第3章 集合的基本概念和运算

作为现代数学基础的集合论，是由德国数学家康托尔于19世纪70年代创立的。起初不被人们所注意，而后在1908年另一位德国数学家莱梅罗建立了集合论的公理系统，由于这个公理系统，使得康托尔提出的集合论更严谨、更完美。集合论试图从一个比“数”更简单的概念——集合出发，定义数及其运算，进而发展到整个数学。集合不仅可以用来表示数及其运算，更可以用于非数值信息的表示和处理，像数据的删除、插入、排序，数据间关系的描述，数据的组织和查询等都很难用数值计算来处理，但却可以用集合运算来实现。集合论的观点在计算机科学、人工智能、逻辑学、经济学、语言学和心理学都有极其广泛的应用，对人类思想领域曾产生过并将继续产生深远的影响。在这里学习集合论，更是因为计算机科学及其应用的研究也和集合论有着极其密切的关系。本章主要对集合的基本概念、性质、基本运算、集合中元素的计数和笛卡儿乘积进行介绍。

3.1 集合的基本概念

集合是不能精确定义的基本的数学概念，直观地讲，集合是由某些可以相互区别的事物汇集在一起所组成的整体。对于给定的集合和事物，应该可以断定这个特定的事物是否属于这个集合。如果属于，就称它为这个集合的元素。

例 3.1.1 下面是集合的一些例子：

(1) 方程 $x^2-1=0$ 的全体实数解集合。

(2) 26个英文字母的集合。

(3) 计算机内存的全体单元的集合。

(4) 全体中国人的集合。

集合通常用大写的英文字母来表示。特别地，用 N 表示自然数集合，Z 表示整数集合，Q 表示有理数集合，R 表示实数集合，C 表示复数集合。元素通常用小写字母表示。若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$，否则称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$。

集合有两种表示方法：枚举法和谓词表示法。前一种方法是将集合中的所有元素罗列出来，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来。例如

$$A=\{a,b,c\},\quad B=\{1,2,3,\cdots\},\quad C=\{\text{春},\text{夏},\text{秋},\text{冬}\}$$

都是合法的表示。谓词表示法是用谓词来概括集合中元素的属性，例如

$$D=\{x\mid x\text{ 是学生}\},\quad E=\{x\mid x\text{ 是整数}\},\quad F=\{x\mid x\in R\wedge x^2-1=0\}$$

集合的元素是彼此不同的，如果同一个元素在集合中多次出现应该认为是一个元素。集合的元素也是无序的，元素的排列顺序对集合没有影响。

例 3.1.2 $A=\{a,\{b,c\},d,\{\{d\}\}\}$的隶属关系 $a\in A$，$\{b,c\}\in A$，$d\in A$，$\{\{d\}\}\in A$，但 $b\notin A$，$\{d\}\notin A$。b 是 A 的元素$\{b,c\}$的元素，不是 A 的元素。可以用一种树形结构把集合和它的元素之间的关系表示出来。在每个层次上，都把集合视为一个节点，它的元素则为它的儿子。这样 A 集合的结构如图 3.1.1 所示。不难看出，A 有 4 个儿子，所以 A 只有 4 个元素。而 b、c 和$\{d\}$都是 A 的元素的元素，但不是 A 的元素。

为了体系上的严谨性，我们规定：对任何集合 A 都有 $A\notin A$。

下面考虑在同一层次上的两集合间的关系。

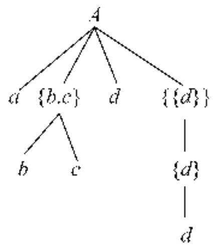

图 3.1.1 A 集合的结构

定义 3.1.1 设 A、B 为集合，如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 为 A 的子集合，简称子集。这时也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B。记做 $B\subseteq A$。包含的符号化表示为

$$B\subseteq A\Leftrightarrow(\forall x)(x\in B\rightarrow x\in A)$$

例 3.1.3 集合的包含关系

(1) $\{b,c\}\subseteq\{a,b,c,d\}$

(2) $N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R\subseteq C$

根据定义不难得到：对任何集合 S 都有 $S\subseteq S$。

定义 3.1.2 设 A、B 为集合，如果 $B\subseteq A$ 且 $A\subseteq B$，则称 A 与 B 相等，记做 $A=B$。相等的符号化表示为

$$B=A\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$

如果 A 与 B 不相等，则记做 $A\neq B$。

由以上定义可知，两个集合相等的充分必要条件是它们具有相同的元素。如

$$A=\{x\mid x\text{是小于等于 3 的素数}\},\quad B=\{x\mid x=2\vee x=3\}$$

则 $A=B$。

定义 3.1.3 设 A、B 为集合，如果 $B\subseteq A$ 且 $B\neq A$，则称 B 是 A 的真子集，记做 $B\subset A$。真子集的符号化表示为

$$B\subset A\Leftrightarrow B\subseteq A\wedge B\neq A$$

如果 B 不是 A 的真子集，则记做 $B\not\subset A$。例如，$\{0,1\}$是$\{0,1,2\}$的真子集，但$\{0,3\}$和$\{0,1,2\}$都不是$\{0,1,2\}$的真子集。

定义 3.1.4 不含任何元素的集合叫做空集，记做$\varnothing$。空集可以符号化表示为

$$\varnothing=\{x\mid x\neq x\}$$

空集是客观存在的，如 $A=\{x|x\in R\wedge x^2+1=0\}$是方程 $x^2+1=0$ 的实数解集，因为该方程没有实数根，所以 $A=\varnothing$。

定理 3.1.1 空集是一切集合的子集。

证明：任何集合 A，由子集定义有

$$\varnothing\subseteq A\Leftrightarrow(\forall x)(x\in\varnothing\rightarrow x\in A)$$

右边的条件式中因前件 $x\in\varnothing$ 为假，所以整个条件式对一切 x 为真，因此$\varnothing\subseteq A$ 为真。

推论 空集是唯一的。

证明：假设存在空集$\varnothing_1$ 和$\varnothing_2$，由定理 3.1.1 有$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$ 和$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$，根据集合相等的定义得

$$\varnothing_1=\varnothing_2$$

$\varnothing$和$\{\varnothing\}$是有区别的，$\varnothing$中不含任何元素，而$\{\varnothing\}$中有一个元素$\varnothing$。所以$\varnothing\neq\{\varnothing\}$。

一般地，称集合 A 的子集$\varnothing$和 A 为 A 的平凡子集。

含有 n 个元素的集合简称 n 元集，它的含有 m 个($m\leqslant n$)元素的子集称做它的 m 元子集。任给一个 n 元集，如何求出它的全部子集呢？

例 3.1.4 $A=\{a,b,c\}$，求 A 的全部子集。

解：将 A 的子集从小到大分类。

- 0 元子集，即空集，$\varnothing$；
- 1 元子集，即单元集，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$；
- 2 元子集，$\{a,b\}$，$\{b,c\}$，$\{a,c\}$；
- 3 元子集，$\{a,b,c\}$。

一般地，对 n 元集 A，它的 $m(0\leqslant m\leqslant n)$元子集有 C_n^m 个，不同的子集总数有

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

定义 3.1.5 设 A 为集合，把 A 的全体子集构成的集合叫做 A 的幂集，记做 $\rho(A)$。幂集的符号化表示为

$$\rho(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$$

对于例 3.1.4 中的集合 A 有 $\rho(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$。

定义 3.1.6 在一个具体的问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记做 U。

全集是有相对性的，不同的问题有不同的全集，即使是同一个问题也可以取不同的全集。例如，在研究平面上直线的相互关系时，可以把整个平面(平面上所有点的集合)取作全集，也可以把整个空间(空间上所有点的集合)取作全集。一般地，全集取得小一些，问题的描述和处理会简单些。

3.2 集合的基本运算

3.2.1 集合的运算

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并$\cup$、交$\cap$、相对补$-$、绝对补$\sim$和对称差$\oplus$等运算产生新的集合。

定义 3.2.1 设 A、B 为集合，A 与 B 的并集 $A\cup B$，交集 $A\cap B$，B 对 A 的相对补集 $A-B$ 分别定义如下：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$
$$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

显然，$A\cup B$ 由 A 或 B 中的元素构成，$A\cap B$ 由 A 和 B 中的公共元素构成，$A-B$ 由属于 A 但不属于 B 的元素构成。例如

$$A=\{1,2,3\},\quad B=\{1,4\},\quad C=\{3\}$$

则有

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}=B\cup A;$$
$$A\cap B=\{1\}=B\cap A;$$

$$A-B=\{2,3\};$$
$$B-A=\{4\};$$
$$C-A=\varnothing;$$
$$B\cap C=\varnothing。$$

当两个集合的交集是空集时，称它们是不交的。上面例子中 B 和 C 是不交的。

把以上定义加以推广，可以得到 n 个集合的并集和交集，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \lor x \in A_2 \lor \cdots \lor x \in A_n\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \land x \in A_2 \land \cdots \land x \in A_n\}$$

可以把 n 个集合的并集和交集简记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$。当 n 无限增大时，可以记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$。

定义 3.2.2 设 U 为全集，$A \subseteq U$，则称 A 对 U 的相对补集为 A 的绝对补集，记做 $\sim A$。

$$\sim A = U - A = \{x \mid x \in U \land x \notin A\}$$

因为 U 为全集，在所研究的问题中，任何集合的元素都为 U 的元素，也就是说 $x \in U$ 是真命题。所以 $\sim A$ 可以定义为 $\sim A = \{x \mid x \notin A\}$。

定义 3.2.3 设 A、B 为集合，则 A 与 B 的对称差为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

A 与 B 的对称差还有一个等价的定义，即 $A \oplus B = (A \cup B) - (B \cap A)$。

例 3.2.1 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{2,3\}$，计算 $A \oplus B$

$A \oplus B = \{0,1\} \cup \{3\} = \{0,1,3\}$ 或 $A \oplus B = \{0,1,2,3\} - \{2\} = \{0,1,3\}$

集合之间的相互关系和有关运算可用文氏图给予形象的描述，其构造方法如下：

首先画一个大矩形表示全集，其次在矩形内画一些圆，圆的内部表示集合。一般情况下，这些圆应该是彼此相交的。如果已知某两个集合是不交的，则表示它们的圆彼此相离。通常在图中画有阴影的区域表示新组成的集合。图 3.2.1 显示了文氏图实例。

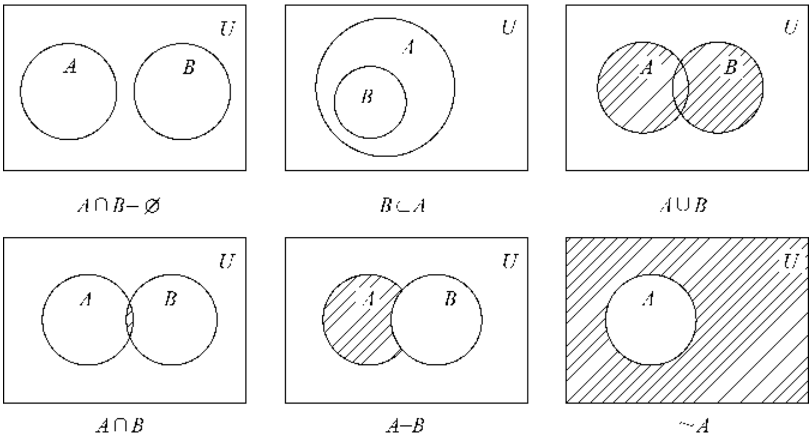

图 3.2.1 文氏图实例

3.2.2 集合运算算律

任何代数运算都遵从一定的算律,集合运算也不例外。下面给出集合运算的主要算律,其中 A、B、C 表示任意的集合。

幂等律	$A\cup A=A$
	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
交换律	$A\cup B=B\cup A$
	$A\cap B=B\cap A$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$
	$A\cap U=A$
零律	$A\cup U=U$
	$A\cap\varnothing=\varnothing$
排中律	$A\cup\sim A=U$
矛盾律	$A\cap\sim A=\varnothing$
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$
	$A\cap(A\cup B)=A$
德·摩根律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$
	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$
	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$
	$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
	$\sim\varnothing=U$
	$\sim U=\varnothing$
双重否定律	$\sim(\sim A)=A$

以上恒等式证明的基本思想是:欲证 $P=Q$,即证 $P\subseteq Q\wedge Q\subseteq P$,也就是要证对任意的 x 有 $x\in P\Rightarrow x\in Q$ 和 $x\in Q\Rightarrow x\in P$ 成立,即 $x\in P\Leftrightarrow x\in Q$。

例 3.2.2 证明德·摩根律中的 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明: 对任意的 x,有

$$
\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(\neg x\in B\wedge\neg x\in C)\\
\Leftrightarrow & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow (x \in A - B) \wedge (x \in A - C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$$

则 $$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

除了以上算律，还有一些关于集合运算性质的重要结论，在此一并给出。

$$A \cap B \subseteq A \quad A \cap B \subseteq B$$

$$A \subseteq A \cup B \quad B \subseteq A \cup B$$

$$A - B \subseteq A$$

$$A - B = A \cap \sim B$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$$

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

$$A \oplus \varnothing = A$$

$$A \oplus A = \varnothing$$

$$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$$

$A-B=A\cap\sim B$ 建立了相对补运算和交运算之间的联系，可以利用它将相对补转变成交。$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A-B=\varnothing$ 给出了 $A\subseteq B$ 的 3 种等价的定义，为证明两个集合之间包含关系提供了新方法，同时也可以用于集合公式的化简。后 5 条算律是关于对称差运算的，下面例 3.2.3 给出 $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$ 的证明过程。

例 3.2.3 已知 $A\oplus B=A\oplus C$，证明 $B=C$。

证明： $A\oplus B=A\oplus C$ （已知）

所以 $A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$

$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$ （结合律）

$\varnothing\oplus B=\varnothing\oplus C$

所以 $B=C$。

3.3 集合中元素的计数

3.3.1 容斥原理

集合 A 含有 n 个元素，可以说集合 A 的基数是 n，记做 card $A=n$。所谓基数就是表示集合中所含元素多少的量。如果集合 A 的基数是 n，也可以记为 $|A|=n$。显然空集的基数是 0，即 $|\varnothing|=0$。

定义 3.3.1 设 A 为集合，若存在自然数 n(0 也是自然数)，使得 $|A|=\text{card } A=n$，则称 A 为有穷集，否则就称 A 为无穷集。

有穷集的基数很容易确定，而无穷集的基数比较复杂，在此不予讨论。本节所涉及的基数问题均针对有穷集。

例 3.3.1 有 100 名程序员，其中 47 名熟悉 C 语言，35 名熟悉 C++语言，23 名熟悉这两种语言。问有多少人对这两种语言都不熟悉？

解： 设 A、B 分别表示熟悉 C 和 C++语言的程序员的集合，则该问题可以用图 3.3.1 所

示的文氏图表示。将熟悉两种语言的对应人数 23 填入 $A\cap B$ 的区域内，不难得到 $A-B$ 和 $B-A$ 的人数分别为

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=47-23=24$$
$$|B-A|=|B|-|A\cap B|=35-23=12$$

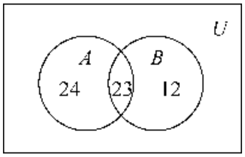

图 3.3.1　例 3.3.1 的文氏图

从而得到 $|A\cup B|=24+23+12=59$，故 $|\sim(A\cup B)|=100-59=41$，即两种语言都不熟悉的有 41 人。

使用文氏图可以很方便地解决有穷集的基数问题。首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。一般地说，每一条性质决定一个集合，有多少条性质就有多少个集合，如没有特殊说明，任何两个集合都是相交的。然后将这一集合的基数填入表示该集合的区域内。通常是从几个集合的交集填起，接着根据计算的结果将数字逐步填入其他空白区域内，直到所有区域都填好为止。

例 3.3.2　求在 1～1000 之间不能被 5 或 6，也不能被 8 整除的数的个数。

解：设 1～1000 之间的整数构成全集 U，A、B、C 分别表示其中可被 5、6 或 8 整除的数的集合，如图 3.3.2 所示。

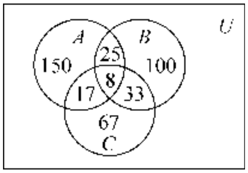

图 3.3.2　例 3.3.2 的文氏图

在 $A\cap B\cap C$ 中的数一定可被 5、6 和 8 的最小公倍数 $[5,6,8]=120$ 整除，即

$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 1000/[5,6,8]\rfloor=\lfloor 1000/120\rfloor=8$$

其中 $\lfloor x\rfloor$ 表示小于等于 x 的最大整数。然后将 8 填入 $A\cap B\cap C$ 的区域内。

同理可得：

$$|A\cap B|=\lfloor 1000/[5,6]\rfloor=\lfloor 1000/30\rfloor=33$$
$$|A\cap C|=\lfloor 1000/[5,8]\rfloor=\lfloor 1000/40\rfloor=25$$
$$|B\cap C|=\lfloor 1000/[6,8]\rfloor=\lfloor 1000/24\rfloor=41$$

然后将 $33-8=25$，$25-8=17$，$41-8=33$ 分别填入邻近的 3 块区域。

最后计算

$$|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$$
$$|B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166$$
$$|C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$$

根据以上结果，剩下的区域就不难填出了，从而得到 $|A\cup B\cup C|=400$。

所以不能被 5、6 和 8 整除的数有 600 个。

除了使用文氏图的方法外，对于集合的基数还有一条重要的定理——容斥原理。容斥原理刻画了有限个有穷集的并集与各有穷集之间在元素个数上的联系，其在实际中有着广泛的应用。

设 S 是有穷集，P_1 和 P_2 分别表示两种性质，对于 S 中的任何一个元素 x，只能处于以下 4 种情况之一：

(1) 只具有性质 P_1。

(2) 只具有性质 P_2。

(3) 具有 P_1 和 P_2 两种性质。

（4）两种性质都没有。

令 A_1 和 A_2 分别表示 S 中具有性质 P_1 和 P_2 的元素的集合。为了使表达式简洁，对任何集合 B，用 $\overline{B}$ 代替 $\sim B$。由文氏图不难得到以下公式：

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |S| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

这就是容斥原理的一种简单形式。

如果涉及 3 条性质，容斥原理的公式则变成

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| \\ + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

定理 3.3.1 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素数是

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| \\ - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned}$$

证明：等式左边是 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 的元素数。将要证明：对 S 中的任何元素 x，如果它不具有这 m 条性质，则对等式右边的贡献是 1；如果 x 至少具有其中的一条性质，则对等式右边的贡献是 0。

设 x 不具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，那么 $x \notin A_i \quad i = 1, 2, \cdots, m$。对任何整数 i、j，$1 \leqslant i < j \leqslant m$，都有 $x \notin A_i \cap A_j$，对任何整数 i、j、k，$1 \leqslant i < j < k \leqslant m$，都有 $x \notin A_i \cap A_j \cap A_k$，…，$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$。但是 $x \in S$，所以在等式右边的基数中它的贡献是

$$1 - 0 + 0 - 0 + \cdots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

设 x 具有 n 条性质，$1 \leqslant n \leqslant m$，则 x 对 $|S|$ 的贡献是 1，即 C_n^0，对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$ 项的贡献是 $C_n^1 = n$，对 $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j|$ 项的贡献是 C_n^2，…，对 $|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$ 项的贡献是 C_n^m。所以 x 对等式右边基数的总贡献是

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^m C_n^m = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n, n \leqslant m$$

根据二项式定理不难得到上面式子的结果是 0。

推论 在 S 中至少具有一条性质的元素数是

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j| \\ + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ - \cdots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|\end{aligned}$$

考虑例 3.3.2，由容斥原理

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| \\ &\quad + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\ &= 600\end{aligned}$$

该结果与所求结果一致。

3.3.2 容斥原理实例

例 3.3.3 某学院学生选课情况如下：260 人选 C 语言，208 人选编译原理，160 人选人工智能，76 人选 C 语言和编译原理，48 人选 C 语言和人工智能，62 人选编译原理和人工智能，全部 3 门课程均选的有 30 人，3 门课程均不选的有 150 人。问：

(1) 该学院共有多少学生？

(2) 有多少学生选 C 语言和编译原理，但不选人工智能？

(3) 有多少学生选 C 语言和人工智能，但不选编译原理？

(4) 有多少学生选编译原理和人工智能，但不选 C 语言？

(5) 有多少学生选 C 语言，而不选其他两门课程？

(6) 有多少学生选编译原理，而不选其他两门课程？

(7) 有多少学生选人工智能，而不选其他两门课程？

解：设

$$\mathrm{A}=\{\text{选 C 语言的学生}\}$$
$$\mathrm{B}=\{\text{选编译原理的学生}\}$$
$$\mathrm{C}=\{\text{选人工智能的学生}\}$$

由题意可知

$$|A|=260,\quad |B|=208,\quad |C|=160$$
$$|A\cap B|=76,\quad |A\cap C|=48,\quad |B\cap C|=62$$
$$|A\cap B\cap C|=30,\quad |\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|=150$$

(1) 学生总数为

$$\begin{aligned}|U|&=|(A\cup B\cup C)\cup\overline{(A\cup B\cup C)}|\\&=|A\cup B\cup C|+|\overline{A\cup B\cup C}|\\&=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|+|\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}|\\&=260+208+160-76-48-62+30+150\\&=622\end{aligned}$$

(2) 即求$|A\cap B\cap\bar{C}|$。因为$A\cap B=A\cap B\cap(C\cup\bar{C})=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\bar{C})$，所以

$$\begin{aligned}|A\cap B|&=|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap\bar{C}|-|(A\cap B\cap C)\cap(A\cap B\cap\bar{C})|\\&=|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap\bar{C}|\end{aligned}$$

故$|A\cap B\cap\bar{C}|=|A\cap B|-|A\cap B\cap C|=76-30=46$。

与(2)类似，可得

(3) $|A\cap\bar{B}\cap C|=|A\cap C|-|A\cap B\cap C|=48-30=18$。

(4) $|\bar{A}\cap B\cap C|=|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=62-30=32$。

(5) 即求$|A\cap\bar{B}\cap\bar{C}|$。因

$$\begin{aligned}&(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\\&=(A\cap\bar{C})\cap(B\cup\bar{B})\cup(A\cap C)\cap(B\cup\bar{B})\\&=(A\cap\bar{C})\cup(A\cap C)\\&=A\cap(\bar{C}\cup C)\\&=A\end{aligned}$$

所以$|A|=|A\cap B\cap \overline{C}|+|A\cap \overline{B}\cap \overline{C}|+|A\cap \overline{B}\cap C|+|A\cap B\cap C|$。故

$$|A\cap \overline{B}\cap \overline{C}|=|A|+|A\cap B\cap \overline{C}|-|A\cap \overline{B}\cap C|-|A\cap B\cap C|$$
$$=260-46-18-30=166$$

与(5)类似,可得

(6) $|\overline{A}\cap B\cap \overline{C}|=|B|+|\overline{A}\cap B\cap C|-|A\cap B\cap \overline{C}|-|A\cap B\cap C|=208-32-46-30=100$。

(7) $|\overline{A}\cap \overline{B}\cap C|=|C|+|\overline{A}\cap B\cap C|-|A\cap \overline{B}\cap C|-|A\cap B\cap C|=160-32-18-30=80$。

例 3.3.4 某班学生 150 人。数学考试成绩 90 分以上的有 80 人,语文考试成绩 90 分以上的有 75 人,两门课程均在 90 分以上的有 50 人,问:

(1) 只有一门课程成绩 90 分以上的学生有多少人?

(2) 两门课程成绩均不在 90 分以上的学生有多少人?

解:全集为该班学生组成的集合。设

$$A=\{x\mid x \text{ 的数学成绩在 90 分以上}\}$$
$$B=\{x\mid x \text{ 的语文成绩在 90 分以上}\}$$

由题意可知

$$|A|=80,\quad |B|=75,\quad |A\cap B|=50,\quad |U|=150$$

(1) 即需求$|(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)|$。因为

$$\begin{aligned}(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)&=(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cup A)\cap B\\&=(A\cap \overline{B})\cup B\\&=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)\\&=A\cup B\end{aligned}$$

所以$|(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)|+|A\cap B|-|((A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))\cap A\cap B|=|A\cup B|$,即

$$\begin{aligned}|(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)|&=|A\cup B|-|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cap B|-|A\cap B|\\&=80+75-50-50=55\end{aligned}$$

(2) 即需求$|\overline{A}\cap \overline{B}|$,即

$$\begin{aligned}|\overline{A}\cap \overline{B}|&=|\overline{A\cup B}|=|U|-|A\cup B|=|U|-|A|-|B|+|A\cap B|\\&=150-80-75+50=45\end{aligned}$$

3.4 笛卡儿乘积

集合中的元素是无次序的,即认为$\{x,y\}=\{y,x\}$,则称$\{x,y\}$为无序偶,但在实际生活中经常遇到考虑两元素顺序关系的问题,如平面直角坐标系下的横坐标 x 与纵坐标 y 是有次序关系的。

3.4.1 有序对

定义 3.4.1 由两元素 x 和 y(允许 $x=y$)按一定的顺序排列成的二元组叫做一个有序对(也称序偶),记做$<x,y>$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素。

一般地,有序对具有以下特点:

(1) 当 $x\neq y$ 时$<x,y>\neq<y,x>$。

(2) 两个有序对相等,即$<x,y>=<u,v>$的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$。

这两个特点是集合$\{x,y\}$所不具备的，原因在于有序对$<x,y>$中强调 x 和 y 的顺序性，而集合$\{x,y\}$中的 x 和 y 是无序的。

例 3.4.1 证明$<x,y>=<u,v>$的充分必要条件是 $x=u$ 且 $y=v$。

证明：充分性 显然成立。

必要性 若$<x,y>=<u,v>$，则

$$\{x\} \in \{\{x\},\{x,y\}\} = <x,y> = <u,v> = \{\{u\},\{u,v\}\}$$

(1) 若$\{x\}=\{u\}$，则因为 $u\in\{u\}=\{x\}$，所以 $u=x$。

(2) 若$\{x\}=\{u,v\}$，则因为 $u\in\{u,v\}=\{x\}$，所以有 $u=x$，$\{u\}=\{x\}$。

故总有$\{x\}=\{u\}$及 $x=u$ 成立。

由$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，$\{x\}=\{u\}$得

$$\{x,y\} = \{u,v\}$$

再由$\{x,y\}=\{u,v\}$和 $x=u$ 可得 $y=v$。

在实际问题中有时会用到有序 3 元组，有序 4 元组，……，有序 n 元组。可以用有序对来定义有序 n 元组。

定义 3.4.2 一个有序 n 元组($n\geqslant 3$)是一个有序对，其中第一个元素是第一个有序 $n-1$ 元组，一个有序 n 元组记做$<x_1,x_2,\cdots,x_n>$，即$<x_1,x_2,\cdots,x_n>=<<x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}>,x_n>$。

例如，空间直角坐标系中点的坐标$<3,2,-4>$就是有序三元组，n 维向量是有序 n 元组。

3.4.2 笛卡儿积

定义 3.4.3 设 A、B 为集合，用 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做 A 和 B 的笛卡儿积，记做 $A\times B$。符号化表示为

$$A\times B = \{<x,y> \mid x\in A \wedge y\in B\}$$

从笛卡儿积的定义和逻辑演算的知识可以看出，若$<x,y>\in A\times B$，则有 $x\in A$ 和 $y\in B$。若$<x,y>\notin A\times B$，则有 $x\notin A$ 或 $y\notin B$。

由排列组合知识不难证明，如果 A 中有 m 个元素，B 中有 n 个元素，则 $A\times B$ 和 $B\times A$ 都有 mn 个元素。例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，则有

$$A\times B = \{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>\}$$
$$B\times A = \{<0,a>,<0,b>,<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>\}$$

笛卡儿积运算具有以下性质：

(1) 若 A、B 中有一个空集，则它们的笛卡儿积是空集，即

$$\varnothing\times B = A\times\varnothing = \varnothing$$

(2) 若 $A\neq B$ 且 A、B 都不是空集时，有

$$A\times B\neq B\times A$$

即笛卡儿积运算不满足交换律。

(3) 当 A、B、C 都不是空集时有

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$$

即笛卡儿积运算不满足结合律。

设 $x\in A$， $y\in B$， $z\in C$，那么$<<x,y>,z>\in(A\times B)\times C$，而$<x,<y,z>>\in$