第Ⅲ部分　容斥原理、鸽巢原理与 Ramsey 数、Stirling 数

1. n 个字符的全排列,(1)其中两个字符 a 和 b 不出现并排的排列数有多少?(2)其中 3 个字符 a,b,c 不出现在一起的排列数又有多少?(3)a,b,c 中任意两个不出现并排的排列数又有多少?

解:

(1) 字符 a 和 b 在一起的排列数为 $2(n-1)!$,故 a 和 b 不并排的排列数为 $n!-2(n-1)!$。

(2) a,b,c 3 个字符连在一起的排列数为 $6(n-2)!$,故 3 个字符 a,b,c 不在一起的排列数为 $n!-6(n-2)!$。

(3) 令 A_1 表示 a 和 b 在一起,A_2 表示 a 和 c 在一起,A_3 表示 b 和 c 在一起的排列。

$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|\\
=&N-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|\\
&+|A_2\cap A_3|)-(|A_1\cap A_2\cap A_3|)\\
=&n!-6(n-1)!+6(n-2)!
\end{aligned}$$

2. 求 tartar 的全排列中不存在两个相同字符并列的排列数。

解:令 A_1 表示两个 t 并列的排列,令 A_2 表示两个 a 并列的排列,令 A_3 表示两个 r 并列的排列,求 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=\frac{6!}{2^3}-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|)-(|A_1\cap A_2\cap A_3|)$

$$A_1=A_2=A_3=\frac{5!}{2^2}=30$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=\frac{4!}{2}=12$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!=6$$

所求的答案为 $90-3\times30+3\times12-6=30$。

3. 在 math is fun 的全排列中,求不出现 math,is,fun 的排列数。

解:令全排列中出现 math 或 is 或 fun 的排列依次为 A_1,A_2,A_3。

$$|A_1|=6!,\quad |A_2|=8!,\quad |A_3|=7!$$

$$|A_1\cap A_2|=5!,\quad |A_1\cap A_3|=4!,\quad |A_2\cap A_3|=6!$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3!$$

$$\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|\\
=&9!-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|
\end{aligned}$$

$$+|A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 9! - (6! + 8! + 7!) + (5! + 4! + 6!) - 3!$$

4. 求 1～1000 中不被 5,6,8 整除的整数个数。

解：令 A_1 表示 1～1000 中能被 5 除尽的整数集合。

令 A_2 表示 1～1000 中能被 6 除尽的整数集合。

令 A_3 表示 1～1000 中能被 8 除尽的整数集合。

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|\\ =\ & 1000 - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3|\\ & + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166, \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \times 6} \right\rfloor = 33, \quad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \times 8} \right\rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{\{6,8\}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41, \quad \{6,8\} = lcm(6,8) = 24$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

所以

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

5. 从 1～1000 间求能被 3,4,5,7 整除的整数个数。

解：用 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示能被 3,4,5,7 整除的整数集合。

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|\\ =\ & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3|\\ & + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)\\ & + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4|\\ & + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\\ =\ & \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor\\ & - \left(\left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{28} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor\right)\\ & + \left(\left\lfloor \frac{1000}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{84} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{140} \right\rfloor\right) - \left\lfloor \frac{1000}{420} \right\rfloor\\ =\ & 333 + 250 + 200 + 142 - (83 + 66 + 47 + 50 + 55 + 28)\\ & + (16 + 11 + 9 + 7) - 2\\ =\ & 657\end{aligned}$$

6. 求满足 $\xi + \eta + \zeta = 10$ (*) $0 \leqslant \xi \leqslant 3, 0 \leqslant \eta \leqslant 4, 0 \leqslant \zeta \leqslant 5$ 的整数解数目。

解：求(*)的非负整数解数目 $|S| = \binom{3+10-1}{10} = 66$。

令 A_1 表示方程(*)，满足 $\xi \geqslant 4$，A_2 表示方程(*)，满足 $\eta \geqslant 5$。

A_3 表示方程(*),满足 $\zeta\geqslant6$ 的非负整数解的集合。

A_1 是 $\xi+\eta+\zeta=10,\xi\geqslant4,\eta\geqslant0,\zeta\geqslant0$ 的非负整数解。

做变换 $\xi'=\xi-4,\eta'=\eta,\zeta'=\zeta$ 得:

$$\xi'+\eta'+\zeta'=6,\quad \xi'\geqslant0,\quad \eta'\geqslant0,\quad \zeta'\geqslant0$$

$$|A_1|=\binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}=28$$

A_2 是 $\xi+\eta+\zeta=10,\xi\geqslant0,\eta\geqslant5,\zeta\geqslant0$ 的非负整数解。

$$|A_2|=\binom{5+3-1}{5}=21$$

$$|A_3|=\binom{4+3-1}{4}=15$$

$A_1\cap A_2$ 是 $\xi+\eta+\zeta=10,\xi\geqslant4,\eta\geqslant5,\zeta\geqslant0$ 的非负整数。

做变换 $\xi'=\xi-4,\eta'=\eta-5,\zeta'=\zeta$ 得:

$$\xi'+\eta'+\zeta'=1,\quad \xi'\geqslant0,\quad \eta'\geqslant0,\quad \zeta'\geqslant0$$

$$|A_1\cap A_2|=\binom{1+3-1}{1}=3$$

类似可得 $|A_1\cap A_3|=1,|A_2\cap A_3|=0$。

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=66-(28+21+15)+(3+1+0)-0=6$$

7. 求整数解数目 $x_1+x_2+x_3+x_4=14,1\leqslant x_i\leqslant8,i=1,2,3,4$。

解:做变换 $y_i=x_i-1,i=1,2,3,4$。

得 $y_1+y_2+y_3+y_4=10,0\leqslant y_i\leqslant7,i=1,2,3,4$。

非负整数解的数目:

$$\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}=286$$

令 A_1: $y_1+y_2+y_3+y_4=10,y_1\geqslant8,y_2\geqslant0,y_3\geqslant0,y_4\geqslant0$

令 A_2: $y_1+y_2+y_3+y_4=10,y_1\geqslant0,y_2\geqslant8,y_3\geqslant0,y_4\geqslant0$

令 A_3: $y_1+y_2+y_3+y_4=10,y_1\geqslant0,y_2\geqslant0,y_3\geqslant8,y_4\geqslant0$

令 A_4: $y_1+y_2+y_3+y_4=10,y_1\geqslant0,y_2\geqslant0,y_3\geqslant0,y_4\geqslant8$

以 A_1 为例,做置换:

$$\xi_1=\eta_1-8,\quad \xi_2=\eta_2,\quad \xi_3=\eta_3,\quad \xi_4=\eta_4$$

得 $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=2$,整数解数目为

$$|A_1|=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}=10$$

同理 $|A_2|=|A_3|=|A_4|=10$。

可证 $|A_i\cap A_j|=0,i,j=1,2,3,4$。

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=286-4\times10=246$$

8. 求 $x_1+x_2+x_3=15,0\leqslant x_1\leqslant5,0\leqslant x_2\leqslant6,0\leqslant x_3\leqslant7$ 的整数解数目。

解：$x_1+x_2+x_3=15, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$ 的整数解数目为：

$$\binom{15+3-1}{15}=\binom{17}{2}=136$$

令 A_1 为 $x_1\geqslant 6, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$ 的整数解。

令 $\xi_1=x_1-6, \xi_2=x_2, \xi_3=x_3$，

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=9,\quad \xi_1\geqslant 0,\quad \xi_2\geqslant 0,\quad \xi_3\geqslant 0,$$

$$|A_1|=\binom{9+3-1}{9}=\binom{11}{2}=55$$

令 A_2 为 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 7, x_3\geqslant 0$ 的整数解。

令 $\xi_1=x_1, \xi_2=x_2-7, \xi_3=x_3$，

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=8,\quad \xi_1\geqslant 0,\quad \xi_2\geqslant 0,\quad \xi_3\geqslant 0,$$

$$|A_2|=\binom{8+3-1}{8}=\binom{10}{2}=45$$

同理 A_3 为 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 8$ 的整数解。

令 $\xi_1=x_1, \xi_2=x_2, \xi_3=x_3-8$，

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=7,\quad \xi_1\geqslant 0,\quad \xi_2\geqslant 0,\quad \xi_3\geqslant 0,$$

$$|A_3|=\binom{9}{2}=36$$

$|A_1\cap A_2|$：即求 $x_1+x_2+x_3=15, x_1\geqslant 6, x_2\geqslant 7, x_3\geqslant 0$，结果得：

$$|A_1\cap A_2|=\binom{2+3-1}{2}=\binom{4}{2}=6$$

同理 $|A_1\cap A_3|=\binom{3}{2}=3, |A_2\cap A_3|=1, |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$。

问题的解为 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=136-(55+45+36)+(6+3+1)=10$。

9. 求 $x_1+x_2+x_3+x_4=20, 1\leqslant x_1\leqslant 5, 0\leqslant x_2\leqslant 7, 4\leqslant x_3\leqslant 8, 2\leqslant x_4\leqslant 6$ 的整数解数目。

解：令 $y_1=x_1-1, y_2=x_2, y_3=x_3-4, y_4=x_4-2$，得：

$$y_1+y_2+y_3+y_4=13,\quad 0\leqslant y_1\leqslant 4,\quad 0\leqslant y_2\leqslant 7,$$
$$0\leqslant y_3\leqslant 4,\quad 0\leqslant y_4\leqslant 4$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=13, y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0, y_4\geqslant 0$ 的非负整数解的数目为 $\binom{13+4-1}{13}=\binom{16}{13}=\frac{16\times 15\times 14}{6}=560$。

令 A_1 为 $y_1+y_2+y_3+y_4=13, y_1\geqslant 5, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0, y_4\geqslant 0$，的整数解。

令 A_2 为 $y_1+y_2+y_3+y_4=13, y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 8, y_3\geqslant 0, y_4\geqslant 0$，的整数解。

令 A_3 为 $y_1+y_2+y_3+y_4=13, y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 5, y_4\geqslant 0$，的整数解。

令 A_4 为 $y_1+y_2+y_3+y_4=13, y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0, y_4\geqslant 5$，的整数解。

以求 $|A_1|$ 为例：令 $\xi_1=y_1-5, \xi_2=y_2, \xi_3=y_3, \xi_4=y_4$，得：

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=8,\quad \xi_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4$$

$$|A_1| = \binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \binom{11}{3} = \frac{1}{6} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 165$$

同理可得:

$$|A_2| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 56$$

$$|A_3| = |A_4| = 165$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = 1$$

$$|A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 20$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

问题的解:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 560 - (165 \times 3 + 56) + 20 \times 3 + 1 \times 3 = 72$$

10. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18, 1 \leqslant x_1 \leqslant 5, -2 \leqslant x_2 \leqslant 4, 0 \leqslant x_3 \leqslant 5, 3 \leqslant x_4 \leqslant 9$ 的整数解的数目。

解:做置换 $y_1=x_1-1, y_2=x_2+2, y_3=x_3, y_4=x_4-3$。

得 $y_1+y_2+y_3+y_4=x_1+x_2+x_3+x_4-2=16$,

$0 \leqslant y_1 \leqslant 4, 0 \leqslant y_2 \leqslant 6, 0 \leqslant y_3 \leqslant 5, 0 \leqslant y_4 \leqslant 6$。

方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=16, y_i \geqslant 0, i=1,2,3,4$ 的非负整数解数目:$\binom{19}{16}=969$。

方程 $y_1+y_2+y_3+y_4=16$,附加条件:

A_1:$y_1 \geqslant 5, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$。

A_2:$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 7, y_3 \geqslant 0, y_4 \geqslant 0$。

A_3:$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 6, y_4 \geqslant 0$。

A_4:$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, y_3 \geqslant 0, y_4 \geqslant 7$。

分别求非负整数解数目 $|A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|$ 如下:

$|A_1|$:做置换 $\xi_1=y_1-5, \xi_2=y_2, \xi_3=y_3, \xi_4=y_4$,得:

$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=11, \xi_i \geqslant 0, i=1,2,3,4$ 的非负整数解数记以 $|A_1|$。

得 $|A_1|=\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}=364$。

类似可得:

$$|A_2| = \binom{12}{9} = 220 \quad |A_3| = \binom{13}{10} = 286, \quad |A_4| = \binom{12}{9} = 220$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{7}{4} = 35, \quad |A_1 \cap A_3| = \binom{8}{5} = 56$$

$$|A_1 \cap A_4| = 35, \quad |A_2 \cap A_3| = \binom{6}{3} = 20, \quad |A_2 \cap A_4| = \binom{5}{2} = 10$$

$$|A_3 \cap A_4| = \binom{6}{3} = 20$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

本题所求的解为：

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|\\ =\ & 969-(364+220+286+220)+(56+35+35+20+10+20)\\ =\ & 55\end{aligned}$$

11. 求 1～10 000 间不能被 4,5,6 整除的数的数目。

解：令 A_1,A_2,A_3 分别表示 1～10 000 间能被 4,5,6 整除的数，则：

$$|A_1| = \left\lfloor\frac{10\,000}{4}\right\rfloor = 2500, \quad |A_2| = \left\lfloor\frac{10\,000}{5}\right\rfloor = 2000$$

$$|A_3| = \left\lfloor\frac{10\,000}{6}\right\rfloor = 1666, \quad |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor\frac{10\,000}{20}\right\rfloor = 500$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{10\,000}{12}\right\rfloor = 833, \quad |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{10\,000}{30}\right\rfloor = 333$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor\frac{10\,000}{60}\right\rfloor = 166$$

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|\\ =\ & 10\,000-(2500+2000+1666)+(500+833+333)-166\\ =\ & 5334\end{aligned}$$

12. 求满足条件：$x_1+x_2+x_3=20, 3\leqslant x_1\leqslant 9, 0\leqslant x_2\leqslant 8, 7\leqslant x_3\leqslant 17$ 的整数解数目。

解：令 $x_1=y_1+3, x_2=y_2, x_3=7+y_3$，得：

$$y_1+y_2+y_3=10, \quad 0\leqslant y_1\leqslant 6, \quad 0\leqslant y_2\leqslant 8, \quad 0\leqslant y_3\leqslant 10$$

令 A_1 为 $y_1>6$ 的解的集合，A_2 为 $y_2>8$ 的解的集合，A_3 为 $y_3>10$ 的解的集合。

$y_1+y_2+y_3=10, y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0$ 的解数目为 $|S|=\binom{10+3-1}{10}=\binom{12}{2}=66$。

$|A_1|$：令 $\eta_1=y_1-7, \eta_2=y_2, \eta_3=y_3, \eta_1+\eta_2+\eta_3=3, \eta_1\geqslant 0, \eta_2\geqslant 0, \eta_3\geqslant 0$，

$|A_1|=\binom{3+3-1}{3}=\binom{5}{3}=10$。

同理，

$$|A_2| = \binom{1+3-1}{1} = 3, \quad |A_3| = 0, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 66-(10+3)=53$$

13. 求满足 $x_1+x_2+x_3=40, 6\leqslant x_1\leqslant 15, 5\leqslant x_2\leqslant 20, 10\leqslant x_3\leqslant 25$ 的整数解数目。

解：令 $y_1=x_1-6, y_2=x_2-5, y_3=x_3-10$，导致 $y_1+y_2+y_3=19, 0\leqslant y_1\leqslant 9, 0\leqslant y_2\leqslant 15, 0\leqslant y_3\leqslant 15$，满足 $y_1+y_2+y_3=19, y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0, y_3\geqslant 0$ 的整数解的数目为 $\binom{19+13-1}{19}=\binom{21}{19}=\binom{21}{2}=210$。

令 A_1 为 $y_1\geqslant 10$ 的解，A_2 为 $y_2\geqslant 16$ 的解，A_3 为 $y_3\geqslant 16$ 的解。

$|A_1|$求解：令 $\eta_1=y_1-10,\eta_2=y_2,\eta_3=y_3,\eta_1+\eta_2+\eta_3=9,\eta_1\geqslant 0,\eta_2\geqslant 0,\eta_3\geqslant 0$，$|A_1|=\binom{11}{2}=55$。

同理

$$|A_2|=\binom{5}{2}=10,\quad |A_3|=\binom{5}{2}=10,\quad |A_1|+|A_2|+|A_3|=75$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=210-75=135$$

14. $x_1+x_2+x_3+x_4=12,0\leqslant x_1\leqslant 4,0\leqslant x_2\leqslant 3,0\leqslant x_3\leqslant 4,0\leqslant x_4\leqslant 5$，求非负整数解的数目。

解：令方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=12$，

附加条件 $x_1\geqslant 5,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0$ 的解为 A_1。

$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 4,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0$ 的解为 A_2。

$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 5,x_4\geqslant 0$ 的解为 A_3。

$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 6$ 的解为 A_4。

分别求$|A_1|,|A_2|,|A_3|,|A_4|,|A_1\cap A_2|\cdots|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$如下：

令 $\xi_1=x_1-5,\xi_2=x_2,\xi_3=x_3,\xi_4=x_4$，

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=x_1+x_2+x_3+x_4-5=7,$$

$$\xi_1\geqslant 0,\quad \xi_2\geqslant 0,\quad \xi_3\geqslant 0,\quad \xi_4\geqslant 0,$$

$$|A_1|=\binom{7+4-1}{7}=\binom{12}{7}=120$$

类似可得：

$$|A_2|=165,\ |A_3|=120,\ |A_4|=80,\ |A_1\cap A_2|=20$$

$$|A_1\cap A_3|=10,\quad |A_1\cap A_4|=4,\quad |A_2\cap A_3|=20$$

$$|A_2\cap A_4|=10,\quad |A_3\cap A_4|=4,\quad |A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_4|=|A_1\cap A_3\cap A_4|=|A_2\cap A_3\cap A_4|$$
$$=|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=12,\quad x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0,\quad x_4\geqslant 0$$

$$S=\binom{15}{12}=455$$

故所求的非负整数解的数目为 1。

$$\begin{aligned}&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|\\=&\ 455-(120+165+120+80)+(20+10+4+20+10+4)\\=&\ 34\end{aligned}$$

15. 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=10,x_1\geqslant 0,0\leqslant x_2\leqslant 4,0\leqslant x_3\leqslant 5,0\leqslant x_4\leqslant 7$，求其非负整数解。

解：令方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=10$，

附加条件 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 5, x_3\geqslant 0, x_4\geqslant 0$ 的非负整数解为 A_1。

附加条件 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 6, x_4\geqslant 0$ 的整数解为 A_2。

$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0, x_4\geqslant 8$ 的整数解为 A_3。

分别求 $x_1+x_2+x_3+x_4=10, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0, x_4\geqslant 0$ 的非负整数解 S 数目 $|S|$ 及 $|A_1|, |A_2|, |A_3|, \cdots, |A_1\cap A_2\cap A_3|$ 如下：

$$|S|=\binom{13}{10}=256$$

A_1：$x_1+x_2+x_3+x_4=10, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 5, x_3\geqslant 0, x_4\geqslant 0$ 做变换 $\xi_1=x_1, \xi_2=x_2-5, \xi_3=x_3, \xi_4=x_4$，得：

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=5,\quad \xi_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3,4$$

$$|A_1|=\binom{5+4-1}{5}=\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=56$$

$$|A_1|=56,\quad |A_2|=35,\quad |A_3|=10$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

故所求的答案为 $256-(56+35+10)=185$。

16. 红、蓝色的珠子各 6 颗，黄色珠子 3 颗，串成 1 条 12 颗珠子的项链，有几种方案。求 $x_1+x_2+x_3=12, 0\leqslant x_1\leqslant 6, 0\leqslant x_2\leqslant 6, 0\leqslant x_3\leqslant 3$ 的非负整数解的数目。

解：$x_1+x_2+x_3=12, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$ 的整数解数目为：

$$\binom{12+3-1}{12}=\binom{14}{12}=91$$

令 $x_1+x_2+x_3=12$，附加条件为 $x_1\geqslant 7, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$ 的整数解为 A_1；

附加条件 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 7$ 的整数解为 A_2；

附加条件 $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 4$ 的整数解为 A_3。

A_1：$x_1+x_2+x_3=12, x_1\geqslant 7, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0$，令 $x_1=\xi_1-7, x_2=\xi_2, x_3=\xi_3$，得：

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=5,\quad \xi_i\geqslant 0,\quad i=1,2,3$$

$$|A_1|=\binom{5+3-1}{5}=\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=21$$

$$|A_1|=|A_2|=\binom{7}{2}=21,\quad |A_3|=\binom{10}{8}=45$$

$$|A_1\cap A_2|=0,\quad |A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=\binom{3}{1}=3$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=91-(21+45+21)+(0+3+3)=10$$

17. 在 zigzag 的全排列中：(1)求两个 z 和两个 g 不相邻的排列数；(2)求 z 和 g 不相邻的排列数。

解：(1) 令 A_1 为两个 z 相邻的排列，A_2 为两个 g 相邻的排列，求 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|$。

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}| &= \frac{6!}{(2!)^2}-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|\\ &= \frac{720}{4}-2\cdot\frac{5!}{2!}+4!\\ &= 720-2\times 60+24\\ &= 84\end{aligned}$$

(2) 令 A 表示 zg 相邻的排列。

$$|\overline{A}|=\frac{6!}{(2!)^2}-\frac{4!}{2!}=\frac{720}{4}-12=180-12=168$$

18. 92 人一道出游，47 人带面包，38 人带方便面，42 人带饼干，带面包和方便面 28 人，带面包和饼干 31 人，带方便面和饼干的 26 人，带面包、方便面和饼干的 25 人，有人带三明治，问带三明治的有几人?

解：假定令 A_1,A_2,A_3 分别表携带面包、方便面和饼干的游客集合，则：

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup A_3|\\ =&|A_1|+|A_2|+|A_3|-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|\\ &+|A_2\cap A_3|)+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\ =&(47+38+42)-(28+31+26)+25\\ =&67\\ &92-67=25\end{aligned}$$

带三明治的人数为：$92-(47+38+42)+(28+31+26)-25=25$。

19. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18,1\leqslant x_i\leqslant 9,i=1,2,3,4$ 的整数解的数目。

解：做置换 $\xi_i=x_i-1,i=1,2,3,4$ 得：

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=14,\quad 0\leqslant\xi_i\leqslant 8,i=1,2,3,4\tag{*}$$

满足条件(*)的整数数目为 $\binom{14+4-1}{14}=\binom{17}{3}=680$。

令 A_1,A_2,A_3,A_4 为 $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=14$，条件依次为 $\xi_1\geqslant 9,\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 0,\xi_4\geqslant 0;\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 9,\xi_3\geqslant 0,\xi_4\geqslant 0;\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 9,\xi_4\geqslant 0;\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 0,\xi_4\geqslant 9$。

以求 $|A_1|$ 为例，引进 $\eta_1=\xi_1-9,\eta_2=\xi_2,\eta_3=\xi_3,\eta_4=\xi_4$，结果得 $\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4=5$，$\eta_1\geqslant 0,\eta_2\geqslant 0,\eta_3\geqslant 0,\eta_4\geqslant 0$，$|A_1|=\binom{5+4-1}{5}=\binom{8}{3}=56$。

同理可得

$$|A_2|=|A_3|=|A_4|=56,\quad |A_i\cap A_j|=0,$$
$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=0,\quad i,j,k=1,2,3,\quad |A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0,$$
$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=680-4\times 56=680-224=450$$

20. $x_1+x_2+x_3+x_4=20,1\leqslant x_1\leqslant 6,0\leqslant x_2\leqslant 7,4\leqslant x_3\leqslant 8,2\leqslant x_4\leqslant 6$，求整数解的数目。

解：做置换 $\xi_1=x_1-1,\xi_2=x_2,\xi_3=x_3-4,\xi_4=x_4-2$，得：

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13,\quad 0\leqslant\xi_1\leqslant 5,\quad 0\leqslant\xi_2\leqslant 7,\quad 0\leqslant\xi_3\leqslant 4,\quad 0\leqslant\xi_4\leqslant 4$$

$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13,\xi_i\geqslant 0,i=1,2,3,4$，的整数解的数目为：

$$\binom{13+4-1}{13}=560$$

方程 $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13$，令 $\xi_1\geqslant 6,\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 0,\xi_4\geqslant 0$ 的整数解为 A_1。

$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13$，令 $\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 8,\xi_3\geqslant 0,\xi_4\geqslant 0$ 的整数解为 A_2。

$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13$，令 $\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 5,\xi_4\geqslant 0$ 的整数解为 A_3。

$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13$，令 $\xi_1\geqslant 0,\xi_2\geqslant 0,\xi_3\geqslant 0,\xi_4\geqslant 5$ 的整数解为 A_4。

A_1：$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=13,\xi_1\geqslant 6,\xi_i\geqslant 0,i=2,3,4$

做 $\eta_1=\xi_1-6,\eta_i=\xi_i,i=2,3,4$，得：

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3+\eta_4=7,\quad \eta_i\geqslant 0,i=1,2,3,4$$

$$|A_1|=\binom{7+3}{7}=\binom{10}{3}=120$$

类似可得

$$|A_2|=56,\quad |A_3|=165,\quad |A_4|=165,\quad |A_1\cap A_2|=0$$

$$|A_1\cap A_3|=|A_1\cap A_4|=10,\quad |A_2\cap A_3|=|A_2\cap A_4|=1$$

$$|A_3\cap A_4|=20$$

$$\begin{aligned}|A_1\cap A_2\cap A_3|&=|A_1\cap A_2\cap A_4|=|A_1\cap A_3\cap A_4|\\&=|A_2\cap A_3\cap A_4|=0\end{aligned}$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$$

问题的解为：$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=560-(120+56+165+165)+(10+10+1+1+20)=96$。

21. 求 1～10 000 间不能被 4,6,7,10 整除的整数个数。

解：令 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示 1～10 000 间能被 4,6,7,10 整除的整数。

$$|A_1|=\left\lfloor\frac{10\,000}{4}\right\rfloor=2500,\quad |A_2|=\left\lfloor\frac{10\,000}{6}\right\rfloor=1666$$

$$|A_3|=\left\lfloor\frac{10\,000}{7}\right\rfloor=1428,\quad |A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{10}\right\rfloor=1000$$

$$|A_1\cap A_2|=\left\lfloor\frac{10\,000}{12}\right\rfloor=833,\quad |A_1\cap A_3|=\left\lfloor\frac{10\,000}{28}\right\rfloor=357$$

$$|A_1\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{20}\right\rfloor=500,\quad |A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{10\,000}{42}\right\rfloor=238$$

$$|A_2\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{30}\right\rfloor=333,\quad |A_3\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{70}\right\rfloor=142$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{10\,000}{84}\right\rfloor=119,\quad |A_1\cap A_2\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{60}\right\rfloor=166$$

$$|A_1\cap A_3\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{140}\right\rfloor=71,\quad |A_2\cap A_3\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{210}\right\rfloor=47$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=\left\lfloor\frac{10\,000}{4\times 3\times 7\times 5}\right\rfloor=23$$

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|$$

$$=10\,000-(2500+1666+1428+1000)+(833+357$$