

第 3 章 机器数的表示

3.1 习题及其解答

1. 字长为 n 的纯小数, 所能表示的最大正数是多少?

答案: $1-2^{-n}$

2. 将下列两数表示成二进制浮点规格化形式的数(阶码 2 位, 阶符 1 位, 尾数 4 位, 尾符 1 位)。

$$(1) 8 \times \frac{1}{2} \quad (2) -0.3125$$

解:

$$(1) 8 \times \frac{1}{2} = 2^3 \times 0.1000$$

0	1 1	0	1 0 0 0
阶符	阶码	尾符	尾数

$$(2) -0.3125 = -2^{-1} \times 0.625 = -2^{-1} \times 0.1010$$

1	0 1	1	1 0 1 0
阶符	阶码	尾符	尾数

3. 字长按 8 位, 下列各数的原码、反码和补码各是多少?

- (1) +0001 (2) +1000 (3) +1011
(4) -0001 (5) -1000 (6) -1011
(7) 13/128 (8) -15/64 (9) -11/128

解:

(1) +0001

原码: 0,0000001

反码: 0,0000001

补码: 0,0000001

(2) +1000

原码: 0,0001000

反码: 0,0001000

补码: 0,0001000

(3) +1011

原码: 0,0001011

反码: 0,0001011

补码: 0,0001011

(4) -0001

原码: 1,0000001

反码: 1,1111110

补码: 1,1111111

(5) -1000

原码: 1,0001000

反码: 1,1110111

补码: 1,1111000

(6) -1011

原码: 1,0001011

反码: 1,1110100

补码: 1,1110101

(7) $13/128 = 13/2^7 = 1101/2^7$

$= 0.0001101$

原码: 0.0001101

反码: 0.0001101

补码: 0.0001101

(8) $-15/64 = -1111/2^6$

$= -0.001111$

原码: 1.0011110

反码: 1.1100001

补码: 1.1100010

(9) $-11/128 = -1011/2^7$

$= -0.0001011$

原码: 1.0001011

反码: 1.1110100

补码: 1.1110101

说明: 逗号前的 0 和 1 表示正数的符号位, 0 为正, 1 为负。小数点前的 0 和 1 表示小数的符号位, 同样, 0 为正, 1 为负。

4. 从供选择的答案中选出正确答案, 并把序号写入答案的对应栏。假定在计算机中浮点数的表示格式如下:

15	14	12	11	10	0
阶符	阶码	尾符	尾数		

若阶码的基数为 2, 尾数用规格化数表示, 请选择十进制数 -123.625 在计算机中的表示形式。

当尾数用原码表示, 阶码用补码表示时为 [A]; 当尾数用补码表示, 阶码用补码表示时为 [B]; 当尾数用原码表示, 阶码用移码表示时为 [C]; 当尾数用补码表示, 阶码用移码表示时为

D。该机器数所能表示的最大浮点数为**E**。

供选择的答案：

A~D:

- ① 1111000001000110 ② 0111111110111010
 ③ 0111100001000101 ④ 1000000001000110
 ⑤ 0111100001000110 ⑥ 1111100001000110
 ⑦ 1111111110111010 ⑧ 1010111001010101

- E: ⑨ 2^8 ⑩ 2^7 ⑪ $2^7 \times (1-2^{-11})$
 ⑫ $2^8 \times (1-2^{-11})$ ⑬ $2^7 \times (1-2^{-10})$

答案填写处：

A	B	C	D	E

答案：

A	B	C	D	E
②	⑤	⑦	⑥	⑪

题解：

$$(-123.625)_{10} = (-1111011.101)_2 = -2^7 \times 0.11110111010$$

其原码为

0	111	1	11110111010
阶符	阶码	尾符	尾数

5. 从供选择的答案中选出正确的答案,并把其序号填到答案的相应栏中。

(1) 表示定点数时,若要求数值 0 在计算机中唯一表示为全 0,应使用**A**;

(2) 表示浮点数时,若要求机器零(即尾数为 0,阶码为最小的数)在计算机中表示为全 0,则阶码应使用**B**;

(3) 浮点数取值范围的大小由**C**决定,而浮点数的精度由**D**决定;

(4) 某浮点数其阶码为 8 位,尾数占 40 位,即字长为 48 位,其中阶符和尾符各 1 位。

若阶码和尾数都用补码表示,则该机器数所能表示的最大浮点数是**E**。

供选择的答案：

A、B: ① 原码 ② 反码 ③ 补码 ④ 移码

C、D: ⑤ 字长 ⑥ 尾数的位数 ⑦ 阶码的位数 ⑧ 阶符 ⑨ 尾符

- E: ⑩ 2^{127} ⑪ 2^{128} ⑫ $2^{127} \times (1-2^{-39})$
 ⑬ $2^{128} \times (1-2^{-39})$ ⑭ $2^{127} \times (1-2^{-40})$
 ⑮ $2^{128} \times (1-2^{-40})$

答案填写处：

A	B	C	D	E

答案：

A	B	C	D	E
③	④	⑦	⑥	⑫

题解：在第④项中，尾数占 40 位，其中，尾符占 1 位，小数点后为 39 位。

6. 以一个 16 位的二进制补码作被加数，另一个 8 位的二进制补码作加数进行求和运算。请从下面有关这两个数求和和方法的叙述中，选出两条正确的，顺序填到□和□中。

- ① 两数直接相加；
- ② 被加数为正，两数直接相加；
- ③ 被加数为负，两数直接相加；
- ④ 加数为正，两数直接相加；
- ⑤ 只需把加数的高 8 位补上全 0，形成一个 16 位的二进制数，再与被加数相加；
- ⑥ 只需把加数的高 8 位补上全 1，形成一个 16 位的二进制数，再与被加数相加；
- ⑦ 加数为正时，高 8 位补 0；加数为负时，高 8 位补 1，形成一个 16 位的二进制数，再与被加数相加；

⑧ 加数为正时，高 8 位补 0；加数为负时，高 8 位补 10000000，形成一个 16 位的二进制数，再与被加数相加。

答案：④和⑦

7. 某浮点数如下所示，按(1)、(2)要求，求其规格化表示。

11	010	11	001010101
阶符	阶码	尾符	尾数

(1) 阶码为补码，尾数为原码；

(2) 阶码和尾数均为补码。

解：

(1) ① 把题给数变成补码，即得

11 010 11 110101011

② 左规，得

11 000 11 010101100

(2) 尾数前 3 位为 110(11 为符号位，0 为数值部分第 1 位)，不需左规，即题给数就是规格化的浮点数，故结果为

11 010 11 001010101

8. 请按阶符 1 位，阶码 3 位；尾符 1 位，尾数 7 位格式，阶码用补码，尾数用原码表示下面两个数。

(1) $[X]_{\text{原}} = 11.11001\text{B}$

(2) $X = +50.50\text{D}$

解：

(1) 把题给理解为变形原码,得

$$0 \quad 000 \quad 11 \quad 1100100$$

(2) $X=50.50=2^6 \times 0.1100101$

$$\text{原码} \quad 0 \quad 110 \quad 0 \quad 1100101$$

$$\text{结果} \quad 0 \quad 110 \quad 0 \quad 1100101$$

3.2 补充题及其解答

1. 将下列各数转换成二进制数,再分别用原码、反码、补码表示(字长按 5 位)。

(1) $1/16$, (2) $-1/16$, (3) $9/16$, (4) $-9/16$, (5) 0 , (6) -0 。

解:

$$(1) 1/16 = 1/2^4 = (0.0001)_2,$$

$$(0.0001)_{\text{原}} = (0.0001)_{\text{反}} = (0.0001)_{\text{补}} = 0.0001$$

$$(2) -1/16 = -1/2^4 = (-0.0001)_2,$$

$$(-0.0001)_{\text{原}} = 1.0001, (-0.0001)_{\text{反}} = 1.1110, (-0.0001)_{\text{补}} = 1.1111$$

$$(3) 9/16 = 1001/2^4 = (0.1001)_2$$

$$(0.1001)_{\text{原}} = (0.1001)_{\text{反}} = (0.1001)_{\text{补}} = 0.1001$$

$$(4) -9/16 = -1001/2^4 = (-0.1001)_2$$

$$(-0.1001)_{\text{原}} = 1.1001, (-0.1001)_{\text{反}} = 1.0110, (-0.1001)_{\text{补}} = 1.0111$$

$$(5) 0 = (0.0000)_2, (0)_{\text{原}} = (0)_{\text{反}} = (0)_{\text{补}} = 0.0000$$

$$(6) -0 = (-0.0000)_2, (-0.0000)_{\text{原}} = 1.0000, (-0.0000)_{\text{反}} = 1.1111, (-0.0000)_{\text{补}} = 0.0000$$

2. 已知 $X=0.1011$, $Y=-0.0101$, 利用补码求:

(1) $X/2$, (2) $Y/2$, (3) $2X$, (4) $-2Y$, (5) $Y/4$

解:

(1) 因为

$$[X]_{\text{补}} = 0.1011$$

所以 $[X/2]_{\text{补}} = 0.0101$ (恒置 1), 即

$$X/2 = 0.0101$$

(2) 因为

$$[Y]_{\text{补}} = 1.1011$$

所以 $[Y/2]_{\text{补}} = 1.1101$ (恒置 1), 即

$$Y/2 = -0.0011$$

(3) $[2X]_{\text{补}}$ 溢出

(4) 因为

$$[2Y]_{\text{补}} = 1.0110$$

所以 $[-2Y]_{\text{补}} = 0.1010$, 即

$$2Y = -0.1010$$

(5) $[Y/4]_{\text{补}} = 1.1111$, 即

$$Y/4 = -0.0001$$

3. 已知 $[X]_{\text{补}} = 1.a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, 问:

- (1) 当 $-\frac{1}{2} < X < 0$ 时, $a_1 a_2 \cdots a_6$ 为何值?
- (2) 当 $-\frac{1}{4} \leq X < -\frac{1}{8}$ 时, $a_1 a_2 \cdots a_6$ 又为何值?

解:

(1) 当 X 为负的纯小数时, 真值与补码之间的转换公式为 $X = -2 + [X]_{\text{补}}$ 。

因为

$$-0.100000 < X < 0.000000$$

即

$$-0.1000000 < -2 + 1.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 < 0.000000$$

所以

$$-0.1000000 < -1 + 0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 < 0.000000$$

即

$$\frac{1}{2} < 0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 < 1$$

于是 $a_1 = 1, a_2 \sim a_6$ 至少有 1 位为 1。

(2) 因为

$$-\frac{1}{4} \leq X < -\frac{1}{8}$$

即

$$-0.010000 \leq -1 + 0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 < -0.001000$$

所以

$$0.110000 \leq 0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 < 0.111000$$

所以 $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 a_5 a_6$ 为 000~111 中的任意一个值。

4. 试求出下列情况下的最大正数、非零最小正数、绝对值最大的负数、绝对值最小的负数。设机器字长为 16 位, 阶码为 7 位, 其中包括阶符 1 位, 尾数 9 位, 其中包括尾符 1 位。
注意: 区分尾数规格化和非规格化两种情况。

解: 根据题意, 浮点数采用以下格式表示:



这样, 该题的答案如表 3.1 所示。

表 3.1

	最大正数	非零最小正数	绝对值最大负数	绝对值最小负数
规格化	$\begin{array}{cc} \overbrace{00}^{6\text{个}1} & \overbrace{1\cdots1}^{8\text{个}1} \\ (1-2^{-8}) \times 2^{63} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \overbrace{01}^{6\text{个}0} & \overbrace{1\ 0\cdots0}^{7\text{个}0} \\ 2^{-1} \times 2^{-64} = 2^{-65} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \overbrace{10}^{6\text{个}1} & \overbrace{0\cdots0}^{8\text{个}0} \\ -2^0 \times 2^{63} = -2^{63} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \overbrace{11}^{6\text{个}0} & \overbrace{0\cdots0\ 1}^{7\text{个}0} \\ 2^{-8} \times 2^{-64} = 2^{-72} \end{array}$
非规格化	$\begin{array}{cc} \overbrace{00}^{6\text{个}1} & \overbrace{1\cdots1}^{8\text{个}1} \\ (1-2^{-8}) \times 2^{63} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \overbrace{01}^{6\text{个}0} & \overbrace{0\cdots0\ 1}^{7\text{个}0} \\ 2^{-8} \times 2^{-64} = 2^{-72} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \overbrace{10}^{6\text{个}1} & \overbrace{0\cdots0}^{8\text{个}0} \\ -2^0 \times 2^{63} = -2^{63} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \overbrace{11}^{6\text{个}0} & \overbrace{0\cdots0\ 1}^{7\text{个}0} \\ 2^{-8} \times 2^{-64} = 2^{-72} \end{array}$

说明:

① 规格化浮点数对于正数来说,其尾数大于等于 0.5 或小于 -1;对于负数来说,其尾数是大于等于 -1 而小于 -0.5。

② 补码能表示的最小值为 -2^{n-1} 。

5. 某计算机字长为 32 位,其中 31 位表示尾数,1 位是符号位。请分别写出用定点整数和定点小数表示时的最大正数和最小负数。

解:

(1) 用定点整数表示时,最大正整数为 $2^{31}-1$;最小负整数为 -2^{31} (补码存储)。

(2) 用定点小数表示时,最大正小数为 $1-2^{-31} \approx 1$;最小负小数为 -1(同样原因,即补码存储)。

6. 某机器字长 32 位,其中含有 1 位阶符,7 位阶码,1 位尾符,23 位尾数,若用浮点数表示,请写出它所能表示的最大正数、最小负数以及最小的绝对值。

解: 最大正数: $2^{2^7-1} \times (1-2^{-23}) \approx 2^{127} \approx 10^{38}$;

最小负数: $-2^{2^7-1} \times (1-2^{-23}) \approx -10^{38}$;

最小的绝对值为: $2^{-(2^7-1)} \times 2^{-23} = 2^{-127} \times 2^{-23} = 2^{-150}$ 。

7. 设阶符 1 位,阶码 4 位,尾符 1 位,尾数 15 位,把十进制数 $X = (+128.65) \times 2^{-10}$ 写成浮点表示的机器数,并将阶码和尾数分别用原码、反码和补码表示。

解: 已知

$$X = (-128.75) \times 2^{-10}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= +128.75 \times 2^{-10} \\ &= (2^7 + 0.11) \times 2^{-10} \\ &= 10000000.11 \times 2^{-10} \\ &= 2^{-2} \times 0.100000011 \end{aligned}$$

于是

$$[X]_{\text{原}} = 1,0010;0,100000001100000$$

$$[X]_{\text{反}} = 1,1101;0,100000001100000$$

$$[X]_{\text{补}} = 1,1110;0,100000001100000$$

8. 设用补码表示二进制浮点数,阶符 1 位,阶码 2 位,尾符 1 位,尾数 4 位。请写出最大正数、最小正数、最大负数、最小负数各是多少。

解:

最大正数是 $2^3 \times 0.1111 = 7.5$;

最小正数是 $2^{-4} \times 0.0001 = \frac{1}{256}$;

最大负数是 $-2^{-4} \times 0.0001 = -\frac{1}{256}$;

最小负数是 $2^3 \times (-1) = -8$ 。