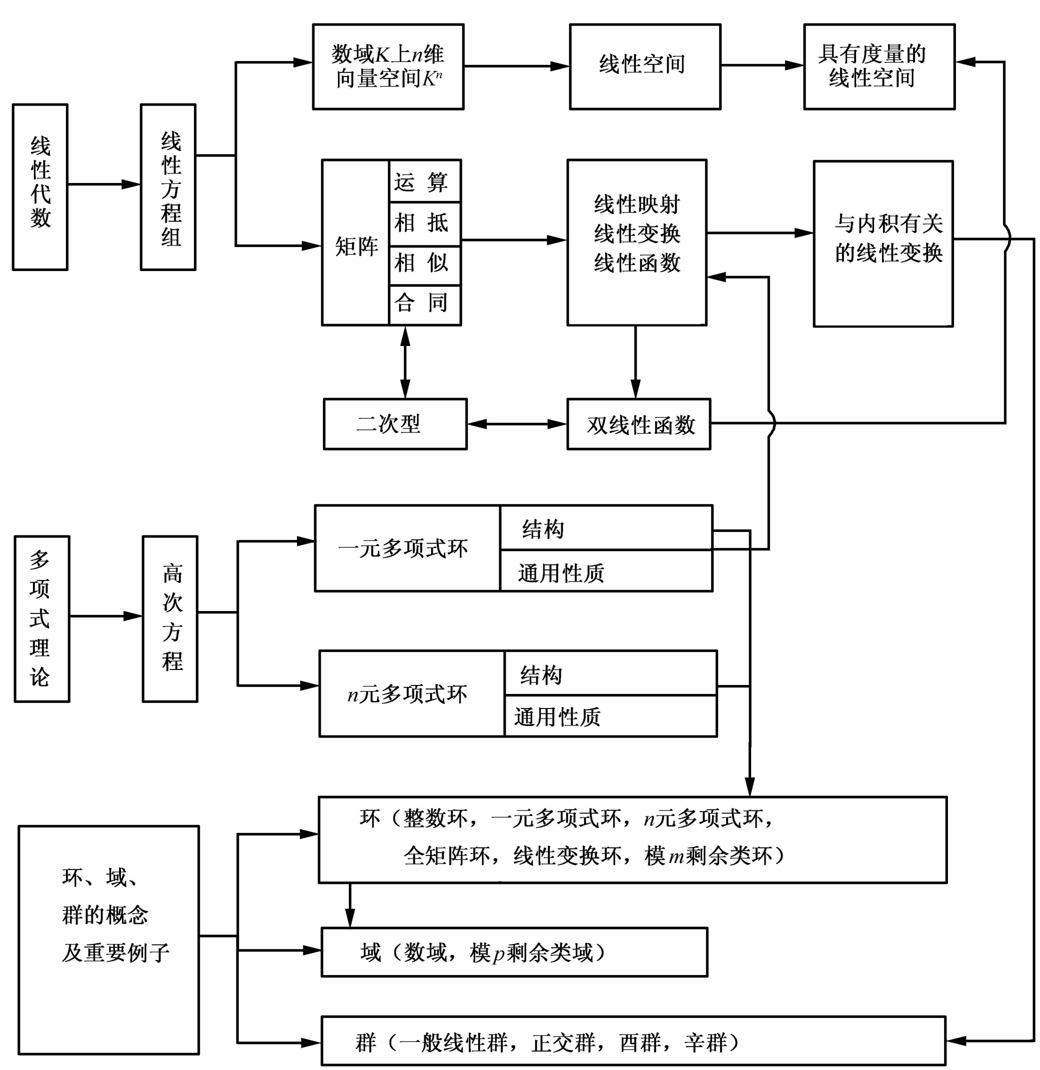
本套教材上册的第1,2,3章研究线性方程组的解法、解的情况的判别和解集的结构时,贯穿了研究数域 K 上 n 维向量空间 K^n 及其子空间的结构这条主线。线性方程组是数学中最基础、最有用的知识,n 维向量空间 K^n 是 n 维线性空间的一个具体模型,n 元齐次线性方程组的解空间的维数公式本质上是线性映射的核与值域的维数公式。因此把线性方程组和 n 维向量空间 K^n 作为高等代数课程的开始部分的内容,既符合学生的认知规律,又是高等代数知识的内在规律的体现。上册的第4,5,6章研究矩阵的运算,矩阵的相抵、相似、合同关系及与它们有关的矩阵的特征值和特征向量、二次型。研究矩阵的运算为研究线性映射打下了基础。矩阵的相抵关系在解决有关矩阵的秩的问题中起着重要作用,而矩阵的秩本质上是相应的线性映射的值域的维数。研究矩阵的相似标准形本质上是研究线性变换在一个合适的基下的矩阵具有最简单的形式。研究对称矩阵的合同标准形与研究二次型的化简密切相关,而二次型与线性空间 V 上的双线性函数有密切联系。

本套教材下册的第7章研究一元和 n 元多项式环的结构及其态射(多项式环的通用性质),第8章研究线性空间的结构,第9章研究线性映射,第10章研究具有度量的线性空间的结构及与度量有关的线性变换。第11章研究多重线性代数时,基础概念是多重线性映射,主要工具是线性空间的张量积。

2. 内容全面。本套教材包括线性代数,多项式理论,环、域、群的概念及重要例子,多重线性代数,共四部分。在下册第7章从数域 K 上所有一元多项式组成的集合、整数集、数域 K 上所有 n 级矩阵组成的集合都有加法和乘法运算,自然而然地引出了环的概念;从数域 K 上所有分式组成的集合、模 p 剩余类(p 是素数)组成的集合,水到渠成地引出了域的概念。于是我们在下册第8章讲的是任意域上的线性空间,而不只是数域上的线

性空间。这是当今信息时代的需要,因为在信息的安全与可靠中大量使用二元域上的线性空间理论。我们不仅着重研究有限维的线性空间,也研究无限维的线性空间,因为许多函数空间都是无限维线性空间。我们在第 9 章不仅研究线性变换的 Jordan 标准形,而且研究线性变换的有理标准形。我们在第 10 章不仅研究欧几里得空间和酉空间,而且研究正交空间和辛空间;不仅研究欧几里得空间上的正交变换、对称变换,酉空间上的酉变换,而且研究酉空间上的 Hermite 变换、正规变换。在第 10 章讲了欧几里得空间上的正交变换,酉空间上的酉变换,正交空间上的正交变换,辛空间上的辛变换之后,水到渠成地引出群的概念,介绍了正交群、酉群、辛群。我们在第 11 章研究了线性空间的张量积,张量及张量代数,外代数(或格拉斯曼(Grassmann)代数),它们在微分几何、现代分析、群表示论和量子力学等领域中有重要应用。

本套教材的第一、二、三个组成部分,内容之间的内在联系可以用下述框图来表示:



3. 理论深刻。本套教材阐述了深刻的理论，证明了许多重要结论。举例如下：

矩阵 A 的秩是 A 的行向量组的秩，也是 A 的列向量组的秩。A 的秩等于 A 的不为零的子式的最高阶数，等于 A 的行向量组生成的子空间（简称为行空间）的维数，等于 A 的列向量组生成的子空间（简称为列空间）的维数。设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A，则 A 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的值域的维数。设 V 中向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的坐标组成的矩阵为 B，则 B 的秩等于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 生成的子空间的维数。由此可知，矩阵的秩是一个非常深刻的概念，它有许多重要应用。例如，线性方程组有解的充分必要条件是它的系数矩阵与增广矩阵有相等的秩。n 元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数等于 $n-\mathrm{rank}(A)$。矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,B)$。矩阵方程 $ABX=A$ 有解的充分必要条件是 $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$。矩阵方程 $AX-YB=C$ 有解的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

域 F 上 n 级矩阵 A 是幂等矩阵（即 $A^2=A$）当且仅当

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I-A) = n.$$

特征不等于 2 的域 F 上 n 级矩阵 A 是对合矩阵（即 $A^2=I$）当且仅当

$$\mathrm{rank}(A+I) + \mathrm{rank}(A-I) = n.$$

设 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是域 F 上的 n 级矩阵，则 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都是幂等矩阵且 $A_iA_j=0$（当 $i\neq j$）的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{s} A_i \text{ 是幂等矩阵，且 } \mathrm{rank}\left(\sum_{i=1}^{s} A_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{rank}(A_i).$$

Sylvester 秩不等式：设 A、B 分别是域 F 上 $s\times n$，$n\times m$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(AB) \geqslant \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - n.$$

在 Sylvester 秩不等式中，等号成立的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

设 A,B 分别是域 F 上 $s\times n$，$n\times s$ 矩阵，则

$$\mathrm{rank}(A-ABA) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(I_n - BA) - n.$$

从而 B 是 A 的一个广义逆当且仅当 $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I_n-BA)=n$。

设 A,B,C,D 都是数域 K 上的 n 级矩阵，且 $AC=CA$，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|.$$

设 A,B 分别是数域 K 上的 $s\times n$，$n\times s$ 矩阵，则

$$|I_s - AB| = |I_n - BA|.$$

利用这个结论证得，AB 与 BA 有相同的非零特征值，并且重数相同。

设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ 是数域 K 上 n 级对称矩阵，且 A_1 是 r 级可逆矩阵，则

$$A \simeq \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_2'A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix},\ |A| = |A_1|\,|A_4 - A_2'A_1^{-1}A_2|.$$

利用这个结论简洁地证得,实对称矩阵 A 是正定的充分必要条件是:A 的所有顺序主子式全大于 0。利用上述结论还证得,设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$ 是 n 级正定矩阵,则 $|M| \leqslant |A|\,|D|$,等号成立当且仅当 $B=0$。进而证得,若 $A=(a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵,则 $|A| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,等号成立当且仅当 A 是对角矩阵。由此立即得到 Hadamard 不等式:

若 $C=(c_{ij})$ 是 n 级实矩阵,则 $|C|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}(c_{1j}^2 + c_{2j}^2 + \cdots + c_{nj}^2)$.

数域 K 上 n 级矩阵 A 能够分解成一个主对角元都为 1 的下三角矩阵 B 与可逆上三角矩阵 C 的乘积 $A=BC$(称为 LU-分解)当且仅当 A 的各阶顺序主子式全不为 0,并且 A 的这种分解是唯一的。

n 级实可逆矩阵 A 能够唯一地分解成正交矩阵 T 与主对角元都为正数的上三角矩阵 B 的乘积 $A=TB$。

设 A 是 $m\times n$ 列满秩实矩阵,则 A 能够唯一地分解成 $A=QR$,其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵,R 是主对角元都为正数的 n 级上三角矩阵,这称为 QR-分解。

设 A 是 n 级实可逆矩阵,则存在正交矩阵 T 和两个正定矩阵 S_1,S_2,使得 $A=TS_1=S_2T$,并且 A 的这两种分解的每一种都是唯一的。(这称为极分解定理)。

设 A 是 n 级复可逆矩阵,则存在酉矩阵 P 和两个正定 Hermite 矩阵 H_1,H_2,使得 $A=PH_1=H_2P$,并且 A 的这两种分解的每一种都是唯一的。(这也称为极分解定理)。

对于任一 n 级实可逆矩阵 A,存在两个正交矩阵 T_1,T_2,使得 $A=T_1\,\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}T_2$,其中 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的全部特征值。

设 A 是 $m\times n$ 实矩阵,则 A 可以分解成 $A=QDT'$,其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m\times n$ 矩阵;D 是主对角元 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全为非负数的 n 级对角矩阵,且 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的全部特征值;T 是 n 级正交矩阵,它的第 j 列是 $A'A$ 的属于特征值 λ_j^2 的一个特征向量,$j=1,2,\cdots,n$。A 的这种分解称为奇异值分解,其中 D 的非零的主对角元称为 A 的奇异值。A 的奇异值分解在生物统计学等领域中有应用。

设 $f(x),g(x)\in F[x]$,域 $E\supseteq F$,则在 $F[x]$ 中 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当在 $E[x]$ 中 $g(x)\mid f(x)$,称之为整除性不随域的扩大而改变。$f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式也不随域的扩大而改变,从而互素性也不随域的扩大而改变。若 F 是特征为 0 的域,则 $f(x)$ 有无重因式不随域的扩大而改变。我们证明了:设 A 是域 F 上的 n 级矩阵,域 $E\supseteq F$,则 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 不随域的扩大而改变。显然,A 的特征多项式不随域的扩大而改变。我们还证明了:A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根(重数可以不同),在域 E 中也有相同的根(重数可以不同)。

本套教材在研究线性空间的结构时,证明了有限维线性空间的许多结论对于无限维线性空间也成立。例如,域 F 上线性空间 V 的两个子空间 V_1,V_2(它们可以是无限维的)的和是直和当且仅当 V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 V_1+V_2 的一个基。域 F 上线

性空间 V 的任一子空间 W(可以是无限维的)都有补空间,即存在 V 的子空间 U,使得 $V=W\oplus U$。从而对于 V 的任一子空间 W,都存在平行于 W 的一个补空间 U 在 W 上的投影 $\boldsymbol{P}_W$,并且 $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{P}_W=W$, $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{P}_W=U$。

若 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的幂等线性变换,则 $\boldsymbol{A}$ 是平行于 $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ 在 $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ 上的投影,且 $V=\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$。反之,若 $V=W\oplus U$,则平行于 U 在 W 上的投影 $\boldsymbol{P}_W$ 是幂等变换,平行于 W 在 U 上的投影 $\boldsymbol{P}_U$ 也是幂等变换,且 $\boldsymbol{P}_U\boldsymbol{P}_W=\boldsymbol{P}_W\boldsymbol{P}_U=\boldsymbol{0}$(此时称 $\boldsymbol{P}_U$ 与 $\boldsymbol{P}_W$ 正交),$\boldsymbol{P}_U+\boldsymbol{P}_W=\boldsymbol{I}$。投影是最基本的线性变换。

设 V 是域 F 上的线性空间(可以是无限维的),$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的一个线性变换。在 $F[x]$ 中,$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$两两互素,则

$$\mathrm{Ker}\ f(\boldsymbol{A})=\mathrm{Ker}\ f_1(\boldsymbol{A})\oplus\mathrm{Ker}\ f_2(\boldsymbol{A})\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\ f_s(\boldsymbol{A}). \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换,如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$在 $F[\lambda]$中能分解成

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}, \tag{2}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 F 中两两不等的元素,$r_i>0$, $i=1,2,\cdots,s$。则

$$V=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})^{r_1}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})^{r_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{I})^{r_s},$$

其中 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{r_j}$, $j=1,2,\cdots,s$,称为 $\boldsymbol{A}$ 的根子空间;并且 $\boldsymbol{A}$ 的根子空间 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{r_j}$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_j 的代数重数 r_j, $j=1,2,\cdots,s$。

若 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中的标准分解式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}, \tag{3}$$

则
$$V=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})^{l_1}\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})^{l_2}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_s\boldsymbol{I})^{l_s}, \tag{4}$$

并且 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{l_j}$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的根子空间 $\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{r_j}$, $j=1,2,\cdots,s$。

对于域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$,若它的最小多项式 $m(\lambda)$在 $F[\lambda]$中能分解成上述一次因式的方幂的乘积,我们通过把 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的根子空间的直和,在 $\boldsymbol{A}$ 的每个根子空间 $W_j=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{l_j}$ 中取一个合适的基(通过 W_j 上的幂零变换 $\boldsymbol{B}_j=\boldsymbol{A}|W_j-\lambda_j\boldsymbol{I}$来找合适的基),使得 $\boldsymbol{A}|W_j$ 在此基下的矩阵 A_j 为一个 Jordan 形矩阵;把 $W_j(j=1,2,\cdots,s)$ 的基合起来成为 V 的一个基,则 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的这个基下的矩阵 $A=\mathrm{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$是一个 Jordan 形矩阵,称它为 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形。除去 Jordan 块的排列次序外,$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形是唯一的。

Witt 消去定理的推广:设 F 是特征不等于 2 的域,A_1,A_2 是域 F 上 n 级对称矩阵,B_1,B_2 是域 F 上的 m 级对称矩阵。如果

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix},$$

且 $A_1\simeq A_2$,那么 $B_1\simeq B_2$。

设 V 是特征不为 2 的域 F 上的 n 维线性空间,f 是 V 上的对称或斜对称双线性函数,W 是 V 的一个非平凡子空间,则 $V=W\oplus W^{\perp}$ 的充分必要条件为 f 在 W 上的限制是非退化的,其中 $W^{\perp}:=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\ \forall\beta\in W\}$。

设 q 是欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一个二次函数,则 q 的零锥 S(即:使得 $q(\xi)=0$ 的所有 ξ 组成的集合)包含 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基的充分必要条件是:q 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基

(从而在 $\mathbf{R}^n$ 的任一标准正交基)下的矩阵的迹等于0。由此立即得到解析几何中的一个结论:在直角坐标系中,顶点在原点的二次锥面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$ 有3条互相垂直的直母线的充分必要条件是 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$。从上述结论及其充分性的证明可得到:n 级实对称矩阵 A 正交相似于主对角元全为0的矩阵当且仅当 A 的迹为0。我们还证明了:对于域 F 上的 n 级矩阵 A,若 A 的迹为0,则 A 相似于一个主对角元全为0的矩阵。

我们建立了域 F 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数空间 $T_2(V)$ 与 V 上的线性变换空间 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 之间的一个同构映射(不用矩阵作为桥梁):设 f 是 V 上的一个非退化双线性函数,任给 V 上的一个双线性函数 g,存在 V 上唯一的一个线性变换 $\boldsymbol{G}$,使得

$$g(\alpha,\beta)=f(\boldsymbol{G}(\alpha),\beta),\quad \forall\,\alpha,\beta\in V;$$

令 $\sigma: g\longmapsto \boldsymbol{G}$,则 σ 是 $T_2(V)$ 到 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 的一个同构映射。利用这个同构映射,我们给出了特征不为2的域 F 上两个 n 级对称矩阵 A,B 可一齐合同对角化(即存在同一个可逆矩阵 P,使得 $P'AP$ 和 $P'BP$ 都为对角矩阵)的充分必要条件。当 A 可逆时,这个充分必要条件是 $A^{-1}B$ 可对角化(即 $A^{-1}B$ 可相似于一个对角矩阵)。当 A 不可逆时,若存在 $\lambda_0\in F$,使得 $A+\lambda_0B$ 可逆且 $(A+\lambda_0B)^{-1}B$ 可对角化,则 A 与 B 可一齐合同对角化;若存在 $\lambda_0\in F$,使得 $A+\lambda_0B$ 可逆且 $(A+\lambda_0B)^{-1}B$ 不可对角化,则 A 与 B 不能一齐合同对角化。

n 维欧几里得空间 V 上的任一正交变换都可以表示成至多 $n+1$ 个镜面反射的乘积,其中 $n\geqslant 2$。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的斜对称变换(即:$\forall\,\alpha,\beta\in V$,有 $(\boldsymbol{A}\alpha,\beta)=-(\alpha,\boldsymbol{A}\beta)$),则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 都可逆,且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^{-1}$ 是 V 上的正交变换。反之,若 $\boldsymbol{B}$ 是 V 上的正交变换,且 -1 不是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,则 $A=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})^{-1}$ 是 V 上的斜对称变换。

实内积空间 V 上的变换 $\boldsymbol{P}$ 是 V 在一个子空间上的正交投影当且仅当 $\boldsymbol{P}$ 是幂等的对称变换。

设 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 分别是实内积空间 V 在子空间 U_1 和 U_2 上的正交投影,则 $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ 是正交投影当且仅当 U_1 和 U_2 是互相正交的(即 $U_1\subseteq U_2^{\perp}$),且此时 $\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2$ 是 V 在 $U_1\oplus U_2$ 上的正交投影;$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 是正交投影当且仅当 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$,且此时 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 是 V 在 $U_1\cap U_2$ 上的正交投影。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的对称变换,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值,属于 λ_i 的特征子空间记作 V_i,用 $\boldsymbol{P}_i$ 表示 V 在 V_i 上的正交投影,$i=1,2,\cdots,s$,则 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{P}_i$。这表明正交投影是对称变换的基本建筑块。又由于 n 维欧几里得空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 是对称变换当且仅当 V 中存在一个标准正交基使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵,因此正交投影是 V 中能够找到标准正交基使得在此基下的矩阵为对角矩阵的线性变换的基本建筑块。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的对称变换,对于任意 $\alpha\in V$ 且 $\alpha\neq 0$,令 $F(\alpha)=\dfrac{(\alpha,\boldsymbol{A}\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$,则 $F(\alpha)$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的属于最小(大)特征值的一个单位特征向量处达到最小(大)值。

n 维欧几里得空间 V 上的任意一个镜面反射都是 V 上的对称变换。

对于 n 维酉空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$，V 中存在一个标准正交基使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵为对角矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为正规变换（即：$\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随变换）。

设 $\boldsymbol{H}$ 是 n 维酉空间 V 上的 Hermite 变换，则 $\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{H}$ 都可逆，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{H})^{-1}$是酉变换，且$-1$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。反之，若 $\boldsymbol{A}$ 是酉变换，且-1 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^{-1}$是 Hermite 变换。由这个结论得到：在 V 上的所有 Hermite 变换组成的集合与 V 上不以-1 为特征值的所有酉变换组成的集合之间有一个一一对应 $\sigma: \boldsymbol{H}\longmapsto(\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{H})^{-1}$，称 σ 是 Cayley 变换。它类似于实数集与复平面上的单位圆（去掉-1 对应的点）之间的一个一一对应：$a\longmapsto(1-a\mathrm{i})(1+a\mathrm{i})^{-1}$。

酉空间 V 上的变换 $\boldsymbol{P}$ 是 V 在一个子空间上的正交投影当且仅当 $\boldsymbol{P}$ 是幂等的 Hermite 变换。

设 $\boldsymbol{A}$ 是n 维酉空间V 上的正规变换，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是$\boldsymbol{A}$ 的所有不同的特征值，属于λ_i 的特征子空间记作 V_i，用 $\boldsymbol{P}_i$ 表示 V 在 V_i 上的正交投影，$i=1,2,\cdots,s$，则 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{s}\lambda_i\boldsymbol{P}_i$。于是正交投影是 n 维酉空间 V 中能够找到标准正交基，使得在此基下的矩阵为对角矩阵的线性变换的基本建筑块。

酉空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 如果有伴随变换，那么 $\boldsymbol{A}$ 是正规变换当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{A}_2$，其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 都是 Hermite 变换，且 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$。

设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s$ 都是n 维酉空间 V 上的正规变换，如果它们两两可交换，那么 V 中存在一个标准正交基，使得它们在此基下的矩阵都是对角矩阵。

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维欧几里得空间 V 上的正规变换，则 V 中存在一个标准正交基，使得 $\boldsymbol{A}$ 在此基下的矩阵是形如下述的分块对角矩阵：

$$\mathrm{diag}\left\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_s & b_s\\ -b_s & a_s\end{pmatrix}\right\},$$

此矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的标准形。由此看出，n 维欧几里得空间上的正规变换的标准形与 n 维酉空间上的正规变换的标准形不一样。

1 级酉矩阵组成的酉群 U(1)与行列式为 1 的 2 级正交矩阵组成的特殊正交群SO(2)同构。

行列式为 1 的 2 级酉矩阵组成的特殊酉群 SU(2)到行列式为 1 的 3 级正交矩阵组成的特殊正交群 SO(3)有一个满同态（即保持乘法运算的满射），并且同态的核是$\{I,-I\}$，其中 I 是 2 级单位矩阵。

任给一个 r 级酉矩阵 P，可以得到一个 $2r$ 级正交矩阵 Q，并且 Q 是 $2r$ 级辛矩阵；反之，任给一个 $2r$ 级正交矩阵 Q，如果 Q 也是 $2r$ 级辛矩阵，那么可得到一个 r 级酉矩阵 P。

4. 创新亮点。本套教材有许多创新之处，例如上述三个特色和下文将要讲的特色。此处特别指出创新的两个亮点。

亮点一：本套教材明确阐述了域 F 上一元多项式环 $F[x]$和 n 元多项式环 $F[x_1,x_2,\cdots,x_n]$的通用性质，并且把它们运用于全书各个相关课题中，起到了重要作用。

设 R 是一个有单位元 $1'$ 的交换环，它有一个子环 R_1 含有 $1'$，并且 F 到 R_1 有一个双射 τ，τ 保持加法和乘法运算。任意给定 $t\in R$，令

$$\sigma_t: \quad F[x] \longrightarrow R$$
$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n}\tau(a_i)t^i =: f(t),$$

则 σ_t 是 $F[x]$ 到 R 的一个映射，并且 σ_t 保持加法和乘法运算，还有 $\sigma_t(x)=t$，把映射 σ_t 称为 x 用 t 代入。这就是域 F 上一元多项式环 $F[x]$ 的通用性质。这个通用性质指出：只要环 R 满足上述条件，那么从 $F[x]$ 中有关加法和乘法的等式，通过不定元 x 用 R 中任一元素 t 代入，就可以得到环 R 中的有关加法和乘法的等式，产生一通百通的效果。例如，设 A 是域 F 上的一个 n 级矩阵，由矩阵 A 的所有多项式(即形如 $a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I$ 的表达式，其中 $a_i\in F, i=0,1,\cdots,m, m\in\mathbf{N}$) 组成的集合记作 $F[A]$。容易验证 $F[A]$ 是环 $M_n(F)$ 的一个子环，并且 $F[A]$ 是有单位元 I 的交换环。于是不定元 x 可以用矩阵 A 代入，也可以用 A 的任一多项式代入，从而由 $F[x]$ 中有关加法和乘法的等式可以得到 $F[A]$ 中有关加法和乘法的许多等式。又如，设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换，由 $\boldsymbol{A}$ 的所有多项式组成的集合 $F[\boldsymbol{A}]$ 是 V 上所有线性变换组成的环 $\mathrm{Hom}(V,V)$ 的一个子环，且 $F[\boldsymbol{A}]$ 是有单位元 $\boldsymbol{I}$ 的交换环。于是不定元 x 可以用线性变换 $\boldsymbol{A}$ 代入，也可以用 $\boldsymbol{A}$ 的任一多项式代入。正是利用了一元多项式环的通用性质，我们证明了第 3 个特色中的(1)式和(4)式，从而当 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成一次因式的乘积时，通过把 V 分解成 $\boldsymbol{A}$ 的根子空间的直和，证明了 $\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形。设 $m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$，其中 $p_1(\lambda),p_2(\lambda),\cdots,p_s(\lambda)$ 是域 F 上两两不等的首一不可约多项式，我们利用一元多项式环的通用性质，把 V 分解成 $V=\bigoplus\limits_{j=1}^{s}\mathrm{Ker}\,p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$，证明了 $\boldsymbol{A}$ 有有理标准形。我们利用多元多项式环的通用性质，简洁地证明了对称多项式基本定理中的唯一性；证明了牛顿公式(关于初等对称多项式与幂和 s_k 的关系的公式)；证明了辛矩阵的行列式等于 1。

亮点二：本套教材在研究线性变换的最简单形式的矩阵表示等问题时，充分发挥了最小多项式的作用。首先，我们证明了下述结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换，如果 V 能分解成 $\boldsymbol{A}$ 的一些非平凡不变子空间的直和：

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s,$$

那么 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=[m_1(\lambda),m_2(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$，

其中 $m_j(\lambda)$ 是 W_j 上的线性变换 $\boldsymbol{A}|W_j$ 的最小多项式，$j=1,2,\cdots,s$。

然后我们利用最小多项式证明了下列重要结论：

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成不同的一次因式的乘积；$\boldsymbol{A}$ 有 Jordan 标准形当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可以分解成一次因式的乘积；若 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$，则 $\boldsymbol{A}$ 有有理标准形。

设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 都是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换。如果 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 两

两两可交换且都可对角化，那么 V 中存在一个基，使得 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 在此基下的矩阵都是对角矩阵。

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为

$$m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda),$$

则 $\operatorname{Ker} p_j^{l_j}(\boldsymbol{A})$ 的维数等于 $p_j(\lambda)$ 的次数乘以 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的标准分解式中 $p_j(\lambda)$ 的幂指数，$j=1,2,\cdots,s$。

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的线性变换，则 $F[\boldsymbol{A}]$ 是域 F 上的线性空间，并且 $F[\boldsymbol{A}]$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 的次数。

设 $\boldsymbol{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换，把与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的所有线性变换组成的集合记作 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$，则 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$ 是域 F 上的一个线性空间。设 $\boldsymbol{A}$ 在 V 的一个基下的矩阵是 A，把与 A 可交换的所有 n 级矩阵组成的集合记作 $\mathrm{C}(A)$，则 $\mathrm{C}(A)$ 是域 F 上的一个线性空间。显然 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$ 与 $\mathrm{C}(A)$ 同构。在 $M_n(F)$ 中，若 A 与 B 相似，则 $\mathrm{C}(A)=\mathrm{C}(B)$。

设 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $m(\lambda)$，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$。

设 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s)$，则当 $s=n$ 时，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})=F[\boldsymbol{A}]$，并且 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=n$。当 $s<n$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时，若

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

则 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i=1}^{s}k_i^2$，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})\cong M_{k_1}(F)\dotplus M_{k_2}(F)\dotplus\cdots\dotplus M_{k_s}(F)$，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})\supsetneqq F[\boldsymbol{A}]$。

设 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$。若 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 的标准形为

$$\operatorname{diag}\{J_{l_1}(\lambda_1),J_{l_2}(\lambda_2),\cdots,J_{l_s}(\lambda_s)\},$$

则 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=n$，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})=F[\boldsymbol{A}]$。

若 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形中有一个特征值 λ_j 至少有两个 Jordan 块，则 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})>n$，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})\supsetneqq F[\boldsymbol{A}]$。此时，记 $W_j=\operatorname{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I})^{l_j}$，$\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}|W_j$，$j=1,2,\cdots,s$，则

$$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})\cong \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_1)\dotplus \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_2)\dotplus\cdots\dotplus \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_s),\quad \dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{s}\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_i).$$

设 $m(\lambda)$ 在 $F(\lambda)$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=p_1^{l_1}(\lambda)p_2^{l_2}(\lambda)\cdots p_s^{l_s}(\lambda)$，其中至少有一个 $p_j(\lambda)$ 的次数大于 1。

若 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形是一个有理块，则 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=n$，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})=F[\boldsymbol{A}]$。

若 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形的各个有理块的最小多项式两两互素，则

$$\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=n,\mathrm{C}(\boldsymbol{A})=F[\boldsymbol{A}].$$

若 $m(\lambda)=p_1(\lambda)$，$\deg\ p_1(\lambda)=r>1$，且 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形至少有两个有理块，则 $\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{r}(\dim_F V)^2$，$\mathrm{C}(\boldsymbol{A})=\operatorname{Hom}_{F[\boldsymbol{A}]}(V,V)$。

若 $m(\lambda)=p_1(\lambda)p_2(\lambda)\cdots p_s(\lambda)$，$\deg\ p_i(\lambda)=r_i$，$i=1,2,\cdots,s$。设 $f(\lambda)=p_1^{k_1}(\lambda)p_s^{k_2}(\lambda)\cdots p_s^{k_s}(\lambda)$，记 $W_i=\operatorname{Ker} p_i(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}|W_i$，$i=1,2,\cdots,s$。则

$$\dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{s} r_i k_i^2,$$

$$\mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \cong \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_1) \dot{+} \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_2) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_s)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{F[\boldsymbol{A}_1]}(W_1, W_1) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathrm{Hom}_{F[\boldsymbol{A}_s]}(W_s, W_s).$$

若 $m(\lambda)$的标准分解式中至少有一个 $l_j>1$,且 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形中至少有两个有理块的最小多项式不互素,记 $W_i=\mathrm{Ker}\ p_i^{l_i}(\boldsymbol{A})$,$\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}|W_i$,$i=1,2,\cdots,s$,则

$$\mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \cong \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_1) \dot{+} \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_2) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_s), \quad \dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{s} \dim \mathrm{C}(\boldsymbol{A}_i).$$

求 $\mathrm{C}(\boldsymbol{A})$剩下来未解决的情形是:$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$是一个不可约多项式的方幂 $m(\lambda)=p^l(\lambda)$,且 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形至少有两个 Jordan 块,或者 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形至少有两个有理块。这时我们解决了 $\mathrm{C}^2(\boldsymbol{A})$的结构问题:

$$\mathrm{C}^2(\boldsymbol{A}) = F[\boldsymbol{A}], \quad \dim \mathrm{C}^2(\boldsymbol{A}) = l \deg p(\lambda),$$

其中 $\mathrm{C}^2(\boldsymbol{A}):=\{\boldsymbol{H}\in \mathrm{Hom}(V,V)\,|\,\boldsymbol{HB}=\boldsymbol{BH}, \forall\, \boldsymbol{B}\in \mathrm{C}(\boldsymbol{A})\}$,显然 $\mathrm{C}^2(\boldsymbol{A})$是域 F 上的一个线性空间。

5. 强调思维。本套教材按照数学的思维方式编写,着重培养数学思维能力。我们把数学的思维方式概括成:观察客观世界的现象,抓住其主要特征,抽象出概念或者建立模型;通过直觉判断、归纳推理、类比推理、联想推理和逻辑推理等进行探索,作出猜测;然后经过深入分析、逻辑推理和计算等进行论证,揭示出事物的内在规律,从而使纷繁复杂的现象变得井然有序。按照“观察—抽象—探索—猜测—论证”的思维方式编写教学内容,就使得数学比较容易学,而且同学们可以从中受到数学思维方式的熏陶,终身受益。

例如,一元多项式环的通用性质是很深刻的数学内容,而我们从简便计算 101^2 引出:在完全平方公式$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 中,x 也可以用 n 级矩阵 A 代入(根据矩阵乘法的分配律直接计算得出)。由此猜测:在数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$中,有关加法和乘法的等式,在 x 用矩阵 A 代入后,左右两边保持相等。由此进一步抽象并且经过论证得出一元多项式环的通用性质。这样做就使得一元多项式环的通用性质比较容易理解了。又如,不可约多项式是数域 K 上一元多项式环 $K[x]$的结构中的基本建筑块,复系数不可约多项式只有一次多项式;实系数不可约多项式只有一次多项式和判别式小于零的二次多项式。有理系数不可约多项式有哪些?如何判别?思路是什么呢?我们首先举了一个有理系数多项式的具体例子,把它的各项系数分母的最小公倍数作为分母,提出一个分数,使得括号内的多项式的各项系数都为整数,并且把这些整数的公因数也提出去,这时括号内的多项式的各项系数的最大公因数只有 1 和 -1。这种整系数多项式称为本原多项式。这就自然而然地引出了本原多项式的概念。任何一个有理系数多项式都可以表示成一个本原多项式与一个有理数的乘积,于是一个有理数系数多项式是否不可约与相应的本原多项式是否不可约是一致的。这样我们就找到了思路:去研究本原多项式的不可约的判定。为此需要探索本原多项式的性质。由于本原多项式的各项系数的最大公因数只有 1 和 -1,因此直觉判断两个本原多项式如果能够互相整除(此时称它们相伴),那么它们只相差一个正负号;然后证明这一猜测是正确的。由于因式分解涉及到乘法,因此自然要问:两个本原多项式的乘积是否还是本原多项式?这在直观上不容易看出,可以尝

试假设两个本原多项式的乘积不是本原多项式，去进行逻辑推理，得出了矛盾，因此两个本原多项式的乘积仍是本原多项式。这就自然而然地得出了高斯引理。想寻找本原多项式不可约的充分条件，这犹如大海捞针，我们可以反过来思考：如果一个次数大于0的本原多项式可约，那么它可以分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，从高斯引理我们可以进一步直觉判断它可以分解成两个次数较低的本原多项式的乘积。经过证明，这个猜测是正确的。由于任何一个素数都不可能整除本原多项式的各项系数，因此为了从一个本原多项式可约推出进一步的结论，我们考虑这样一种情形：对于一个次数大于0的本原多项式 $f(x)$，存在一个素数 p，p 能够整除$f(x)$的首项系数以外的其他各项系数，但是 p 不能整除首项系数，如果 $f(x)$可约，那么它可以分解成两个次数较低的本原多项式的乘积。由此经过逻辑推理，得出：p 的平方能整除$f(x)$的常数项。因此对于这种本原多项式 $f(x)$，如果 p 的平方不能整除常数项，那么$f(x)$不可约。这就自然而然地得出了本原多项式不可约的充分条件：存在一个素数 p 满足上述三个条件。这就是著名的 Eisenstein 判别法。我们经过探索和论证得出 Eisenstein 判别法，不仅使同学们对于素数 p 满足的三个条件印象很深刻，而且让他们知道了 Eisenstein 判别法是怎么来的，受到了数学思维方式的熏陶。

又如，在实数域上的线性空间 V 中引进度量概念的办法是：在 V 上定义一个正定的对称双线性函数，称为内积，这时 V 称为一个实内积空间。在复数域上的线性空间 V 中引进度量概念的方法与实数域不同，这是因为复线性空间 V 上的双线性函数不可能满足正定性。为了能定义向量的长度，需要有正定性。为此，复线性空间 V 上的内积的定义为：V 上的一个二元函数如果满足 Hermite 性、对第一个变量线性、正定性，那么这个二元函数称为 V 上的一个内积，此时称 V 是酉空间。对于任意一个域 F 上的线性空间 V，能不能引进度量概念？关键是要有内积的概念。由于在一般的域中，没有“正”元素的概念，因此不可能谈论正定性，于是长度、角度、距离的概念也就没有了。但是正交这个概念还是可以推广到任意域上线性空间中。内积应当是 V 上的一个二元函数 f，为了能充分利用线性空间有加法和纯量乘法的特性，f 应当是 V 上的双线性函数。由于两个向量 α 与 β 正交应当是相互的，因此 f 应当是对称或斜对称的。从而 V 上可以指定一个对称双线性函数 f 作为内积，此时(V,f)称为**正交空间**。V 上也可以指定一个斜对称双线性函数 g 作为内积，此时(V,g)称为**辛空间**。即使在实数域上的线性空间中，在某些问题里，也不用正定的对称双线性函数作为内积，而指定一个非退化的对称双线性函数作为内积。例如，在爱因斯坦的狭义相对论中，从光速不变原理导出了时间-空间的新的坐标变换公式，称它为**洛伦兹**(Lorentz)**变换**。爱因斯坦的**狭义相对性原理**指出：“所有的基本物理规律都应在任一惯性系中具有相同的形式。”一个点 P 在给定的惯性系 $Oxyz$ 中的时间-空间坐标 $(t,x,y,z)'$ 是 4 维实线性空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个向量。类比欧几里得空间中，$(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$是 α 与 β 的距离的平方，如果在 $\mathbf{R}^4$ 中指定一个非退化的对称双线性函数 f，那么把$f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$称为 α 与 β 的**时-空间隔的平方**。根据狭义相对性原理，洛伦兹变换 σ 保持任意两个向量的时-空间隔的平方不变。若令

$$f(\alpha,\beta)=-c^2t_1t_2+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

其中 c 是光速,$\alpha=(t_1,x_1,y_1,z_1)'$,$\beta=(t_2,x_2,y_2,z_2)$。则可以证明 $f(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=f(\alpha,\alpha)$。从而

$$f(\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha)-\sigma(\beta))=f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)$$

因此在 $\mathbf{R}^4$ 中把上述非退化的对称双线性函数 f 作为内积,此时称$(\mathbf{R}^4,f)$是一个**闵柯夫斯基**(Minkowski)**空间**。假如在 $\mathbf{R}^4$ 中指定一个正定的对称双线性函数作为内积,那么洛伦兹变换不可能保持任意两个向量的距离的平方不变。因此在 $\mathbf{R}^4$ 中应当指定上述非退化的对称双线性函数 f 作为内积。闵柯夫斯基空间就是一个正交空间。这是需要讨论正交空间的物理背景。

再如,关于线性空间的张量积,我们不是一开始就给出线性空间的张量积的定义,而是先在 11.1 节例 5 的点评中指出,设 V,U 分别是域 F 上 n 维、m 维线性空间,用 $\mathscr{P}(V^*,U^*)$表示 $V^*\times U^*$ 上的所有双线性函数组成的线性空间,则存在 $V\times U$ 到 $\mathscr{P}(V^*,U^*)$的一个双线性映射 τ(可具体写出)。在 11.2 节中深入分析 $\mathscr{P}(V^*,U^*)$和 τ 的性质,发现从 $V\times U$ 到域 F 上任一线性空间 W 的任一双线性映射 $\mathbf{A}$,存在 $\mathscr{P}(V^*,U^*)$到 W 的唯一的线性映射 φ,使得 $\mathbf{A}=\varphi\tau$。由此引出了线性空间 V 和 U 的张量积的概念,这时水到渠成地得出了 V 与 U 的张量积的定义。这就使得张量积这一原本深奥难懂的概念变得清晰,成为同学们能够把握的一个概念,因为$(\mathscr{P}(V^*,U^*),\tau)$就是 V 与 U 的一个张量积。

我们不仅在每一节的内容精华部分按照数学思维方式编写,而且在典型例题部分也着力于培养数学思维能力。我们在例题的解法或点评中,讲清楚关键的想法,以及这个想法是怎么想出来的,让学生从中学习怎样科学地思考。我们还编写了一些由内容精华拓展而来的例题,让学生从中学会提出问题。例如,实内积空间 V 上的正交变换一定保持向量的长度不变,保持向量间的距离不变,保持正交性不变等。那么反过来,V 到自身的满射 $\mathbf{A}$ 如果保持向量的长度不变,那么 $\mathbf{A}$ 是不是正交变换?保持向量间的距离不变呢?保持正交性不变呢?这些在第 10 章 10.4 节典型例题的例 3、例 23、例 22 进行了讨论。

6. 例题丰富。每一节除了“内容精华”外,还专门设置了“典型例题”的栏目。这些例题有的是“内容精华”中理论的延伸,有的是给同学们呈现如何解题的范例,有的是为了培养同学们分析问题和解决问题的能力,旨在帮助同学们在高等代数理论上和科学思维能力上都达到相当的高度。

7. 展示应用。本套书开辟了“应用小天地”栏目。同学们常问:学习高等代数有什么具体应用?我们在每一章后面都写了一个方面的应用。例如,第 5 章写了矩阵的特征值在实际问题中的应用。第 6 章写了二次曲面的类型。第 7 章写了序列密码和 m 序列。第 8 章写了线性空间在编码中的应用。20 世纪物理学取得的两个划时代的进展是建立了相对论和量子力学。我们在第 10 章 10.6 节由爱因斯坦的狭义相对性原理引出了闵柯夫斯基空间。在第 10 章的“应用小天地”栏目里写了“酉空间在量子力学中的应用”。详细介绍了历史上量子力学的建立过程,阐述了一个量子体系的所有量子态(可归一化)组成的集合 $\mathscr{H}$ 可形成一个酉空间,与这个量子体系的力学量 A(例如,位置、动量、角动量、动能和势能等)相应的算符 $\hat{A}$ 都是酉空间 $\mathscr{H}$ 上的线性变换,而且一定是 Hermite 变换。当量子体系处于一个量子态,人们去测量力学量 A 时,一般说来,可能出现不同的结果,各

有一定的概率。如果量子体系处于一种特殊的状态下，那么测量力学量 A 所得的结果是唯一确定的，这种特殊的状态称为力学量 A 的本征态。可以证明：ψ 是力学量 A 的本征态当且仅当 ψ 是相应算符 $\hat{A}$ 的一个特征向量，其所属的特征值就是测量 A 所得的唯一结果。第 11 章的“应用小天地”栏目里写了“张量积在量子隐形传态中的应用”。发送者要把一个具有自旋的粒子 1 的自旋状态传送给接收者，而粒子 1 本身不传给接收者，这能办到吗？1993 年 C. H. Bennett 等人提出了一个传递方案，关键是把粒子 2 和 3 制备成为 EPR 对处于纠缠态，然后把粒子 2 传递给发送者，同时把粒子 3 传送给接收者，最终粒子 1 的自旋态传送给了粒子 3，实现了量子隐形传态，这在量子信息论中起着重要作用。之所以能把粒子 1 的自旋态隐形传送给粒子 3，关键是利用了张量积，本书详细阐述了其中的道理。

8. 可读性强。本套教材按照数学的思维方式编写，叙述清晰、详尽、严谨，对于后文要用到的结论，前面章节均作了铺垫，环环相扣，层层深入，可读性强。

本套教材适合用作综合大学、高等师范院校和理工科大学“高等代数”课程的教材，上册供第一学期使用，下册供第二学期使用。每一节的“内容精华”（除去打 * 号的和用楷体字排印的以外）在大课中讲授；“典型例题”中的一部分在大课中讲授，一部分在习题课中进行，一部分作为课外作业，一部分供同学们自己思考和阅读；“习题”留给同学们课外作业。书末有习题解答或提示。想了解习题详细解答的同学，可以参阅《高等代数学习指导书（上册、下册）》（丘维声编著，北京：清华大学出版社，2005 年、2009 年）中相应章节的典型例题的解答或习题解答。本套教材还可作为“高等代数”或“线性代数”课程的教学参考书，也是数学教师和科研工作者高质量的参考书。

本套教材荣获 2009 年“北京市高等教育精品教材立项项目”，被评为重大支持项目，特此向北京市教育委员会表示感谢！

感谢本套教材的责任编辑吴颖华，她为本书编辑出版付出了辛勤劳动。

我们坦诚欢迎广大读者对本套教材提出宝贵意见。

丘维声
北京大学数学科学学院
2010 年 4 月