第3章 关　　系

CHAPTER

集合的成员之间往往存在着某种约束，这种约束称为关系，如果能把集合成员之间的关系刻画出来，对集合的了解就更清楚了。例如，用{1,2,3,4}来描述一个家庭，这仅仅说明了家庭的组成，并不能清楚地表达家庭的性质，只有把家庭中各成员之间的关系清楚地表达出来，如1代表父亲、2代表妻子、3代表兄、4代表妹，这样才能全面地、深刻地刻画这个家庭。可见，刻画成员之间的关系是何等重要。同样，刻画一个国家、省、市、学校等也都是如此。

可见，用集合来刻画一个团体只能刻画团体的组成，这仅是一个方面，只有把团体内各成员之间的关系刻画出来才是对这个团体的详细刻画。

3.1　关系的基本概念

3.1.1　关系及其数学定义

定义 3-1　关系的数学定义。

设 A、B 是两个集合，$A\times B$ 的子集是 A 到 B 的二元关系或定义在 $A\times B$ 上的二元关系。同理，设 A、B、C 是3个集合，$A\times B\times C$ 的子集是定义在 $A\times B\times C$ 上的三元关系。$A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$ 的子集是定义在 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$ 上的 n 元关系。A^n 是定义在 A^n 上的 n 元关系，简称 A 上的 n 元关系。

例如，A 是学生的集合，$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，B 是选课的集合，$B=\{$英语，数学，物理，化学，语文，历史，地理，生物，音乐，体育$\}$，那么

$R_1=\{$<1，英语>，<2，数学>，<3，物理>，<4，化学>，<5，语文>，<6，历史>，<7，地理>，<8，生物>，<9，音乐>$\}$，这是一个选课关系，不同的学生选择不同的课。

$R_2=\{$<1，英语>，<2，英语>，<3，英语>，<4，英语>，<5，英语>，<6，英语>，<7，英语>，<8，英语>，<9，英语>$\}$，这是一个选课关系，A 中所有学生选择英语课。

R_3＝{<1，英语>，<2，英语>，<3，数学>，<4，数学>，<5，语文>，<6，语文>，<7，物理>，<8，物理>，<9，英语>}，这是一个选课关系。

R_4＝{<1，英语>，<2，英语>，<3，数学>，<8，物理>，<9，英语>}，这是部分学生的选课关系。

上面的 R_1、R_2、R_3、R_4 都称为二元关系，它们的元素是序偶。

例如，A 是学生的集合，$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，B 是选课的集合，B＝{英语，数学，物理，化学，语文，历史，地理，生物，音乐，体育}，C 是得分的集合，$C=\{a,b,c,d,e\}$，那么，R_5＝{<1，英语，a>，<2，数学，b>，<3，物理，b>，<4，化学，b>，<5，语文，c>，<6，历史，b>，<7，地理，b>，<8，生物，c>，<9，音乐，b>}。

这是 $A\times B\times C$ 上的三元关系，反映了学生、选课、得分的关系。可见，三元关系是一个集合，其元素是三元序组。因为，集合的笛卡儿乘积不满足结合律，所以，$A\times B\times C$ 应该理解成 $(A\times B)\times C$，而不是 $A\times(B\times C)$，那么，三元序组<1，英语，a>应理解成<<1，英语>，a>，这就是用二元序偶定义三元序组的方法。关系本质上是元组的集合，集合可以用描述法表示，关系也可以用描述法表示，设论域 A 上有关系 R，用描述法表达如下：

$$R=\{<x_1,x_2,\cdots,x_n>|P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n\in A$，$<x_1,x_2,\cdots,x_n>$称为 n 元序组，简称 n 元组。

当 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 T 时，n 元组$<x_1,x_2,\cdots,x_n>\in R$。

当 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 F 时，n 元组$<x_1,x_2,\cdots,x_n>\notin R$ 。

当 $n=1$，$R_1=\{<x>|P(x)\}$，称为一元关系，它等价于集合 $R_2=\{x|P(x)\}$。

例如，设 R 是实数，R 上的小于关系（<）定义如下：

$$<=\{<x,y>|x\in R,y\in R,x<y\}$$

等号左面的<符号是关系符号，等号右面 $x<y$ 中的<符号是数学中的“小于”符号。在自然数集合上的小于关系（<）可以用归纳法定义如下：

基础　$<0,1>\in<$

归纳　如果$<x,y>\in<$，则$<x+1,y+1>\in<$，$<x,y+1>\in<$

最小项条款　$\forall x,y(x,y\in N\rightarrow x<y$，$<x,y>$是满足基础，归纳条款的序偶）。

定义 3-2　设 R 是 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$ 上的 n 元关系，如果 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n=\varnothing$，$R$ 称为空关系，如果 $R=A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$，$R$ 称为全域关系。

定义 3-3　关系的相等。

设 R_1 是 $A_1\times A_2\times A_3\times\cdots\times A_n$ 上的 n 元关系，R_2 是 $B_1\times B_2\times B_3\times\cdots\times B_m$ 上的 m 元关系，$R_1=R_2$，当且仅当 $m=n$，且 $A_i=B_j(i\in 1,\cdots,n,j\in 1,\cdots,m)$，并且 R_1 和 R_2 是具有相同元组的集合。

这个定义说明，两个关系相等不但两个关系要有相同的元组，而且定义两个关系的叉积应相同。

3.1.2 二元关系

关系中最重要的是二元关系，从上节可知，其他多元关系都可用二元关系来定义，如

三元关系$\{<a,b,c>,<1,2,3>\}$可以看成二元关系$\{<<a,b>,c>,<<1,2>,3>\}$，不过，这个二元关系中的序偶其第 1 分量又是一个序偶，为什么不把三元关系看成$\{<a,<b,c>>,<1,<2,3>>\}$呢？因为叉积不满足结合律，$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$，所以约定 $A\times B\times C=(A\times B)\times C$，所以有$<a,b,c>=<<a,b>,c>$，$<1,2,3>=<<1,2>,3>$。

同理，

$$\text{四元序组 } <a,b,c,d>=<<a,b,c>,d>=<<<a,b>,c>,d>$$

$$\vdots$$

$$n\text{ 元序组}<x_1,x_2,\cdots,x_n>=<\cdots<<<x_1,x_2>,\ x_3>\cdots>,\cdots x_n>$$

二元关系如此重要，以至于下面凡是谈到关系二词都是指二元关系，其他(元)关系都要指出相应的元数，如三元关系、四元关系等。

1. 二元关系的图形表示

A 到 B 的(二元)关系可以用图表示，如图 3-1 所示。

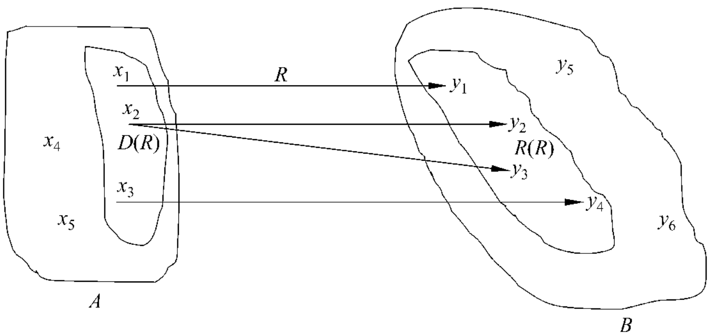


图 3-1

设 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$B=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$，关系 R 定义在 A 到 B 上，A 称为前域，B 称为陪域。关系 R 的定义域(Domn)记作 $D(R)=\{x_1,x_2,x_3\}$，x_4、x_5 不是定义域中的元素，关系 R 的值域(Range)记作 $R(R)=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，y_5、y_6 不是值域中的元素，关系 R 和集合一样可以用列举法、描述法表示，不过，集合是元素的集合，关系是序偶的集合，R 关系用列举法表示如下：

$$R=\{<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_2,y_3>,<x_3,y_4>\}$$

可得，$<x_1,y_1>\in R$，$<x_2,y_2>\in R$，$<x_2,y_3>\in R$，$<x_3,y_4>\in R$，如果用中缀记号，表示如下：

$$x_1Ry_1,\quad x_2Ry_2,\quad x_2Ry_3,\quad x_3Ry_4$$

2. 几个特殊的二元关系

空关系$\varnothing$、全域关系、相等(恒等)关系是几个特殊的二元关系，它们的意义如下：

设 R 是 A 上的二元关系，

$R\subseteq A\times A=\{\}=\varnothing$　称为 A 上的空关系，记作$\varnothing_A$

$R=A\times A$　称为 A 上的全域关系，记作 U_A

设 R 是 A 的二元关系，$|A|=n$

$$R=\{<x_i,x_i>|x_i\in A\ ,i\in 1,\cdots,n\ \}$$

R 称为 A 上的相等关系(或恒等关系),记作 I_A。

3. 关系的交、并、差、补运算

因为关系是笛卡儿叉积的子集,根据幂集的讨论,$A\times B$ 上的关系共有 $2^{|A\times B|}$ 个。二元关系是序偶的集合,因此,有关集合论中的集合运算规律都可以应用于关系。例如,设 R、S 是给定集合上的二元关系,那么 $R\cap S$、$R\cup S$、$R-S$、$\sim R$ 都是有意义的。它们的另一种定义如下:

$$x(R\cap S)y\Leftrightarrow xRy\wedge xSy;$$
$$x(R\cup S)y\Leftrightarrow xRy\vee xSy;$$
$$x(R-S)y\Leftrightarrow xRy\wedge\neg(xSy);$$
$$x(\sim R)y\Leftrightarrow\neg(xRy)。$$

【例 3-1】 平面上的几何图形是实平面上的一种关系。例如:

$R_1=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,x^2+y^2\leqslant 9\}$,这是一个以坐标原点为圆心、以 3 为半径的圆。

$R_2=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,x^2+y^2\geqslant 4\}$,这是以坐标原点为圆心、以 2 为半径的圆外部分。

$R_3=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,1\leqslant x\leqslant 3,0\leqslant y\leqslant 2.5\}$,这是一个矩形,如图 3-2 所示。

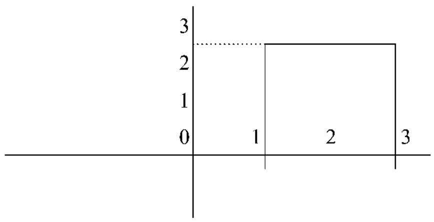


图 3-2

4. 关系的集合运算

$R_1\cup R_3=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,(x^2+y^2\leqslant 9)\vee(1\leqslant x\leqslant 3\wedge 0\leqslant y\leqslant 2.5)\}$

$R_1\cap R_2=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,(x^2+y^2\leqslant 9)\wedge(x^2+y^2\geqslant 4)\}$ 这是一个环。

$R_1-R_2=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,(x^2+y^2\leqslant 9)\wedge\neg(x^2+y^2\geqslant 4)\}$

$\sim R_2=\{<x,y>|<x,y>\in R\times R,\neg(x^2+y^2\geqslant 4)\}$ 这是圆。

非但二元关系可进行集合运算,多元关系同样也可以进行集合运算。

3.1.3 关系矩阵和关系图

对有限集合 A 和 B 而言,矩阵是表达 A 到 B 的二元关系的有效方法。设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$,A 到 B 的二元关系 R 用矩阵表达如下:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\
b_1 & & & & & & \\
b_2 & & & & & & \\
b_3 & & & & & & \\
b_4 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
b_m & & & & & &
\end{array}$$

矩阵的记入为 r_{ij},当$<a_i,b_j>\in R$,则 $r_{ij}=1$

当$<a_i,b_j>\notin R$，则 $r_{ij}=0$

只要 A 和 B 是有限集合，A、B 之间的关系都可以用矩阵表达，这样的矩阵称为关系矩阵，关系矩阵的记入只能是 1 或 0，所以又称布尔矩阵。

例如，$A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，A 到 B 的二元关系 $R=\{<a_1,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_1>,<a_2,b_2>\}$，那么，关系矩阵如下：

$$\begin{array}{ccc} & a_1 & a_2 \\ b_1 & 1 & 1 \\ b_2 & 0 & 1 \\ b_3 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{即关系矩阵 } \boldsymbol{M}_g=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

当然，也可以把行坐标和纵坐标交换，如下所示：

$$\begin{array}{cccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{关系矩阵 } \boldsymbol{M}_g=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

关系还可以用关系图来表示，**关系图**是由“点”、“线”组成的有向图。关系图中，点用一个小圆圈表示，称为**结点(node)**，用来表示集合的元素。线用具有箭头指示方向的边(edge)表示，这样的边称为**有向边**。例如，A 上的二元关系 R，结点用来表示 A 中的元素，$<a_i,b_j>\in R$，则在关系图中从 a_i 到 b_j 就有一条有向边，a_i 称为边的**始点**，b_j 称为边的**终点**。如果$<a_i,a_i>\in R$，则说 a_i 结点上有一个**自环(sling)**。

【例 3-2】　上面的例子，$A=\{a_1,a_2\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\}$，A 到 B 的二元关系 $R=\{<a_1,b_1>,<a_1,b_3>,<a_2,b_1>,<a_2,b_2>\}$，那么，关系图如图 3-3 所示。

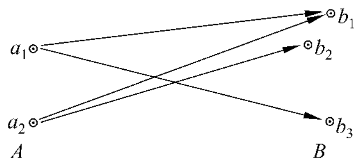


图　3-3

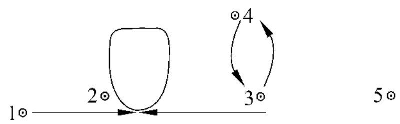


图　3-4

【例 3-3】　$A=\{1,2,3,4,5\}$，A 上的二元关系 $R=\{<1,2>,<2,2>,<3,2>,<3,4>,<4,3>\}$用图表示，如图 3-4 所示。

图中，5 称为**孤立结点**。

3.2　关系的性质

具有 n 个元素的集合 A 上的二元关系有 $2^{|A\times A|}$个，其中有一些关系具有特殊性质。例如，大家所熟悉的空关系、全域关系和恒等关系就是具有特殊性质的关系。下面定义 5 种二元关系的性质，这 5 种性质用在后面的关系讨论中，一个关系究竟具有何种性质决定着这个关系的性质，如下面讨论的等价关系、序关系、相容关系都是以关系的性质来定义的。

3.2.1 关系的性质

定义 3-4 R 是自反的。

设 R 是集合 A 上的二元关系，R 是自反的，当且仅当对 A 中的每一个元素 x 都有 xRx。

即 R 是自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow xRx)$。

任何关系，特别是有限集合上的关系都可以用关系矩阵、关系图表示，那么具有自反性质的关系，其关系矩阵、关系图有什么特点呢？

(1) 关系矩阵的主对角线上都记入 1。

(从关系矩阵左上角到右下角连条直线，这条直线称为主对角线)

(2) 关系图中任何一个结点都有自环。

定义 3-5 R 是反自反的。

设 R 是集合 A 上的二元关系，R 是反自反的，当且仅当对 A 中的每一个元素 x，都有

$<x,x>\notin R$， 即 R 是反自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$。

其关系矩阵和关系图上的表现是：

(1) 关系矩阵的主对角线上的位置都记入 0。

(2) 关系图中任何一个结点都没有自环。

“反自反”又称“非自反”，和自反一样是关系的一种新的性质，而不能把它们理解成互为否定。一个关系不是自反的并不能说明这个关系是反自反的，当然，不是反自反的也不能说明关系是自反的。

定义 3-6 R 是对称的。

设 R 是集合 A 上的二元关系，R 是对称的，当且仅当对 A 中任意两个结点 x、y，如果 $<x,y>\in R$，那么，必有 $<y,x>\in R$。即 R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall x,y\in A(<x,y>\in R\rightarrow <y,x>\in R)$。

或者 R 是对称的 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge x\in B\wedge xRy\rightarrow yRx)$。

其关系矩阵和关系图上的表现是：

(1) 关系矩阵主对称线的一边记入 1，那么，其对称点一定也记入 1。但是，“0 的对称点是 0”是允许的。

(2) 关系图中任何两个结点之间，如果有边一定是方向相反的两条边。

定义 3-7 R 是反对称的。

设 R 是集合 A 上的二元关系，R 是反对称的，当且仅当对 A 中任意两个结点 x、y，如果 $<x,y>\in R$，那么，$<y,x>\notin R$。即 R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall x,y\in A(<x,y>\in R\rightarrow <y,x>\notin R)$。

这个定义还不够全面，它没有把 $x=y$ 的情况包括进去，正确的定义应如下：

$$R\text{ 是反对称的}\Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge y\in B\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$$

根据这个定义，R 满足反对称，A 中除了单向边以外，还可以有孤立结点。

其关系矩阵和关系图上的表现是：

(1) 关系矩阵主对角线的一边记入 1，则其对称点必为 0，但是，“0 的对称点是 0”是

允许的。

(2) 关系图中任何两个结点之间，如果有边一定是一个方向的单边。但可以没有边。和自反与反自反之间的关系一样，对称和反对称也不是互为否定。

定义 3-8　R 是传递的。

设 R 是集合 A 上的二元关系，R 是可传递的，当且仅当对 A 中任意结点 x、y、z，如果 $<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，那么，必有 $<x,z>\in R$。

即 R 是可传递的 $\Leftrightarrow \forall x,y\in A(<x,y>\in \wedge <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R)$

或者 R 是传递的 $\Leftrightarrow \forall x\forall y(x\in A\wedge x\in B\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$

其关系矩阵和关系图上的表现是：

(1) 关系矩阵中，如果 x、y 有记入 1，y、z 有记入 1，那么，x、z 必有记入 1(在关系矩阵上看传递性不容易)。

(2) 关系图中任何结点之间，如果 x 到 y 有边，y 到 z 有边，那么，从 x 到 z 必有边(在关系图上看传递性只能逐条边检查)。

根据上面的 5 个定义，R 是自反的(反自反、对称、反对称、传递的)，则称 R 满足自反性(反自反性、对称性、反对称性、传递性)。

【例 3-4】　空集合上的空关系满足哪些性质？

满足对称、反对称、自反、反自反和传递性。

【例 3-5】　全域关系满足哪些性质？

满足自反、对称、传递性。反自反不满足，因为满足自反，所以其关系矩阵主对角线上都是 1，这就决定了反自反性不满足。反对称性不满足，又因为如果满足反对称性，其关系矩阵主对角线一边是 1，其对称点为 0，全域关系两者都是 1。

【例 3-6】　恒等关系满足哪些性质？

满足自反、对称、反对称、传递性。不满足反自反。为什么对称和反对称都能满足呢？因为恒等关系的关系图中只有自环，没有边，所以对称、反对称都能满足。

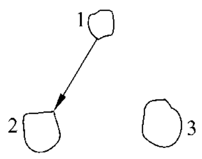
由定义和上面的例子可知：

自反和反自反互为否定，但是一个关系既可不是自反，又可不是反自反。

对称和反对称不是互为否定，可以同时存在。

关系的性质其实很容易从关系矩阵和关系图上看出来，下面以例子说明。

【例 3-7】　设 $A=\{1,2,3\}$，A 上的关系 $R_1=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$，用图表示如图 3-5 所示。



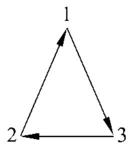
R_1 关系满足自反、反对称、传递性

$$\begin{matrix} 1 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

主对角线都是 1,1 的对称点是 0

图　3-5

【例 3-8】　设 $A=\{1,2,3\}$，A 上的关系 $R_2=\{<2,1>,<1,3>,<3,2>\}$，用图表示如图 3-6 所示。



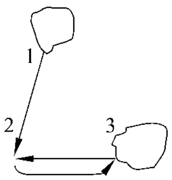
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

R_2满足反自反、反对称、不是传递的　　　　主对角线都是0,1的对称点是0

图 3-6

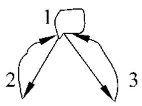
【**例 3-9**】 设 $A=\{1,2,3\}$,A 上的关系 $R_3=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>,<1,1>,<3,3>\}$,用图表示如图 3-7 所示。

R_3 既不满足自反,又不满足反自反;既不满足对称,又不满足反自反;并且不满足传递性。



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

图 3-7



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

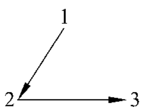
图 3-8

【**例 3-10**】 设 $A=\{1,2,3\}$,A 上的关系 $R_4=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<1,3>,<3,1>\}$,用图表示如图 3-8 所示。

R_4 满足对称性,不满足自反,不满足反自反,不是反对称,不是传递的。

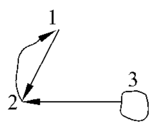
【**例 3-11**】 设 $A=\{1,2,3\}$,A 上的关系 $R_5=\{<1,2>,<2,3>\}$,用图表示如图 3-9 所示。

R_5 关系满足反自反、反对称,不满足自反、对称、传递性。



$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

图 3-9



$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

图 3-10

【**例 3-12**】 用图表示如图 3-10 所示。

关系既不满足对称,又不满足反对称;既不满足自反,又不满足反自反;且不满足传递性,因为关系中有破坏传递的地方,如关系中有$<3,2>$,$<2,1>$,但没有$<3,1>$。所以,利用关系图或关系矩阵检查关系的传递性时,主要是寻找有没有破坏传递性的地方,当然要检查所有可能的情况。

3.2.2 有关关系性质的总结

从关系性质的讨论可以得到下面的结论:

(1) 任何集合上的恒等关系满足自反、对称、反对称、传递性,但不满足反自反。

(2) 非空集合上的空关系满足反自反、对称、反对称、传递性，但不是自反。空集上的空关系则满足自反、反自反、对称、反对称、传递性。这要用它们的定义来解释。

(3) 非空有限集合上的全域关系满足自反、对称、传递性，但不满足反自反、反对称性。

(4) 整数集合上的$\leqslant$关系满足自反性、反对称性、传递性，但不满足反自反、对称性。$<$关系满足反自反、反对称、传递性，但不满足自反、对称性。

(5) 不是自反的关系未必反自反，不是反自反的关系未必自反。

(6) 不是对称的关系未必反对称，不是反对称的关系未必对称。

(7) 关系可既对称又反对称。

(8) 恒等关系是自反的，但自反关系未必恒等。

思考与提示 3-1

(1) 关系是集合元素之间的一种约束，是元组的集合，关系不是定义在两个元素之间而是定义在两个集合之间，所以在数学上是“叉积”的子集。

(2) 多元关系如何解释成二元关系？空关系？恒等关系？全域关系各有什么特点？

(3)“两个关系所包含的序偶相等，则两个关系相等”，这句话有什么问题？

(4) A 上的二元关系是指哪两个集合之间的关系？

证明叉积不满足结合律、交换律，从证明中你能得到些什么心得？

(5) 关系的定义域、值域是如何定义的？空关系、全域关系、恒等关系是如何定义的？

(6) 关系是序偶的集合，所以关系是用集合来定义的，集合的交、并、差、补运算同样适用于关系，请画出例 3-1 中关系的图形。

(7) 自反、反自反、对称、反对称、传递性这是关系的 5 个性质，说明自反和反自反不是互为否定，对称和反对称不是互为否定。

(8) 关系可以用关系矩阵和关系图来表示，从关系矩阵和关系图如何看出关系的 5 种性质？

(9) 举一个例子说明关系既不满足自反性，又不满足反自反性。证明一个关系不能既满足自反性，又满足反自反性。

(10) 举一个例子说明关系既不满足对称性，又不满足反对称性。找出一个关系既满足对称性，又满足反对称性。

(11) 以例子说明 3.2.3 小节中总结出的每一条。

习题 3-1

1. 用列举法表达下列 $A\times B$ 上的二元关系 S。

(1) $A=\{0,1,2\}$ $B=\{0,2,4\}$ $S=\{<x,y>|x,y\in A\cap B\}$

(2) $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{1,2,3\}$ $S=\{<x,y>|x=y^2\}$

2. 对下列关系 R，求出它的关系矩阵。

(1) $A=\{1,2,3\}$ $R=\{<2,2>,<1,2>,<3,1>\}$

(2) $A=\{0,1,2,3\}$ $R=\{<x,y>|x\leqslant 2\wedge x\geqslant 1\}$

(3) $A=\{5,6,7,8\}$ $B=\{1,2,3\}$ $S=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in B\wedge 3\leqslant x-y\leqslant 7\}$

(4) $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ $R=\{<x,y>|x<y\vee x$ 是质数$\}$

3. 给出下列关系在 N 上的归纳定义，并用定义的归纳定义证明 $x\in R$(实数)。

(1) $R=\{<a,b>|a\geqslant b\}\quad x=<3,1>$

(2) $R=\{<a,b>|a=2b\}\quad x=<6,3>$

(3) $R=\{<a,b,c>|a+b=c\}\quad x=<1,1,2>$

4. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$ $R=\{<1,2>,<2,3>,<3,3>,<3,4>,<4,5>\}$

$$S=\{<1,3>,<2,4>,<3,3>\}。$$

求 $R\cap S$、$R\cup S$、$R-S$ 和 $\sim R$。

求出 $D(R)$、$D(S)$、$R(R)$、$R(S)$、$D(R\cup S)$和 $R(R\cap S)$。

5. A 是 n 个元素的集合，A 上有多少个三元关系？

6. 如何从关系图看出关系的自反性、对称性、反自反性、反对称性？如何在关系图中确定关系的传递性？

7. 如何从关系矩阵看出关系的自反性、对称性、反自反性、反对称性？如何在关系图中确定关系的传递性？

8. 设 $P_1(x,y)\Leftrightarrow xy>0$，$P_2(x,y)\Leftrightarrow|x-y|=4$，$P_3(x,y)\Leftrightarrow x+y=10$，$P_4(x,y)\Leftrightarrow$ x 整除 y。试确定这些谓词在整数集合上确定的关系是否满足自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性？

解：例如，$P_1(x,y)\Leftrightarrow xy>0$ 在整数集合 I 上确定的关系 $R_1=\{<x,y>|xy>0\}$，从这个关系式可以知道，R_1 关系不是自反的，是反自反的、对称的，不是反对称的，满足传递性。其他类同。

9. 确定整数集合上的相等关系、$\leqslant$关系、$<$关系、全域关系和空关系满足自反、反自反、对称、反对称和传递性吗？

10. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，A 上的下列关系是否是可传递的，如果不可传递，说出破坏传递性的例子，如果下列关系 R_i 不满足传递性(自反、对称、反自反、反对称)，则设计关系 R，使得 $R\supseteq R_i$，R 是包含 R_i 的最小传递关系(自反、对称、反自反、反对称)。

$$R_1=\{<1,1>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,2>\}$$

$$R_3=\{<1,2>,<2,2>,<1,3>,<2,1>\}$$

$$R_4=\{<1,2>,<4,3>,<2,2>,<2,1>,<3,1>\}$$

11. 说明：关系的交、并、差、补运算能否保持关系的自反性(反自反性、对称性、反对称性、传递性)。例如，R_1 是自反的，R_2 是自反的，那么，$R_1\cup R_2$ 是自反的，则说，“并”运算能保持自反性。同理，讨论反自反性、对称性、反对称性、传递性。

12. 在平面 R^2 上画出下列关系图，并说明关系的性质。

(1) $\{<x,y>|x=y\}$

(2) $\{<x,y>|x^2-1=0\wedge y>0\}$

(3) $\{<x,y>|x\leqslant 1\wedge y\geqslant 1\}$